TD 24 | T4- **Machines thermiques**

	I	II	III	IV	V
Appliquer le second principe		✓			
Gerer des calculs	✓		✓		✓
Faire preuve de sens physique		✓	✓	✓	
Exprimer un rendement	✓	✓	✓	✓	✓
Appliquer le premier principe	✓	✓		✓	
tracer une courbe	✓				✓

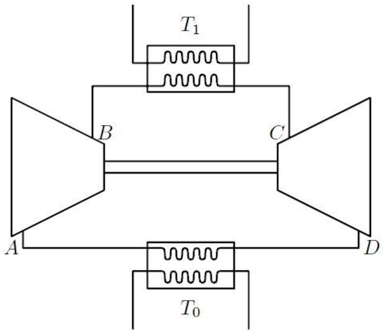
I Etude d'une pompe à chaleur ($\star$)

Une pompe à chaleur effectue le cycle suivant :

- L'air pris dans l'état A de température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique réversible jusqu'au point B où il atteint la pression P_1.
- Le gaz se thermalise lentement à pression constante et atteint la température finale de la source chaude T_1 correspondant à l'état C.
- L'air est ensuite refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique révsersible pour atteindre l'état D de pression P_0.
- Le gaz se thermalise toujours lentement, à pression constante au contact de la source froide T_0 et retrouve son état initial A.

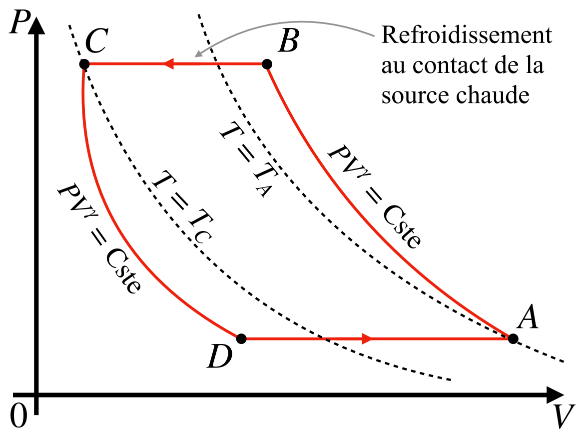
On considère l'air comme un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$.
On posera $\beta = 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ et $a = \frac{P_1}{P_0}$

Pour les applications numériques, on prendra $T_0 = 283\,\mathrm{K}$ (10 °C), $T_1 = 298\,\mathrm{K}$ (25 °C), $a = 5$ et $R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ (constante des gaz parfaits).



1. *Représentez le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de* Watt (P, V).

   Réponse :



---

2. *Exprimez les température T_B et T_D en fonction de T_0, T_1, a et β. Calculer leurs valeurs.*

   Réponse :
   On applique la loi de Laplace $P^{1-\gamma}T^\gamma = cte$ à la transformation AB adiabatique réversible :

$$P_0^{1-\gamma}T_0^\gamma = P_1^{1-\gamma}T_B^\gamma$$
$$\Rightarrow T_B = T_0\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

   Or $\frac{1-\gamma}{\gamma} = -\beta$ et $\frac{P_0}{P_1} = \frac{1}{a}$ d'où finalement $T_B = T_0\frac{1}{a^{-\beta}} = T_0 a^\beta$
   L'application numérique donne $T_B = 448\,\mathrm{K}$.
   De même, on applique la loi de Laplace à la transformation CD adiabatique réversible et il vient :

$$P_0^{1-\gamma}T_D^\gamma = P_1^{1-\gamma}T_1^\gamma \Rightarrow T_D = T_1\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_D = T_1 a^{-\beta}$$

   L'application numérique donne $T_D = 188\,\mathrm{K}$.

---

3. *Déterminer les signes des transferts thermiques des différentes étapes du cycle. Quel est le rôle d'une pompe à chaleur ?*

Réponse :
On a $Q_{AB} = 0$ (transformation adiabatique). De même $Q_{CD} = 0$.
La transformation BC se fait à la pression constante P_1, on a :

$$\begin{aligned} Q_{BC} &= \Delta U_{BC} - W_{BC} \\ &= C_V(T_C - T_B) - [-P_1(V_C - V_B)] \\ &= C_V(T_C - T_B) + (nRT_C - nRT_B) \\ \Rightarrow & \boxed{Q_{BC} = (C_V + nR)(T_C - T_B)} \end{aligned}$$

On retrouve la forme du premier principe pour une transformation monoabre (en effet, elle est isobare donc monobare) : $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P(T_C - T_B) < 0$
Le transfert Q_{BC} est négatif donc le fluide fournit effectivement de la chaleur durant cette étape.
De même, la transformation Q_{DA} se fait de façon monobare d'où $Q_{DA} = C_P(T_A - T_D) > 0$
Le transfert thermique Q_{DA} est positif donc le fluide reçoit effectivement de la chaleur durant cette étape.
Le rôle d'une pompe à chaleur est d'extraire du transfert thermique de la source froide pour en fournir à la source chaude ce qui est bien le cas ici.

