

TD 28 | I3&4- Couplage électro-mécanique

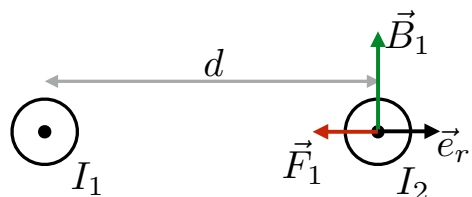
	I	II	III	IV	V	VI
Faire preuve de sens physique			✓		✓	
Tracer un régime transitoire			✓			
Decoupler des équations						✓
Exprimer un couple de Laplace				✓	✓	
Etudier un régime sinusoïdal forcé					✓	
Réaliser un bilan d'énergie			✓			✓
Etudier un équilibre		✓	✓	✓		
exprimer la force de Laplace	✓	✓	✓			✓

I Deux fils en interaction (★)

On considère deux fils infinis parallèles verticaux distants de d , parcourus par les courants I_1 et I_2 tous deux orientés vers le haut. On rappelle que pour un fil infini d'axe Oz dont l'intensité I est orientée suivant $+\vec{u}_z$, on a $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

1. Réalisez un schéma de la situation (vue du dessus) et positionnez les différents vecteurs importants.

Réponse :



2. Déterminez la force exercée par le premier fil sur une hauteur h du second. De quelle nature est cette force (attractive ou répulsive) ?

Réponse :

Soit $\vec{e}_r$ le vecteur de base orienté du premier vers le second vecteur. Cette force vaut d'après le cours $\vec{F}_1 = I_2 h \vec{e}_z \wedge \vec{B}_1 = -I_2 h \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{e}_r$ soit

$$\vec{F}_{(1/2)} = -I_1 I_2 \frac{\mu_0 h}{2\pi d} \vec{e}_r$$

3. Déterminez ensuite la force exercée par le second fil sur le premier (toujours sur une hauteur h). Commentez

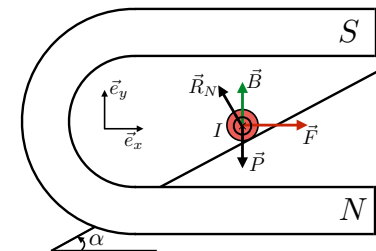
Réponse :

De la même manière, on a $\vec{F}_2 = I_1 h \vec{e}_z \wedge \vec{B}_2 = I_1 h \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \vec{e}_r$. En effet, le champ magnétique est cette fois si selon $-\vec{e}_\theta$ pour le premier fil. (les vecteurs $\vec{e}_\theta$ issus des deux fils sont opposés. On observe finalement $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ ce qui est cohérent avec le principe des actions réciproques

II Equilibre sur un plan incliné (★)

Une tige de cuivre de longueur $d = 5,0$ cm et de masse $m = 15$ g est placée horizontalement sur des rails de Laplace inclinés d'un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

Un aimant en U de même largeur d crée un champ magnétique uniforme vertical. La tige, parcourue par un courant d'intensité I est en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Réalisez un schéma puis représentez le vecteur champ magnétique entre les deux pôles de l'aimant.

Réponse :

Sur le schéma, en haut à droite.

2. Réalisez ensuite le bilan des forces s'exerçant sur la tige.

Réponse :

Il y a trois forces à caractériser :

- Le poids : $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$.
- La force de Laplace : $F_L = I(-d \vec{e}_z) \wedge B \vec{e}_y = IdB \vec{e}_x$
- La réaction normale du support $\vec{R}_N$.

3. En déduire le sens du courant dans la tige sachant que cette dernière est à l'équilibre. A.N. : calculez I pour $B = 0,30 \text{ T}$. On donne $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

Réponse :

On sait que la tige est à l'équilibre donc $\vec{F}_L + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}$. La norme de la réaction du support étant inconnue et non demandée, on projette cette relation selon le plan incliné (vecteur $\vec{e}_{x'}$) :

$$\vec{F}_L \cdot \vec{e}_{x'} + \vec{P} \cdot \vec{e}_{x'} = 0 \Rightarrow IdB \cos(\alpha) - mg \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow I = \frac{mg}{Bd} \tan(\alpha)$$

Il faudra donc un courant positif (suivant $-\vec{e}_z$). A.N. $I = 3,57 \text{ A}$.

