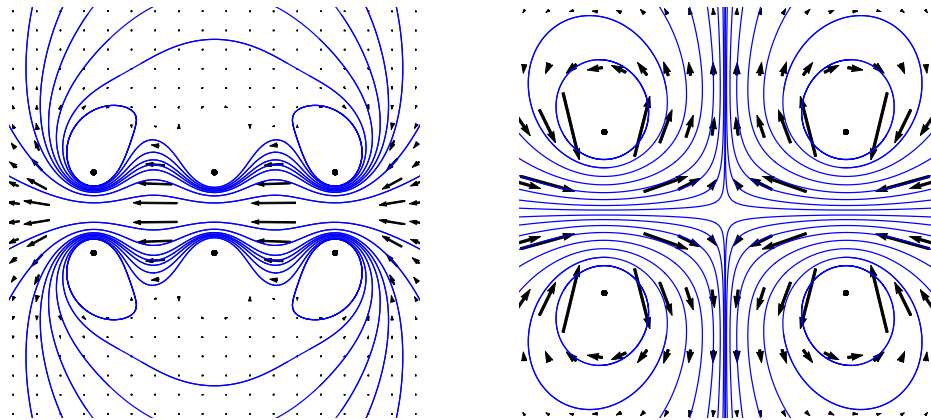


TD 26 |I1- Production de champs magnétiques

	I	II	III	IV	V	VI
Réaliser une approximation					✓	✓
Gerer des calculs			✓		✓	✓
Démontrer un résultat				✓	✓	
Faire preuve de sens physique	✓	✓		✓		
Exprimer des puissances			✓			
Analyser un schéma	✓		✓		✓	

I Cartes de champs (★)

On considère les champs magnatiques suivants engendrés par des courants électriques.



1. Sur les deux cartes de champ magnétique précédente, où sont placés les sources de courant ?

Réponse :
Les lignes de champ tournent autour des sources, elles sont situés au niveau des points au centre des lignes de champ.

2. Dans quel sens le courant circule t'il pour chacune des sources ? Justifier soigneuseu-
ment votre raisonnement.

Réponse :

Pour trouver le sens du courant, il faut utiliser la règle de la main droite/du tire bouchon

Dans le cas de gauche, pour les points du haut le courant va du lecteur vers la feuille et pour les points du bas de la feuille vers le lecteur.

Dans le cas de droite, pour le point en haut à gauche et celui en bas à droite, le courant va de la feuille vers le lecteur et dans l'autre sens pour les deux autres.

II Aimantation (★)

On trouve sur un site commercial les ordres de grandeur suivants pour des aimantations d'aimants permanents. L'aimantation correspond à un moment dipolaire magnétique par unité de volume.

Matériaux	AlNiCo	Ferrite	NdFeB	SmCo5	SmCo17
aimantation (kA m ⁻¹)	600	1700	2000 à 4000	2000 à 3000	3500 à 5000

1. Rappelez la dimension d'un moment dipolaire magnétique et vérifiez si les unités proposées dans le tableau sont cohérentes avec la définition donnée de la grandeur aimantation.

Réponse :
Par définition, le moment magnétique d'une boucle de courant de surface S parcourue par un courant I est $\vec{M} = I\vec{S}$ avec $\vec{S}$ orientée par I (règle de la main droite).
Ainsi, la dimension de $\mathcal{M}$ est $[\mathcal{M}] = [I.S] = I.L^2$, son unité légale est l' A m².
En notant M l'aimantation, $M = \frac{d\mathcal{M}}{dV}$ (moment magnétique par unité de volume ou densité volumique de moment magnétique) s'exprime en A m² m⁻³=A m⁻¹ ce qui est bien cohérent avec les données qui figurent dans le tableau.

2. Considérons un aimant en forme de disque d'épaisseur $e = 1,0$ mm, et de rayon $R = 10,0$ mm.

(a) Calculez l'ordre de grandeur du moment magnétique dipolaire d'un tel aimant en NdFeB (néodyme-fer-bore).