---

4. *Montrer que $Q_{BC} = C_P(T_1 - T_0 a^\beta)$ et $Q_{DA} = C_P(T_0 - T_1 a^{-\beta})$.*

Réponse :
On obtient les résultats souhaité en remplaçant T_C, T_B et T_D par leurs expressions respectives.

---

5. *Déterminer l'efficacité e et montrer qu'elle s'exprime uniquement en fonction de a et β. Effectuez ensuite l'application numérique.*

Réponse :
D'après le fonctionnement de la pompe à chaleur, on a

$$e = \frac{|Q_c|}{|W|} = -\frac{Q_{BC}}{W}$$

Or, $\Delta U = Q_{BC} + Q_{DA} + W = 0 \Leftrightarrow W = -Q_{DA} - Q_{BC}$ d'où

$$e = -\frac{Q_{BC}}{-Q_{DA} - Q_{BC}} = \frac{Q_{BC}}{Q_{DA} + Q_{BC}}$$

On injecte les expressions obtenues précédemment :

$$\begin{aligned} e &= \frac{C_P(T_1 - T_0 a^\beta)}{C_P(T_0 - T_1 a^{-\beta}) + C_P(T_1 - T_0 a^\beta)} \\ &= \frac{T_1 - T_0 a^\beta}{T_0 - T_1 a^{-\beta} + T_1 - T_0 a^\beta} = \frac{T_1 - T_0 a^\beta}{(T_0 a^\beta - T_1) a^{-\beta} + T_1 - T_0 a^\beta} \\ \Rightarrow \quad e &= \frac{1}{1 - a^{-\beta}} \end{aligned}$$

L'application numérique donne $e = 2,71$

---

6. *La pompe à chaleur est utilisée pour chauffer une maison. Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à $\mathcal{P}_Q = 10$ kW, calculez la puissance mécanique du couple compresseur turbine qui permet de maintenir la maison à température constante.*

Réponse :
Pendant un temps dt, on a $-Q_BC = P_Q dt$, on en déduit $dW = (P_q/e)dt$ et :

$$P_{comp} = \frac{dW}{dt} = \frac{P_q}{e} \approx 3{,}7\,\mathrm{kW}$$

II Moteur réel ($\star$)

Un moteur réel fonctionnant entre deux sources de chaleur, l'une à $T_F = 400\,\mathrm{K}$, l'autre à $T_C = 650\,\mathrm{K}$, produit 500 J par cycle pour 1500 J de transfert thermique fourni.

1. *Déterminer son rendement.*

Réponse :
Le rendement est :

$$\boxed{\eta = \frac{|W|}{|Q_C|} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} = 0,33}.$$

---

2. *Quel serait le rendement d'une machine de Carnot fonctionnant entre les deux mêmes sources ? Comparer les deux rendements.*

Réponse :
Le rendement de Carnot est :

$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,38}.$$

Le rendement est inférieur à celui de Carnot, comme attendu.

---

3. *Calculer l'entropie créée par cycle notée $S_{créée}$.*

Réponse :
D'après le sujet et puisque la machine est un moteur ditherme :

$$W = -500\,\mathrm{J} \quad ; \quad Q_C = 1500\,\mathrm{J}.$$

D'après le premier principe appliqué sur un cycle :

$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_F = -W - Q_C = -1000\,\mathrm{J}.$$

D'après le 2$^{\mathrm{e}}$ principe sur un cycle :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{\text{créée}} = \frac{-Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = 0{,}19\,\mathrm{J\,K^{-1}}}.$$

---

4. *Montrer que la différence entre le travail fourni par la machine de Carnot et la machine réelle est égale à $T_F \times S_{créée}$, pour une dépense identique.*

Réponse :
On applique les 2 principes de la thermodynamique sur un cycle pour une machine réelle :

$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0,$$

et pour une machine de Carnot :

$$W_c + Q_C + Q_{F,c} = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_{F,c}}{T_F} = 0,$$

Pour que la comparaison ait un sens, le transfert thermique depuis la source chaude est la même dans ces 2 machines, de même que les températures des 2 thermostats. Par identification :

$$Q_{F,c} = Q_F + T_F S_{\text{créée}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W - T_F S_{\text{créée}} = W_c}.$$

En valeur absolue, le travail échangé par une machine de Carnot est bien supérieur à celui d'un moteur réel, en cohérence avec le rendement supérieur.