III Freinage par induction (★)

Une bobine plate de masse m est composée de N spires carrées de côté a . Les deux extrémités de l'enroulement sont reliées et, ainsi, la bobine forme un circuit linéique de résistance r et de coefficient d'auto-induction que l'on négligera. On veillera à respecter le sens positif du courant indiqué sur le schéma.

Cette bobine est suspendue à l'extrémité d'un ressort isolant d'axe vertical de longueur à vide l_0 et de raideur k . À l'équilibre, la longueur du ressort est $l_1 > l_0$ et le centre d'inertie C de la bobine possède une abscisse nulle.

Un aimant permanent crée dans la région $x > 0$ un champ magnétique horizontal orthogonal au plan des spires. On considère que ce champ est nul pour $x < 0$ et est uniforme égal à $B\vec{u}_y$ pour $x > 0$.

À l'instant $t = 0$ on écarte la bobine de sa position d'équilibre d'une distance $d < \frac{a}{2}$ vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale. On s'intéresse, en l'absence de tout frottement, au mouvement de translation rectiligne, le centre d'inertie C se déplaçant parallèlement à l'axe Ox . On note $u(t)$ l'abscisse du centre d'inertie de la bobine à l'instant t .

1. Réalisez une étude **qualitative et exhaustive** des phénomènes.

Réponse :

Loi de modération $\Rightarrow$ la force va s'opposer au déplacement donc amortissement.

2. Effectuez l'étude électrique du circuit pour déterminer une relation faisant intervenir l'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{du}{dt}$.

Réponse :

$\varphi = (x + a/2) \times a \times (-B)$ (attention à l'orientation du courant) donc $\frac{d\varphi}{dt} = -v \times a \times B$ donc $e = NvaB = ri$

3. Déterminez une seconde relation faisant intervenir l'intensité et l'abscisse de la bobine à l'aide de l'étude mécanique.

Réponse :

sur les parties colinéaires à $\vec{e}_x$ les forces se compensent, pour la partie horizontale du haut, pas de force parce que pas de $\vec{B}$, pour la partie horizontale en bas on a $\vec{F} = Nai\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_y = -aBNi\vec{e}_x$

4. En déduire l'équation différentielle en $u(t)$ caractérisant le mouvement étudié. On introduira une pulsation propre ω_0 .

Réponse :

$$m\ddot{u} = -ku - NaB\dot{u}NBa/r \text{ donc } \ddot{u} + \frac{N^2a^2B^2}{mr}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$$

5. Montrez que le régime est différent en fonction d'une valeur critique du champ magnétique B_c que l'on déterminera en fonction de N, m, ω_0, r et a .

Réponse :

$$B_c = \sqrt{\frac{2\omega_0 mr}{N^2 a^2}}$$

6. Représentez l'allure des variations temporelles de $u(t)$ dans le cas où B est supérieur à B_c

Réponse :

Régime aperiodique avec amortissement

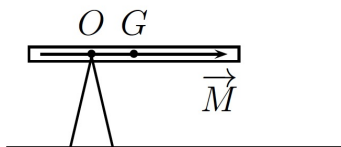
7. Déterminez à l'aide des équations de base établies lors des questions 2 et 3 l'égalité qui traduit le bilan global en puissance à l'instant t : donnez la signification physique des trois termes qui figurent dans ce bilan.

Réponse :

pour le bilan de puissance, on prend les expressions qu'on avait et on fait $\cdot \mathbf{i}$ et $\cdot \mathbf{v}$ puis on a $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2) = -ri^2$ ce qu'on perd en méca, c'est dissipé par effet joule

IV Aimant en équilibre (★★)

Un aimant très fin, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ horizontal (c.f. schéma) et de masse m , repose en équilibre sur une pointe en O . Il est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical et à la gravité.



1. Le champ $\vec{B}$ doit-il être dirigé vers le haut ou vers le bas ?

Réponse :

Le poids a tendance à faire tomber l'aimant et son couple est orienté "vers la feuille". Ce dernier doit être compensé par le couple de la force de Laplace qui doit être orienté "vers le lecteur" ce qui est le cas pour le champ magnétique vertical ascendant.

2. Évaluez la distance $d = OG$ pour que l'aimant reste en équilibre horizontal.