Réponse :
Le volume de cet aimant cylindrique est $V = S.e = \pi R^2 e = 3,14 \times 25 \times 1 = 314$ mm³ soit $V = 3,14 \times 10^{-7}$ m³. On en déduit sont moment magnétique $\mathcal{M} \simeq M.V = 3.10^6 \times 314.10^{-8} \simeq 0,96$ A m².

- (b) Combien de spires de rayon R parcourues par une intensité de $0,1 \text{ A}$ faudrait-il bobiner pour obtenir le même moment magnétique dipolaire ?

Réponse :

Pour N spires, $\mathcal{M} = NIS = NI\pi R^2 \Rightarrow N = \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2 I} = \frac{Me}{I} \simeq 3.10^4$ spires !

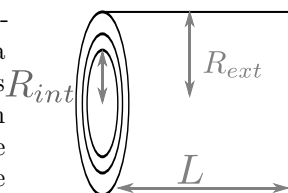
- (c) En faisant l'analogie avec une spire simple. Estimez le champ magnétique produit par cet aimant à 2 mm de sa surface sur son axe, puis à 20 cm .

Réponse :

Lorsque $z \ll R$, on a $B \approx \mu_0 M / (2\pi R^3) \approx 0,2 \text{ T}$. Dans le deuxième cas, on a $z \gg R$ et donc $B \approx \mu_0 M / (2\pi z^3) = 2,4 \times 10^{-5} \text{ T}$.

III Puissance électrique consommée par une bobine (★)

On souhaite fabriquer une bobine d'imagerie à résonance magnétique (IRM) pour atteindre un champ magnétique de 6 T . La bobine obtenue est à spire jointive (qui se touchent les unes les autres sans contact électrique) formé d'un seul fil de $d = 1 \text{ cm}$ de diamètre enroulé pour former un cylindre de $L = 2 \text{ m}$ de long et d'épaisseur $R_{ext} - R_{int} = 10 \text{ cm}$. Le rayon moyen est de 50 cm environ.



1. Quel est le courant nécessaire pour obtenir le champ souhaité ?

Réponse :

Il faut estimer le nombre de spires par unité de longueur. On a 1 cm de diamètre, donc 100 enroulements dans un mètre et 10 cm d'épaisseur donc $\times 10$. On a donc $n = 1000 \text{ m}^{-1}$. Le courant est $I = B / (\mu_0 n) = 6 / (1000 * 12 \times 10^{-7}) = 5000 \text{ A}$.

2. (★★) On donne la résistivité du cuivre à température ambiante : $\rho = 17 \times 10^{-9} \Omega \text{ m}$. La formule donnant la résistance pour un fil de section S et de longueur l est $R = \rho \frac{l}{S}$. Quelle est la tension à appliquer pour maintenir le courant souhaité ? Quelle est la puissance consommée par la bobine ?

Réponse :

il faut estimer la longueur du fil : $2\pi R$ par spire $\times$ le nombre de spire ce qui fait environ $\pi \times 1000 \text{ m}$ de fil. $R = 17 \times 10^{-9} \frac{\pi \times 1000}{\pi (5 \times 10^{-3})^2} \simeq 17 \times 10^{-9+3+6} / 25 \simeq 1 \Omega$ donc une tension d'environ 5000 V et une puissance consommée de 25 MW !

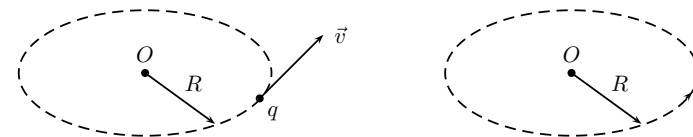
3. Expliquez l'intérêt d'une bobine supraconductrice dans ce cas

Réponse :

bobine supra : on la charge une fois et on garde le froid (ce qui coute moins chère à l'aide d'une PAC).