III Climatiseur ($\star\star$)

1. *Établir l'expression de l'efficacité d'un climatiseur ditherme (T_a, T_b) réversible en fonction des deux températures T_a et $T_b > T_a$. Pour cela, pensez à réaliser un schéma.*

Réponse :
Le premier principe appliqué au climatiseur indique : $Q_a + Q_b + W = 0$. De même, le second principe (cas réversible) donne : $\frac{Q_a}{T_a} + \frac{Q_b}{T_b} = 0$.
De plus, l'efficacité s'exprime selon $e = \frac{Q_a}{W}$ pour un climatiseur d'où en combinant ces expressions, on obtient :

$$e = \frac{T_a}{T_b - T_a}$$

Cette efficacité sera d'autant plus grande que les températures des sources froides et chaudes sont proches.

Un local de capacité thermique $\mu = m.c = 4.10^3$ kJ.K^{-1}, est initialement à la température de l'air extérieur $T_0 = 305$ K.

Un climatiseur, qui fonctionne de façon cyclique **réversible** ditherme (les deux thermostats étant l'air extérieur et le local), ramène la température du local à 20°C ($T_1 = 293$ K) en $\Delta t = 1$ heure. On suppose de plus que le local est parfaitement calorifugé (pour simplifier) et que sa capacité thermique totale s'écrit $\mu = 4.10^3$ kJ.K^{-1}. On suppose enfin que le local est initialement à la température de l'air extérieur $T_0 = 305$ K.

2. *A quel moment l'efficacité sera-t-elle la plus mauvaise, au début, ou à la fin de la transformation ? Que vaut alors l'efficacité minimale ? Exprimez alors la puissance électrique maximale P_{max} qu'a du recevoir ce climatiseur ? (en considérant que le climatiseur a fonctionné à l'efficacité minimale lors de toute la transformation). Commenter.*

Réponse :
Au début de la transformation, on a les deux températures identiques et donc une efficacité théorique infinie. A la fin de la transformation, on a $T_a = T_1$ et $T_b = T_0$ d'où l'efficacité suivante : $e_{min} = 24,4$. On peut appliquer le premier principe au local (et non au climatiseur), en supposant que le refroidissement est du au seul climatiseur et que donc le travail est nul :

$$\Delta U = W + Q_{\text{clim}\to\text{local}} = Q_{\text{clim}\to\text{local}} = -P_{max} e_{min} \Delta t$$

Le - vient du fait que l'on s'intéresse au système local et non au climatiseur qui reçoit effectivement la puissance P_{max}. On sait de plus que $\Delta U = \mu(T_1 - T_0)$. On en déduit

$$P_{max} = \frac{\mu}{e_{min}\Delta t}(T_1 - T_0) \approx 550\ W$$

S'étant basé sur l'efficacité minimale, on surestime la puissance nécessaire pour refroidir le local. Néanmoins, l'efficacité obtenue est également très largement surestimée. En pratique, un climatiseur a une efficacité dépassant rarement 4 ! Et la quantité d'énergie électrique nécessaire peut être 5 à 6 fois supérieure à ce que l'on estime ici.

---

3. *On se propose maintenant de trouver la valeur exacte de la puissance électrique nécessaire. Pour cela, on suppose que la température (T) évolue de manière quasi-statique dans le local. Établissez alors l'équation de son évolution temporelle :*

$$\mu\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -P\frac{T}{T_0 - T}$$

*où P représente la puissance électrique **constante** fournie au climatiseur.*

Réponse :
On applique le premier principe sur le local entre les instants t et $t + dt$:

$$\mathrm{d}U = \mu \mathrm{d}T = Q_{\text{clim}\to\text{local}} = -Pe(T)\,\mathrm{d}t$$

Avec $e(T)$, l'efficacité du climatiseur en fonction de la température de la pièce $T(t)$ et de la température extérieure T_0 : $e(T) = T/(T_0 - T)$. On obtient finalement le résultat attendu :

$$\boxed{\mu\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -P\frac{T}{T_0 - T}}$$

---

4. *Intégrez cette équations entre les instant initial et final à l'aide de la méthode de séparation des variables. Déduisez-en l'expression ainsi que la valeur de P et commentez.*

Réponse :
On transforme cette équation pour isoler la température d'un côté et le temps de l'autre :

$$\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = -\frac{P}{\mu}\mathrm{d}t$$

A l'instant initial ($t_i = 0$), on a $T(0) = T_0$ et à l'instant final $t_f = \Delta t$, on à $T(\Delta t) = T_1$ et l'on obtient :

$$\int_{T_0}^{T_1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)\mathrm{d}T = -\int_0^{\Delta t}\frac{P}{\mu}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - (T_1 - T_0) = -\frac{P}{\mu}\Delta t$$

$$\Rightarrow P = \frac{\mu}{\Delta t}\left(T_1 - T_0(1 + \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right))\right)$$

On obtient finalement $\boxed{P \approx 269\ W}$. La puissance nécessaire est donc bien inférieure à la puissance maximale obtenue dans la première partie de l'exercice.

