

TD 23 | T3- Second principe de la thermodynamique

	I	II	III	IV	V
Appliquer le second principe	✓	✓	✓	✓	✓
Gerer des calculs			✓	✓	✓
Faire preuve de sens physique			✓		
Appliquer le premier principe	✓	✓	✓	✓	✓
Modeliser une compression			✓		✓
Appliquer une équation d'état		✓	✓		✓
Appliquer la loi de Laplace	✓		✓		✓

I Lois de Laplace (★)

On admet que dans le cas d'une transformation adiabatique reversible, on a

$$PV^\gamma = Cste$$

1. Obtenir l'expression de la loi de Laplace pour les variables P et T .

Réponse :

c.f. cours

2. Obtenir l'expression de la loi de Laplace pour les variables V et T .

Réponse :

c.f. cours

3. (★★) Démontrer l'une des lois de Laplace, pour une transformation adiabatique et quasi-statique (donc réversible) pour un gaz parfait, sans utiliser la notion d'entropie. On pourra pour cela utiliser la version différentielle du premier principe.

Réponse :

On applique le premier principe sous sa forme différentielle à un gaz parfait : $dU = \Delta W + \delta Q$ or $\Delta Q = 0$ (adiabatique) et $\delta W = -P_e dV = -PdV$ (quasi-statique). On en déduit à l'aide de la formule de calcul direct :

$$C_V dT = -PdV = -\frac{nRT}{V} dV \Rightarrow C_V \frac{dT}{T} = -nR \frac{dV}{V}$$

On intègre alors cette relation entre un état initial et un état final :

$$C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = -nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \Rightarrow T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

En effet, on a $C_V/(nR) = 1/(\gamma - 1)$ et on obtient bien le résultat attendu.

II Bilan entropique (★)

Un cylindre, thermodynamiquement isolé, de volume total $2V_0 = 20$ L, est séparé en deux compartiments par une paroi escamotable.

À l'état initial, chaque compartiment a un volume V_0 et la même température $T_0 = 300$ K. L'un des compartiments contient de l'hélium sous une pression $P_1 = 10$ atm, l'autre contient de l'argon sous une pression $P_2 = 20$ atm. Les deux gaz sont assimilables à des gaz parfaits de même capacité molaire à volume constant $C_{v,m}$.

On enlève la paroi. Les deux gaz se mélangent jusqu'à uniformisation de la température et de la pression.

1. Montrer que la température finale T_f est égale à la température initiale T_0 .

Réponse :

On note Σ_1 le système constitué de l'hélium gazeux, Σ_2 celui constitué de l'argon gazeux, et $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

D'après l'extensivité de l'énergie interne $\Delta U(\Sigma) = \Delta U(\Sigma_1) + \Delta U(\Sigma_2)$.

Or $\Delta U(\Sigma_1) = C_{v1}(T_f - T_0)$ et $\Delta U(\Sigma_2) = C_{v2}(T_f - T_0)$ car ce sont des gaz parfaits.

Donc $\Delta U(\Sigma) = (C_{v1} + C_{v2})(T_f - T_0)$.

Le système Σ étant isolé ($Q = 0$ et $W = 0$), d'après le premier principe, $\Delta U(\Sigma) = 0$.

On en déduit alors que $T_f = T_0$.

2. Déterminer la pression finale P_f du système global, puis les pressions partielles $P_{f,He}$ et $P_{f,Ar}$.

Réponse :

On applique l'équation d'état des gaz parfaits

$$\text{EI à } \Sigma_1 : n_{He} = \frac{V_0 P_1}{RT_0}$$

$$\text{EF à } \Sigma_1 : P_{f,He} = \frac{n_{He} R T_0}{2V_0} = \frac{P_1}{2}$$

$$\text{EI à } \Sigma_2 : n_{\text{Ar}} = \frac{V_0 P_2}{RT_0}$$

$$\text{EF à } \Sigma_2 : P_{f,\text{Ar}} = \frac{n_{\text{Ar}} RT_0}{2V_0} = \frac{P_2}{2}$$

$$\text{On en déduit } P_f = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

3. Exprimer la variation d'entropie ΔS_{He} du système constitué uniquement de l'hélium.

Réponse :

$$\Delta S_{\text{He}} = \frac{P_1 V_0}{T_0} \ln(2)$$

4. Exprimer, puis calculer, la variation d'entropie ΔS du système global. Conclure. Préciser les sources éventuelles d'irréversibilité.

Réponse :

$$\Delta S_{\text{Ar}} = \frac{P_2 V_0}{T_0} \ln(2)$$

$$\text{l'entropie est extensive, donc } \Delta S = \frac{(P_2 + P_1)V_0}{T_0} \ln(2)$$

On rappelle l'entropie molaire S_m pour :

— un gaz parfait de capacité thermique molaire $C_{v,m}$ à volume constant et $C_{p,m}$ à pression constante :

$$S_m(T, V) = C_{v,m} \ln(T) + R \ln(V) + cste \quad \text{ou} \quad S_m(T, P) = C_{p,m} \ln(T) - R \ln(P) + cste$$

— un corps condensé incompressible et indilatable de capacité thermique molaire C_m :

$$S_m(T) = C_m \ln(T) + cste$$

III Évolutions adiabatiques (★★)

Un cylindre parfaitement calorifugé, muni d'un piston mobile sans frottement, également calorifugé, contient un gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma = 1,4$.