IV Moments magnétique et cinétique (★)

Une particule de masse m et charge q décrit un mouvement circulaire uniforme de période de révolution T . On souhaite modéliser ce système comme une spire parcourue par un courant d'intensité I constante.



1. Exprimez le moment magnétique du système en fonction de q , T et du rayon R .

Réponse :

Par définition l'intensité du courant qui circule dans un fil de section s est $I = \frac{dq}{dt}$ avec dq la charge qui traverse la section s pendant la durée dt . On prendra donc $I = \frac{q}{T}$ ici.

Par définition du moment magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = iS \cdot \vec{e}_z = \pi R^2 \cdot \frac{q}{T} \cdot \vec{e}_z = \frac{\pi q R^2}{T} \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{e}_z \text{ unitaire normal à la trajectoire}$$

2. Exprimez ensuite le moment cinétique (par rapport au centre de l'orbite), pour ce même système. Vérifiez qu'il y a proportionnalité du moment magnétique et du moment cinétique ; que remarque-t-on sur le coefficient de proportionnalité ?

Réponse :

Par définition du moment cinétique, le point tournant à la vitesse $v = \frac{2\pi R}{T}$, on a

$$\vec{L}_0 = m \cdot \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mR \cdot \vec{e}_r \wedge \frac{2\pi R}{T} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{2\pi m R^2}{T} \cdot \vec{e}_z = \frac{2m}{q} \vec{\mathcal{M}}$$

Le facteur de proportionnalité est $\frac{2m}{q}$ qui ne dépend ni du rayon de la trajectoire de la particule ni de sa vitesse, uniquement de ses caractéristiques intrinsèques.

3. Quel ordre de grandeur proposeriez-vous pour le moment magnétique de l'atome d'hydrogène, sachant que le moment cinétique orbital de l'électron est de l'ordre de $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34}$ J s ? On donne la masse de l'électron $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

Réponse :

Dans le cadre de ce modèle, on a obtenu $\mathcal{M} = \frac{e}{2m_e} L_O = \frac{\hbar e}{2m_e} L \simeq 9 \times 10^{-24}$ A m²

V Champ magnétique créé par un solénoïde (★★)

Le champ créé par une spire de courant plane parcourue par un courant d'intensité i et dont le rayon est R peut se calculer à l'aide des lois de l'électromagnétisme. Pour un point M appartenant à l'axe de symétrie de la spire, la formule est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \alpha (\pm \vec{e}_z)$$

où α est l'angle sous lequel le point M voit la spire.

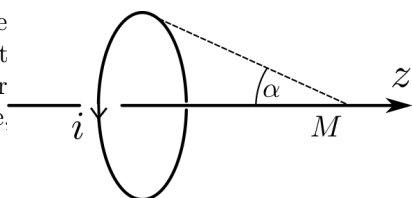
1. Le champ est-il dirigé suivant $+$ ou $- \vec{e}_z$

Réponse :

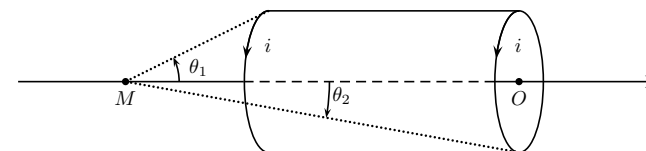
Selon $+$ $\vec{e}_z$

2. Calculez la norme de $\vec{B}$ en un point M de l'axe distant de $D = 10$ cm du centre de la spire.

On prendra $R = 2$ cm et $i = 0,5$ A. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ kg m A⁻² s⁻².



On peut modéliser une bobine de longueur L et de rayon R par une succession de N spires. Le point M voit la première spire sous l'angle θ_1 et la dernière sous l'angle θ_2 . On note $n = N/L$ le nombre de spires par unité de longueur de la bobine.

**Réponse :**

$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + D^2}}$ d'où $B = 1,2 \times 10^{-7}$ T.

