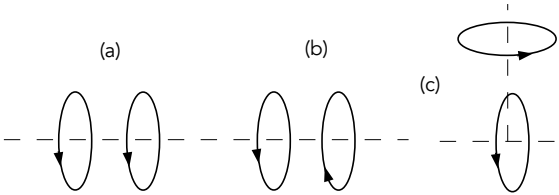


TD 27 | I2- Induction

	I	II	III	IV	V
Réaliser une approximation			✓	✓	✓
Combiner plusieurs éléments	✓				
Gerer des calculs					✓
Faire preuve de sens physique		✓			
Analyser un schéma	✓	✓	✓		
Calculer un flux magnétique			✓	✓	
Decoupler des équations					✓
Etudier un régime sinusoïdal forcé				✓	
Utiliser la loi de Lenz		✓		✓	

I Autour du cours (★)

1. Deux spires orientées sont placées suivant 3 dispositions (a), (b) et (c). Indiquez le signe de M dans chaque cas.



Réponse :

On a $\phi_2 = Mi_1$. Dans le cas (a), les deux bobines sont orientés dans le même sens donc $\vec{B}_1$ et $\vec{n}_2$ aussi donc $M > 0$. On a ensuite $M < 0$ dans le cas (b) et $M = 0$ dans le cas (c) car $\phi_2 = 0$ ($\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux)

2. Calculer l'inductance propre d'une bobine de longueur l , comportant N spires de surface S . On précisera clairement les hypothèses de calcul.

Réponse :

Il s'agit d'un résultat déjà démontré en cours. On commence premièrement par déterminer le champ B créé par la bobine. La formule de cours donne $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i$ où

i est le courant circulant dans la bobine.
On peut ensuite calculer le flux de $\vec{B}$ afin d'appliquer la loi de Faraday :

$$\phi = N \left(\vec{B} \cdot S\vec{n} \right) = \mu_0 \frac{N^2}{l} S i$$

Or par définition, on a $\phi = L i$ soit ici : $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$

3. On combine en série deux bobines identiques d'inductances L . Démontrer que l'on obtient $L_{eq} = 2L$ à partir du résultat précédant.

Réponse :

Ici, on remarque que $l_{eq} = 2l$ et que $N_{eq} = 2N$ d'où l'on déduit $L_{eq} = 2L$

4. Justifier que le couplage entre deux solénoïdes parallèles est nul

Réponse :

Dans le cas des solénoïde, on considère que les champs magnétiques créés par ces derniers sont nuls à l'extérieurs. Chaque solénoïde ne va donc pas recevoir de flux extérieurs de la part de l'autre.

5. (★★) Adapter le calcul effectué à la question 2 dans le cas de deux bobines identiques (mêmes N , l et R) d'inductances L placées en parallèle pour démontrer $L_{eq} = L/2$. Attention, il conviendra dans un premier temps de définir proprement les courant circulants dans ces deux bobines.

Réponse :

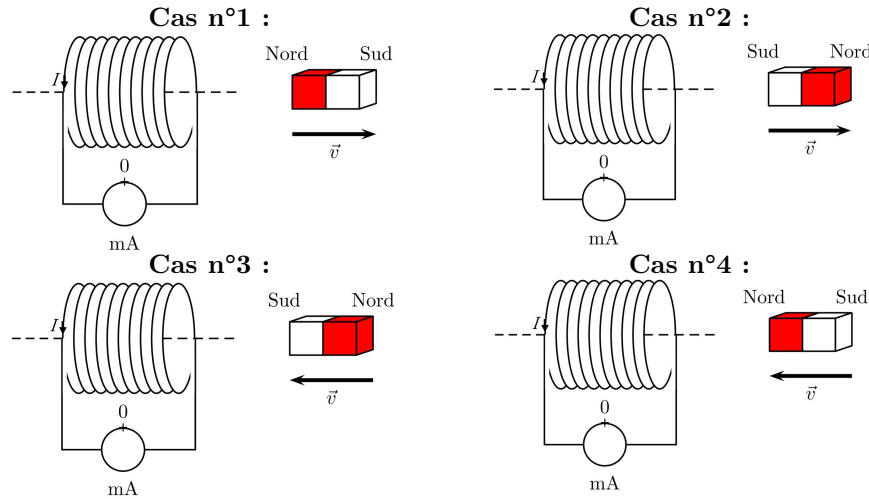
Les bobines étant identiques, la loi des noeuds implique que $i_1 = i_2 = i/2$. De plus, les bobines étant indépendantes, on peut reprendre pour chacune la méthode employée à la question 2 et on obtient

$$\phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \times i/2 \quad \text{et} \quad \phi_2 = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \times i/2$$