Réponse :

On applique le théorème du moment cinétique à l'équilibre :

$$\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{F}_L) = \vec{0} \Rightarrow \vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow d = \|\vec{OG}\| = \frac{\mathcal{M}B}{mg}$$

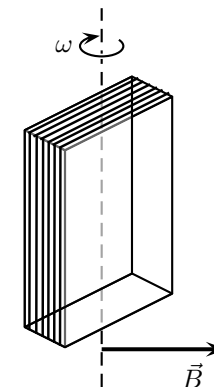
En effet, les vecteurs sont bien tous orthogonaux pour le calcul des produits vectoriels

V Système en rotation (★★)

On considère une bobine plate comportant $N = 500$ spires rectangulaire de surface $S = 25 \text{ cm}^2$, d'inductance $L = 54 \text{ mH}$ et de résistance interne $r = 15 \Omega$.

Elle est refermée sur une résistance $R = 100 \Omega$ et tourne dans un champ magnétique constant et uniforme d'intensité $B = 300 \text{ mT}$ à une vitesse angulaire constante $\omega = 100 \text{ rad/s}$.

On s'intéresse à l'évolution du courant dans la bobine à partir d'un instant initial où il est nul (par exemple si la bobine est connectée à un interrupteur que l'on bascule en position fermé à $t = 0$)

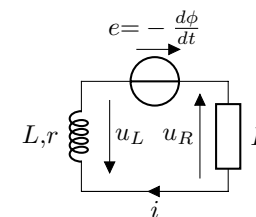


Pour modéliser la bobine, on associe en série la résistance interne, une inductance pure et la fém induite du fait de la rotation notée e . On peut aussi ne pas faire figurer l'inductance, mais il faut prendre en compte dans e le flux total et non pas le flux externe seulement.

1. Réalisez le schéma électrique correspondant à la situation décrite dans l'énoncé.

Réponse :

Il faut faire attention à bien orienter la f.e.m. en convention générateur.



2. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par le courant qui circule dans la bobine.

Réponse :

Le flux est $\phi = NBS \cos(\omega t)$ d'où $e = -\frac{d\phi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t)$ On utilise ensuite la loi des mailles : $e = (r + R)i + L\frac{di}{dt}$ et l'équation différentielle est donc

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{NBS\omega}{L} \sin(\omega t)$$

avec $\tau = \frac{L}{r+R}$

3. *Donnez l'expression générale des solutions (sans chercher à déterminer la valeur des constantes). Interprétez les différents termes. Après combien de temps le régime permanent est-il atteint ?*

Réponse :

la solution générale est $i = \lambda e^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \phi)$ la sol. homogène en exp décroissante correspond au régime transitoire alors que la solution particulière correspond au régime sinusoïdal forcé qui est atteint au bout de quelques $\tau = 0,47$ ms

4. *Calculez la valeur efficace du courant une fois le régime permanent atteint.*

Réponse :

On utilise la notation complexe et puis on prendra le module à la fin.

$$I_m \left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{NBS\omega}{L} (-j) \Rightarrow I_m = \frac{NBS\omega}{L \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}}$$

Puis pour avoir la valeur efficace, on divise par $\sqrt{2}$ et numériquement $I_{\text{eff}} = 0,23$ A

5. *Quel est le couple nécessaire pour maintenir la vitesse constante en régime permanent*

Réponse :

On a d'après le cours $\Gamma_{\text{lap}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ donc

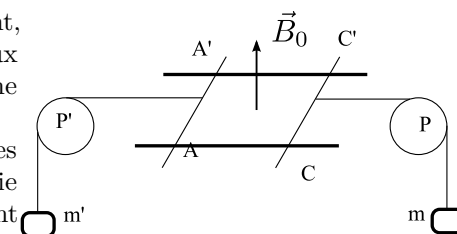
$$\Gamma_{\text{ext}} = -\Gamma_{\text{lap}} = -iS\vec{e}_r \wedge B\vec{e}_x = iNSB \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

On peut aussi retrouver ce résultat avec un bilan de puissance : $\Gamma_{\text{lap}} = -\frac{ei}{\omega} = -NBS \sin(\omega t)$ d'où le résultat avec $\Gamma_{\text{ext}} = -\Gamma_{\text{lap}}$

VI Double rail (★ ★ ★)

Les deux barres AA' et CC' se déplacent, sans frottement, sur deux rails horizontaux et parallèles dans un champ vertical uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

On fait les hypothèses suivantes : les poulies P et P' sont idéales et de moment d'inertie nuls, les masses des barres AA' et CC' seront négligées, chaque barre possède une résistance R , les fils sont inextensibles et enfin on néglige la résistance des rails et les phénomènes d'auto-induction.