3. Déterminez le champ magnétique créé par un élément d'épaisseur dz de la bobine vu sous un angle $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ au point M (on pensera à exprimer le nombre de spires contenues dans cet élément).

Réponse :

dans un élément de longueur dz , on a $n dz$ spires par définition de n . Le champ créé vaut donc $n dz$ celui créé par une spire, soit $d\vec{B} = n dz \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$

4. Par intégration, en déduire le champ magnétique créé en M par la bobine. On pourra admettre dans un premier temps que l'on peut utiliser le changement de variable : $dz = \frac{-R d\theta}{\sin^2 \theta}$ et ne la démontrer qu'ensuite¹.

Réponse :

$\vec{B} = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} n dz \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$. Ici, les bornes d'intégrations sont définies pour l'angle θ mais on intègre par rapport à z . Il faut donc passer de dz à $d\theta$ en effectuant un changement de variable : $\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}}$

$$\frac{d \sin \theta}{dz} = -\frac{R}{R^2 + (z - z_M)^2} \times \frac{2(z - z_M)}{2\sqrt{R^2 + (z - z_M)^2}} = \frac{-1}{R} \sin^2 \theta \cos \theta$$

1. Aide pour la démonstration :

- Exprimez $\sin \theta$ en fonction de R, z la position courante de l'élément de bobine considéré et z_M la position du point M .
- Exprimez $\frac{d \sin \theta}{dz}$ en fonction de $R, \sin \theta$ et $\cos \theta$
- Exprimez enfin $\frac{d \sin \theta}{d\theta}$ et en déduire la relation de l'énoncé.

$$\Rightarrow dz = \frac{-R d \sin \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta} \quad \text{or} \quad \frac{d \sin(\theta)}{d\theta} = \cos \theta \quad \text{d'où finalement} \quad dz = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Comme observé en TD, utiliser la tangente est un peu plus rapide :

$$\tan(\theta) = \frac{R}{z - z_M} \Rightarrow \frac{d \tan(\theta)}{dz} = -\frac{R}{(z - z_M)^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{d \tan(\theta)}{d\theta}}_{=1/\cos^2(\theta)} \frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{R} \tan^2(\theta)$$

D'où le résultat.

On peut ensuite simplifier l'intégrale à l'aide du changement de variable proposé :

$$\vec{B} = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} n \frac{\mu_0 i}{2R} \sin^3 \theta \frac{-R d\theta}{\sin^2 \theta} \vec{e}_z = n \frac{\mu_0 i}{2} \left(\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} -\sin \theta d\theta \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$$

5. Que valent en première approximation les angles θ_1 et θ_2 si M est placé à l'intérieur de la bobine et que la longueur de la bobine L est très grande devant son rayon R ? En déduire l'expression du champ magnétique dans une bobine longue

Réponse :

$$\theta_2 \simeq 0 \text{ et } \theta_1 \simeq \pi \text{ d'où : } \vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

VI Spires de Helmholtz (★ ★ ★)

L'objectif de cet exercice est de créer un champ magnétique selon $\vec{e}_z$ le plus uniforme possible entre deux spires de rayon R_1 et R_2 parcourues par un courant I identique.

On rappelle le champ $\vec{B}$ généré par une spire :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha (\pm \vec{e}_z)$$

(le signe dépend de l'orientation de la spire et l'angle α est défini dans l'exercice précédent.)

1. Vaut-il mieux positionner les deux spires avec la même orientation ou au contraire, avec une orientation opposée ?

Réponse :

Si les deux bobines ont une orientation différente, $B_z = \vec{B} \cdot \vec{e}_z$ va passer d'une valeur positive à une valeur négative entre les deux spires. Cela ne correspond pas à une situation de champ uniforme. On utilisera donc la même orientation pour les deux spires

2. On place les deux spires aux positions z_1 et $z_2 = -z_1$ respectivement. Exprimez alors le champ magnétique sur l'axe $\vec{e}_z$ en un point quelconque d'abscisse z en fonction de $z_1, z_2, R_1, R_2, \mu_0$ et I .