IV Cycle de Beau de Rochas (⋆⋆)

— Le moteur est composé d'un ou plusieurs cylindres. Chaque cylindre contient un piston mobile, lié à une bielle, elle-même liée à un vilebrequin, dans le but de transformer le mouvement alternatif de translation du piston en mouvement de rotation du vilebrequin ou "axe moteur".
Un mélange réactif gazeux entre en combustion à l'intérieur du cylindre délimité par le piston. Ce mélange réactif est introduit par un orifice fermable par une soupape dite d'admission, et les produits de la combustion sont évacués du cylindre par un orifice fermable par une soupape dite d'échappement.

— Nous allons étudier l'évolution de la pression dans le cylindre (cycle thermodynamique de Beau de Rochas)

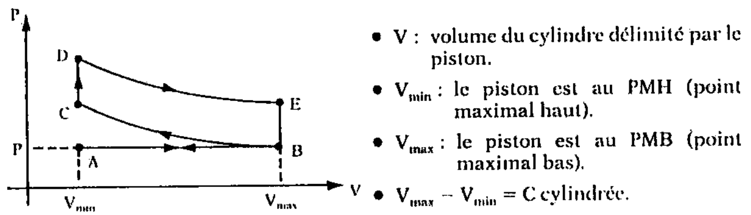


Figure 2

— 1er temps :
$A \rightarrow B$: On aspire à $P_B = 1$ bar et $T_B = 20°$C un mélange air + essence gazeux, considéré comme un gaz parfait et dans les conditions stoechiométriques de la combustion : **ADMISSION**.

— 2ème temps :
$B \to C$: Compression adiabatique réversible du mélange : **COMPRESSION**.

— 3ème temps :
$C \to D$: Combustion apportant à volume constant la quantité de chaleur Q_V : **COMBUSTION**.
$D \to E$: **DETENTE** adiabatique réversible des gaz de combustion.

— 4ème temps : $E \to B$: La pression chute à cause de l'ouverture du cylindre vers l'extérieur. $B \to A$: On refoule les gaz vers l'extérieur : **ECHAPPEMENT**.

On admettra que le cycle $BCDE$ se fait avec un nombre de mole de gaz n constant introduit lors de l'admission, gaz assimilé à un gaz parfait avec $\gamma =$ Cte. On pose $\frac{V_{max}}{V_{min}} = \tau$ (taux de compression).

1. *Définissez et calculez le rendement ρ du cycle.*
Application numérique : $\gamma = 1,4$, prendre $\tau = 8$ puis 10 et calculer ρ. Commentez.

Réponse :
$\rho = \left|\frac{W}{Q_c}\right| = \frac{Q_c+Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$. Il reste maintenant à déterminer ces transferts thermiques. On remarque que $Q_f = Q_{EB}$ (contact avec l'air extérieur froid) et $Q_c = Q_{CD}$ (combustion). Ces transformations étant isochore, on peut utiliser le premier principe :

$$\Delta U = \underbrace{W}_{=0} + Q \Rightarrow Q_{CD} = C_v(T_D - T_C) \text{ et } Q_{EB} = C_v(T_B - T_E)$$

Il convient alors d'exprimer ces différentes températures en fonction des données du problème. On peu utiliser pour cela la loi de Laplace entre les variables T et V : $TV^{\gamma-1} = Cste$.
On en déduit $T_C = T_B\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma-1}$ puis $T_D = T_E\left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma-1}$. On en déduit au final :

$$\rho = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C} = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_E - T_D}\tau^{\gamma-1} = 1 - \tau^{\gamma-1}$$

On trouve $\rho = 56,5$ % puis 60 %. Le rendement augmente si τ augmente mais risque d'auto allumage.

---

2. *En fait on doit prendre $\gamma = 1,34$. Suggérez une justification.*

Réponse :
γ plus faible si gaz plus complexe (air + carburant).