Les deux bobines étant branchées en parallèles, on a $e_1 = e_2$ donc $\phi_1 = \phi_2$ d'après la loi de Faraday. On en déduit $L_{eq} = \phi/i = L/2$

II Loi de Lenz (★)

1. Dans chacun des quatre cas suivants, prévoir le sens du courant induit par application de la loi de Lenz.



Réponse :

Rappelons que pour un aimant droit, le champ sort par le Nord : les lignes de champ sont orientées du Nord vers le Sud. La première étape consiste à déterminer le sens de variation du champ magnétique vu par la spire au cours du déplacement. On déduit alors de la loi de Lenz le sens du champ magnétique induit $\vec{B}_{\text{ind}}$, qui tend à atténuer les variations de $\vec{B}$. On détermine ensuite par la règle de la main droite le sens réel du courant dans la spire. Enfin, par comparaison entre le sens réel du courant et le sens $i > 0$ indiqué sur la figure on en déduit le signe de i . Dans toute la suite, nous noterons $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la bobine et orienté de gauche à droite.

Attention à ne pas faire de confusion : ce sont les variations de champ pendant le déplacement qui comptent, pas le sens de ce champ. Le champ induit peut indifféremment renforcer ou atténuer le champ extérieur, tout dépend des variations. Attention également, le champ et le courant induits n'existent dans la spire que pendant le déplacement relatif de l'aimant et de la spire.

- premier cas : le champ magnétique est orienté selon $-\vec{u}_x$ et le déplacement de l'aimant se fait selon $+\vec{u}_x$. Par conséquent, le champ magnétique perd en intensité selon $-\vec{u}_x$. Par loi de Lenz, le champ induit va donc compenser cette diminution en étant créé selon $-\vec{u}_x$. En utilisant la règle de la main droite, $I < 0$.
- deuxième cas : le champ magnétique est orienté selon $+\vec{u}_x$ et le déplacement de l'aimant se fait selon $+\vec{u}_x$. Par conséquent, le champ magnétique perd en

intensité selon $+\vec{u}_x$. Par loi de Lenz, le champ induit va donc compenser cette diminution en étant créé selon $+\vec{u}_x$. En utilisant la règle de la main droite, $I > 0$.

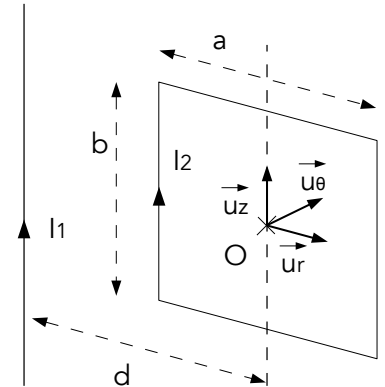
- troisième cas : le champ magnétique est orienté selon $+\vec{u}_x$ et le déplacement de l'aimant se fait selon $-\vec{u}_x$. Par conséquent, le champ magnétique gagne en intensité selon $+\vec{u}_x$. Par loi de Lenz, le champ induit va donc compenser cette augmentation en étant créé selon $-\vec{u}_x$. En utilisant la règle de la main droite, $I < 0$.
- quatrième cas : le champ magnétique est orienté selon $-\vec{u}_x$ et le déplacement de l'aimant se fait selon $-\vec{u}_x$. Par conséquent, le champ magnétique gagne en intensité selon $-\vec{u}_x$. Par loi de Lenz, le champ induit va donc compenser cette augmentation en étant créé selon $+\vec{u}_x$. En utilisant la règle de la main droite, $I > 0$.

III Calcul d'inductance mutuelle (★★)

On considère un fil infini d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité I_1 . Une bobine rectangulaire d'épaisseur négligeable, constituée de N spires et parcourue par une intensité I_2 se trouve à une distance d de ce fil.

La spire et le fil sont coplanaires, comme indiqué sur le schéma. On donne l'expression du champ magnétique créé par le fil : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

1. Calculer le flux du champ $\vec{B}_1$ créé par le fil à travers la bobine. Attention, la champ magnétique n'est pas uniforme.



Réponse :

Par définition, on a

$$\phi = N \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{d-a/2}^{d+a/2} \left(\int_0^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} dz \right) dr \quad \text{car } \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = B_1$$

$$\Rightarrow \phi = N \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_1 \int_{d-a/2}^{d+a/2} \frac{1}{r} dr = \frac{N \mu_0 b}{2\pi} I_1 \ln \left(\frac{d+a/2}{d-a/2} \right)$$

2. En déduire le coefficient M d'inductance mutuelle entre le fil et la bobine.

Réponse :

Par définition, on a $M = \frac{N\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a/2}{d-a/2}\right)$

3. Ce résultat dépend-il de l'orientation des intensités ?

Réponse :

Ce résultats dépend des orientations des circuits. En effet, si l'on change l'orientation de I_2 , on change le sens de $\vec{n}$ et donc le signe du produit scalaire donc du flux.