On pose $AA' = CC' = a$ et $\frac{1}{\tau} = \frac{B_0^2 a^2}{2R} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)$

1. *On note $\vec{v}(t) = v(t)\vec{e}_x$ et $\vec{v}'(t) = v'(t)\vec{e}_x$ les vitesses des barres CC' et AA' . Établissez l'équation électrique donnant le courant $i(t)$ traversant $ACC'A'A$.*

Réponse :

les 2 barres vont vouloir s'éloigner l'une de l'autre à cause des masses. L'aire à prendre en compte pour le flux est $a \times (x_C - x_A)$ d'où en orientant i de A vers C on a $\phi = B_0 a (x_C - x_A)$ d'où $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a (v - v')$. Le courant induit s'obtient en divisant par $2R$: $i = -\frac{B_0 a}{2R} (v - v')$.

2. *Donnez les deux équations mécaniques traduisant le mouvement des deux barres.*

Réponse :

La masse des tiges étant négligeable, il est plus simple d'appliquer le PFD aux masses. On commence par la masse de droite m :

$$m \frac{dy}{dt} = mg - T \quad \text{avec} \quad \underbrace{\vec{T} + \vec{F}_L}_{\text{PFD sur la tige sans masse}} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad T = -||i\vec{CC'} \wedge \vec{B}|| = -iaB_0$$

De plus, on a $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$ soit :

$$\dot{v} = g + i \frac{aB_0}{m}$$

De la même manière, on trouve pour l'autre tige (avec $\frac{dx'}{dt} = -\frac{dy'}{dt}$) :

$$\dot{v}' = -g - i \frac{aB_0}{m}$$

3. Résolvez le système précédent (équations électriques et mécaniques). On déterminera les vitesses en supposant que les masses sont initialement lâchées sans vitesse initiale. (On suggère de faire apparaître les grandeurs $mv + m'v'$ et $v - v'$). Tracez l'allure des courbes $v(t)$ et $v'(t)$.

Réponse :

système d'équation en utilisant la première question :

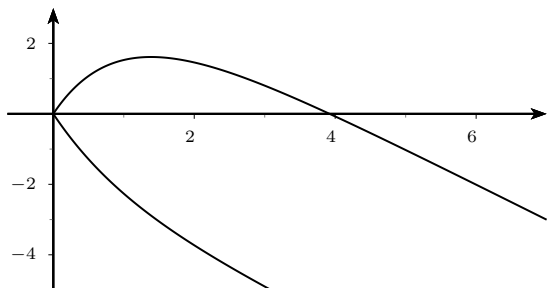
$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B_0^2 a^2}{2R} (v - v') \quad ; \quad m' \frac{dv'}{dt} = -m'g + \frac{B_0^2 a^2}{2R} (v - v')$$

On fait la somme et la différence en divisant par la bonne masse et on a :

$$\frac{d}{dt}(mv + m'v') = (m - m')g \quad ; \quad \frac{d}{dt}(v - v') = 2g - \frac{B_0^2 a^2}{2R} \left(\frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m'} (v - v')$$

On résout et ça nous donne $v = \frac{1}{m+m'} ((m - m')gt + m'2g\tau(1 - e^{-t/\tau}))$ et $v' = \frac{1}{m+m'} ((m - m')gt - m'2g\tau(1 - e^{-t/\tau}))$

C'est choquant, mais à la fin elles vont toutes les deux dans le même sens !



4. Réalisez un bilan énergétique puis commentez.

Réponse :

Pour faire un bilan énergétique, on reprend les équations et on multiplie par la bonne grandeur et on intègre.

Pour la première équation, on multiplie par i et ça donne $\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{em}$ et pour les autres, on multiplie par v et ça donne $\frac{d}{dt}E_m = F_L v$.

On « remarque » que $F_L v = \mathcal{P}_{em}$ et on obtient que la variation d'énergie méca, c'est ce qu'on perd par effet joule. $\vec{B}$ ne fait « que » la conversion.

Éléments de réponses :

E1 Q2 : $\vec{F}_{(1/2)} = -I_1 I_2 \frac{\mu_0 h}{2\pi d} \vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r$ orienté du fil 1 vers le fil 2.

E2 Q3 : $I = 3,57 \text{ A}$

E3 Q4 : $\ddot{u} + \frac{N^2 a^2 B^2}{m r} \dot{u} + \frac{k}{m} u = 0$

E4 Q2 : $d = \frac{\mathcal{M}B}{mg}$

E5 Q4 : On trouve $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2} \approx 0,23 \text{ A}$