---

3. *Le mélange air + essence s'enflamme spontanément à $T_{aa} = 330°\,C$, ce que l'on souhaite éviter. Calculez le taux de compression τ maximal permettant d'éviter cet "auto-allumage" entre B et C.*
Application numérique : on prendra $\gamma = 1,34$.
Calculez le rendement maximal du cycle dans ces conditions

Réponse :
$T_C = T_B\tau^{\gamma-1} < T_{aa} \iff \tau < 8,35$ et $\rho_m = 51,4$ %.

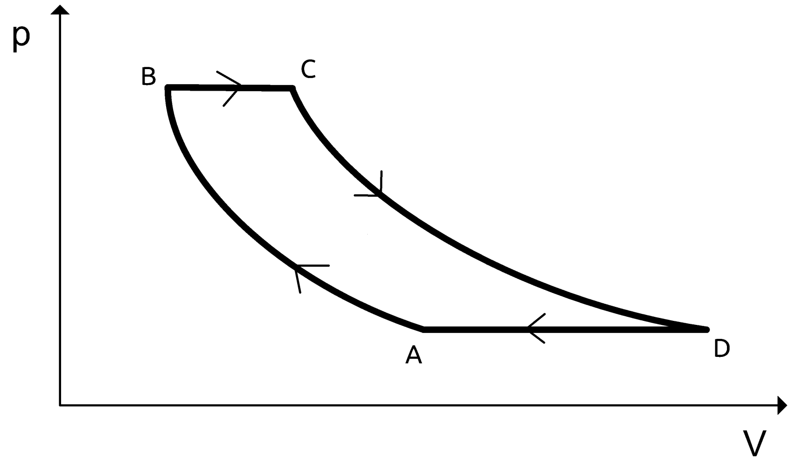
V Cycle de Joule (⋆⋆)

Une mole de gaz parfait diatomique décrit un cycle moteur dit de Joule constitué par :
— deux adiabatiques réversibles AB et CD,
— deux isobares BC et DA.

Données. $A(P_0 = 1\,\text{bar}, T_0 = 280\,\text{K})$, $B(P_1 = 10\,\text{bar}, T1)$, $C(P_1, T_2 = 1000\,\text{K})$, $D(P_0, T_3)$.

1. *Tracer l'allure du cycle dans le plan (P, v)*

Réponse :
Dans le diagramme de Watt, les transformations isobares sont des segments horizontaux et les adiabatiques réversibles sont des courbes $P \propto 1/V^\gamma$ (d'après la loi de Laplace). Pour un cycle moteur, l'aire du cycle doit être positif pour que le travail reçu soit négatif.



2. *Calculer T_1 et T_3.*

Réponse :
Le système considéré est un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique et réversible lors des transformations AB et CD, donc on peut appliquer la loi de Laplace au cours de ces 2 transformations :

$$T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 540\,\mathrm{K}}.$$

On rappelle que pour un gaz parfait diatomique : $\gamma = 7/5$. De même !

$$\boxed{T_3 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 518\,\mathrm{K}}.$$

3. *Exprimer le rendement de ce moteur en fonction de $a = P_1/P_0$ et γ. Calculer sa valeur.*

Réponse :
Le rendement du moteur est :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} \quad ; \quad Q_c = Q_{BC}.$$

Si on applique le premier principe de la thermodynamique sur un cycle :

$$W = -Q_{BC} - Q_{DA} \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}.$$

On applique maintenant le premier principe de la thermodynamique lors des transformations BC et DA :

$$\Delta_{BC}U = W_{BC} + Q_{BC} \quad ; \quad \Delta_{DA}U = W_{DA} + Q_{DA}.$$

Puisque le système d'étude est un gaz parfait diatomique :

$$\Delta_{BC}U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) \quad ; \quad \Delta_{DA}U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D).$$

Puisque ces 2 transformations sont isobares (et que le système est un gaz parfait) :

$$W_{BC} = P_1(V_C - V_B) = nR(T_C - T_B) \quad ; \quad W_{DA} = P_0(V_A - V_D) = nR(T_A - T_D).$$

On obtient :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D) - nR(T_A - T_D)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) - nR(T_C - T_B)} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{T_0 - T_2\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_2 - T_0\alpha^{-(1-\gamma)/\gamma}} = \boxed{-\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}.$$

Finalement, le rendement est :

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma} = 0,48}.$$

Éléments de réponses :

E1 Q2 : On a $T_D = T_1 a^{-\beta}$ *et* $T_B = T_0\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

E3 Q2 : $p_{max} = \mu\dfrac{T_1 - T_0}{e_{min}\Delta t}$

E3 Q4 : $P = \frac{\mu}{\Delta t}\left(T_1 - T_0(1 + \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right))\right)$

E5 Q3 : $\eta = 1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma}$