4. Simplifier finalement ce résultat lorsque $d \gg a$. Commenter

Réponse :

On passe à la limite $d \gg a$:

$$M = \frac{N\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{1 + a/(2d)}{1 - a/(2d)}\right) = \frac{N\mu_0 b}{2\pi} (\ln(1 + a/(2d)) - \ln(1 - a/(2d)))$$

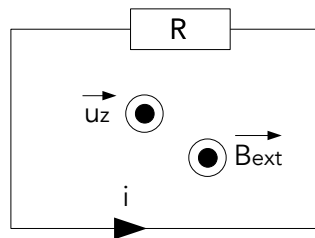
$$\Rightarrow M \approx -\frac{N\mu_0}{2\pi d} ab \approx \frac{\vec{B}(d)}{I_1} \cdot (ab)\vec{n}$$

Ainsi, lorsque $d \gg a$, le champ magnétique perçu par la bobine devient uniforme d'où le résultat

IV Induction propre et externe (★★)

On considère un circuit électrique fixe rectangulaire, d'aire S , de résistance R , plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_{ext} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$, d'amplitude B_0 et dépendant du temps à la pulsation temporelle ω .

On note L le coefficient d'auto-inductance du circuit (non représenté sur le circuit)



1. Justifier qu'un courant non nul va apparaître dans le circuit à l'aide d'arguments physiques.

Réponse :

Le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur variable donc reçoit un flux magnétique variable et une f.e.m. d'induction va apparaître (loi de Faraday). Une loi des mailles permettra ensuite de relier la f.e.m. au courant induit.

2. Établissez l'équation électrique vérifiée par l'intensité i en fonction de B_0, ω, R, L et S . Mettez ensuite cette équation sous forme canonique en faisant intervenir un temps caractéristique, noté τ , à exprimer en fonction des données.

Réponse :

On commence par calculer la f.e.m. liée au champ $\vec{B}$ extérieur : $e = -\frac{d + SB(t)}{dt} = SB_0 \omega \sin(\omega t)$. On peut ensuite appliquer la loi des mailles au circuit composé d'une résistance R , d'une inductance L (auto-induction) et d'un générateur équivalent de f.e.m. e :

$$e = SB_0 \omega \sin(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{SB_0}{L} \omega \sin(\omega t) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

3. Expliquez pourquoi, au bout d'un certain temps de fonctionnement, il est légitime de chercher la solution sous la forme $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Montrez alors que l'amplitude i_0 de l'intensité i vaut :

$$i_0 = |i| = \frac{SB_0 \omega}{L \sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$$

Réponse :

La solution de cette équation différentielle non homogène peut se mettre sous la forme $i(t) = i_H(t) + i_p(t)$ où i_H représente une solution de l'équation homogène et i_p , une solution particulière.

Au bout d'un certain temps $t \ll \tau$, i_H va tendre vers 0 (décroissance exponentielle) et on aura $i(t) \approx i_p(t)$. La solution particulière étant du même type que le second

membre, il est ainsi légitime de la rechercher sous la forme proposée à l'aide de la méthode des complexes. On a ainsi :

$$j\omega \underline{i} + \frac{1}{\tau} \underline{i} = \frac{SB_0\omega}{L} \omega e^{-j\pi/2}$$

Le terme de phase dans le même de droite vient de l'utilisation d'un sinus au lieu d'un cosinus. On obtient au final :

$$\underline{i} = \frac{-jSB_0S\omega/L}{1/\tau + j\omega} \Rightarrow i_0 = |\underline{i}| = \frac{SB_0\omega}{L\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}}$$

4. On note e_L la f.e.m auto-induite et e_{ext} la f.e.m extérieure en régime sinusoïdal forcé. Exprimez le rapport des amplitudes de ces deux f.e.m. en régime sinusoïdal forcé. En déduire la condition sur ω pour pouvoir négliger la f.e.m auto-induite devant la f.e.m extérieure.

Réponse :

En régime sinusoïdal forcé, on a $e_L = jL\omega \underline{i}$ et $e_{ext} = SB_0\omega e^{-j\pi/2}$. On trouve ainsi :

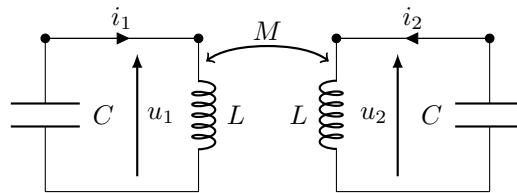
$$\frac{|e_L|}{|e_{ext}|} = L\omega \frac{SB_0\omega}{L\sqrt{(1/\tau)^2 + \omega^2}} \frac{1}{SB_0\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}}$$

Ainsi, la f.e.m. auto induite pourra être négligée lorsque $\omega \ll 1/\tau$

V Circuits couplés (☆☆)

Deux circuits électriques sont couplés par induction mutuelle, comme indiqué sur la figure ci-contre.