Réponse :

On ajoute simplement les deux contributions :

$$B_z(z) = B_1(z) + B_2(z) \Rightarrow B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{R_1^2}{(R_1^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} + \frac{R_2^2}{(R_2^2 + (z + z_1)^2)^{3/2}} \right)$$

3. Afin d'avoir le champ le plus uniforme possible, on souhaite annuler la dérivée de B_z en $z = 0$ (au centre des bobines). Déduisez en une conditions sur les rayons R_1 et R_2 des deux spires. Dans toute la suite, on supposera cette condition vérifiée.

Réponse :

On cherche à annuler la dérivée de B_z en $z = 0$

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 I}{2} \left(R_1^2 \frac{3(z - z_1)}{(R_1^2 + (z - z_1)^2)^{5/2}} + R_2^2 \frac{3(z + z_1)}{(R_2^2 + (z + z_1)^2)^{5/2}} \right)$$

$$\text{donc } \frac{dB_z}{dz}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2} \left(R_1^2 \frac{-3z_1}{(R_1^2 + z_1^2)^{5/2}} + R_2^2 \frac{3z_1}{(R_2^2 + z_1^2)^{5/2}} \right) = 0$$

$$\text{soit } R_1 = R_2$$

Ainsi, il faut utiliser deux bobines de même dimension.

4. On peut obtenir un champ encore plus uniforme en essayant aussi d'annuler la dérivée seconde² de B_z en $z = 0$. En déduire une condition sur $|z_2 - z_1|$ en fonction des rayons R_1 et R_2 .

Réponse :

On cherche maintenant à améliorer la qualité du champ $\vec{B}$. Pour cela, on peut chercher

2. Un champ parfaitement uniforme aurait toutes ses dérivées n^{iemes} nulles en $z = 0$ (décomposition en série de Taylor)

à annuler sa dérivée seconde. On a :

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (z + z_1)^2)^{3/2}} \right)$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{3(z - z_1)}{(R^2 + (z - z_1)^2)^{5/2}} + \frac{3(z + z_1)}{(R^2 + (z + z_1)^2)^{5/2}} \right)$$

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{3X - X'3(z - z_1)}{X^2} + \frac{3Y - Y'3(z + z_1)}{Y^2} \right)$$

avec $X = (R^2 + (z - z_1)^2)^{5/2}$ et $Y = (R^2 + (z + z_1)^2)^{5/2}$ et donc $X' = 5(z - z_1)(R^2 + (z - z_1)^2)^{3/2}$ et $Y' = 5(z + z_1)(R^2 + (z + z_1)^2)^{3/2}$. On en déduit $X(0) = Y(0)$ et $Y'(0) = -X'(0)$ soit au final :

$$\frac{d^2 B}{dz^2}(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{3X - X'3(-z_1)}{X^2} + \frac{3X + X'3(z_1)}{X^2} \right) = \frac{\mu_0 I R^2}{X^2} 3(X + X'z_1)$$

Cette dérivée seconde s'annule lorsque $X(0) + X'(0)z_1 = 0$ soit en posant $x = z_1/R$:

$$(R^2 + z_1^2)^{5/2} - 5z_1^2 (R^2 + z_1^2)^{3/2} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)^{5/2} = 5x^2 (1 + x^2)^{3/2} \Rightarrow (1 + x^2) = 5x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 1$$

On obtient au final $x = \pm \frac{1}{2}$ soit $|z_2 - z_1| = |2z_1| = R$

Éléments de réponses :

E2 Q2 : $N \approx 3.10^4$

E3 Q2 : tension de 5000 V et puissance consommée de 25 MW

E5 Q4 : $\vec{B} = \frac{\mu_0 n i}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$

E6 Q4 : On retrouve le résultat du cours : $|z_2 - z_1| = R$