On néglige la résistance électrique de chacun.



1. Établissez un système d'équations différentielles sur u_1 et u_2 . On posera $k = \frac{M}{L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Réponse :

Il suffit d'appliquer la loi des mailles aux deux circuits. Pour le circuit de gauche, on a :

$$u_c + u_l + M \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow -u_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow u_1 + LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} = M \frac{di_2}{dt}$$

De la même manière, on obtient par symétrie pour le second circuit :

$$u_2 + LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = M \frac{di_1}{dt}$$

On peut s'affranchir des courants en utilisant la relation caractéristique des condensateurs : $i_k = -C \frac{du_k}{dt}$ (convention générateur pour les condensateurs imposée par le schéma). On peut finalement réécrire ces équations en faisant intervenir les variables proposées :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 &= -k \frac{d^2 u_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 &= -k \frac{d^2 u_1}{dt^2} \end{aligned}$$

On observe au passage que ce système d'équation ne contient pas de dérivée première (absence de dissipation).

2. A l'instant initial, le condensateur C_1 est chargé $u_1(0) = u_0$ tandis que C_2 est déchargé, et les intensités dans les deux circuits sont nulles. On pose $s(t) = u_1(t) + u_2(t)$ et $d(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Établissez les équations sur $s(t)$ et $d(t)$ ainsi que les conditions initiales $s(0^+)$ et $d(0^+)$.

Réponse :

On obtient pour le nouveau système :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1 + u_2}{dt^2} + \omega_0^2 (u_1 + u_2) &= -k \frac{d^2 u_2 + u_1}{dt^2} \Rightarrow \ddot{s} + \underbrace{\frac{\omega_0^2}{1+k}}_{\omega'^2} s = 0 \\ \frac{d^2 u_1 - u_2}{dt^2} + \omega_0^2 (u_1 - u_2) &= k \frac{d^2 u_1 - u_2}{dt^2} \Rightarrow \ddot{d} + \underbrace{\frac{\omega_0^2}{1-k}}_{\omega''^2} d = 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues découplées. Pour les conditions initiales, on a directement $s(0^+) = u_0$ et $d(0^+) = u_0$.

Pour leurs dérivées, on remarque que les courants initiaux étant nul, on a $\dot{s}(0^+) = \dot{d}(0^+) = 0$ (en utilisant encore la relation caractéristique du condensateur).

3. Résolvez ces équations en introduisant deux autres pulsations ω et ω' . Montrez que l'on a alors

$$u_1(t) = u_0 \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}t\right) \text{ et } u_2(t) = u_0 \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}t\right)$$

E5 Q4 : On doit trouver :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \omega_0^2 u_1 = -k \frac{d^2 u_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \omega_0^2 u_2 = -k \frac{d^2 u_1}{dt^2}$$

Réponse :

On doit résoudre deux équations type "oscillateur harmonique" de solutions :

$$s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Rightarrow s(t) = u_0 \cos(\omega t) \quad \text{d'après les C.I.s}$$

$$\text{et } d(t) = u_0 \cos(\omega' t)$$

On peut retrouver u_1 et u_2 en combinant les résultats précédents :

$$u_1 = \frac{s + d}{2} = \frac{u_0}{2} (\cos(\omega t) + \cos(\omega' t)) = u_0 \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}t\right)$$

$$u_2 = \frac{s - d}{2} = \frac{u_0}{2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega' t)) = u_0 \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}t\right)$$

4. Dans le cas où $k \ll 1$, montrez que $u_1(t) \approx u_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\Omega t)$ et $u_2(t) \approx u_0 \sin(\omega_0 t) \sin(\Omega t)$ où Ω est une pulsation à déterminer. Comparez ω_0 et Ω . Quel est le nom de ce phénomène ?

Réponse :

Lorsque $k \ll 1$, on a $(\omega + \omega')/2 \approx \omega_0$ car $\sqrt{1+k} \approx 1$. De plus, on a aussi :

$$(\omega' - \omega)/2 \approx \omega_0 \left(\left(1 + \frac{k}{2}\right) - \left(1 - \frac{k}{2}\right) \right) \approx \omega_0 k$$

On observe ainsi un effet de battement d'autant plus faible que le couplage entre les deux circuits est faible.

Éléments de réponses :

E3 Q2 : $M = \frac{N\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a/2}{d-a/2}\right)$

E4 Q2 : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{SB_0}{L} \omega \sin(\omega t)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$