Initialement, la pression du gaz à l'intérieur du cylindre est $P = 0,5$ bar. La pression extérieure est $P_{ext} = 2P = 1$ bar, $T = 298$ K et $V = 1$ L.

1. On amène le gaz de façon réversible à la pression $P' = P_{ext} = 2P$. Calculez le volume V' et la température T' à l'état final.

Réponse :

La transformation est adiabatique et réversible, elle est donc isentropique et on peut utiliser les lois de Laplace :

$$p'V'^{\gamma} = pV^{\gamma} \Rightarrow 2pV'^{\gamma} = pV^{\gamma} \Rightarrow V' = \frac{V}{2^{1/\gamma}}$$

L'application numérique donne $V' = 0,61$ L.

On peut calculer T' à l'aide de la loi des gaz parfaits ou bien à l'aide d'une des lois de Laplace.

On obtient :

$$p'V' = nRT' \Rightarrow 2p \frac{V}{2^{1/\gamma}} = nRT' \Rightarrow 2^{1-1/\gamma} nRT = nRT' \Rightarrow T' = 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T$$

L'application numérique donne $T' = 363$ K.

2. Calculez alors la création d'entropie.

Réponse :

$S_c = 0$ car la transformation est réversible.

3. (★★★) En partant du même état initial que précédemment, on abandonne le piston et on laisse l'équilibre s'établir. Calculez le volume V'' et la température T'' à l'état final.

Réponse :

On ne peut plus appliquer la loi de Laplace car la transformation est brutale et donc non réversible.

La transformation est adiabatique à la pression extérieure (constante) $P_{ext} = 2p$. D'après le premier principe : $\Delta U = W + Q = W$ avec $W = -\int p_e dV = -p_e(V'' - V) = -2p(V'' - V)$ et $\Delta U = C_V(T'' - T) = \frac{nR}{\gamma-1}(T'' - T)$

Or, d'après la loi des gaz parfaits, on a $nRT'' = p''V'' = 2pV''$ (état final) et $nRT = pV$ (état initial), d'où, en combinant ces équations :

$$nR(T'' - T) = p(2V'' - V) \Rightarrow \Delta U = -2p(V'' - V) = \frac{1}{\gamma-1} p(2V'' - V)$$

$$\Rightarrow (2\gamma - 2 + 1)V = (2\gamma - 2 + 2)V'' \Rightarrow V'' = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} V$$

L'application numérique donne $V'' = 0,64 \text{ L}$.

On déduit ensuite T'' de la loi des gaz parfaits :

$$T'' = \frac{2pV''}{nR} = \frac{2p \frac{2\gamma-1}{2\gamma} V}{nR} = \frac{2\gamma-1}{\gamma} \frac{pV}{nR} \Rightarrow T'' = \frac{2\gamma-1}{\gamma} T$$

L'application numérique donne $T'' = 383 \text{ K}$.

4. Calculez la nouvelle création d'entropie et comparez avec le résultat précédent en effectuant les A.N.s.

Réponse :

La transformation est adiabatique, on a donc $S_e = 0$

Par ailleurs, on a

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T''}{T}\right) + nR \ln\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\frac{2\gamma-1}{\gamma} + nR \ln\frac{2\gamma-1}{2\gamma}$$

D'après le second principe, $\Delta S = S_e + S_c = S_c$. Comme de plus $nR = \frac{pV}{T}$, on a

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{pV}{T} \left(\frac{1}{\gamma-1} \ln\frac{2\gamma-1}{\gamma} + \ln\frac{2\gamma-1}{2\gamma} \right) = \frac{pV}{T} \left(\frac{1}{\gamma-1} \ln\frac{2\gamma-1}{\gamma} + \ln\frac{2\gamma-1}{\gamma} - \ln 2 \right) \\ &= \frac{pV}{T} \left[\ln\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) - \ln 2 \right] \end{aligned}$$

L'application numérique donne $S_c = 0,030 \text{ J K}^{-1}$.

La transformation est donc irréversible, ce à quoi on pouvait s'attendre puisqu'il s'agit d'une transformation brusque.

IV Cuisson des frites (★★)

On plonge 300 g de frites (de pommes de terre ou de plantains selon les goûts) à température $T_{F0} = 0 \text{ °C}$ dans un bain d'huile de 2,00 L à la température initiale $T_{H0} = 180 \text{ °C}$.

Données. $c_{\text{huile}} = 4,80 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $c_{\text{frite}} \approx c_{\text{eau}} = 4,20 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $\rho_{\text{huile}} = 920 \text{ g/L}$.

Dans un premier temps, la température de l'ensemble s'homogénéise jusqu'à la valeur T_1 .

On néglige les transferts thermiques avec l'extérieur durant cette transformation.

1. Déterminer l'expression de T_1 et effectuer l'application numérique.

Réponse :

On considère {frites + huile}, considéré comme un système isolé. On appelle 0 l'état initial et 1 le premier état d'équilibre proposés par l'exercice. Puisque le système est isolé, d'après le premier principe de la thermodynamique, son énergie interne ne varie pas :

$$\Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = 0.$$

L'énergie interne est une grandeur extensive (on dit aussi additive), donc :

$$\Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = \Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{frites}\}) + \Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{huile}\}).$$

Les frites et l'huile sont des phases condensées indilatables et incompressibles (dont les capacités thermiques ne dépendent pas de la température), donc :

$$\begin{aligned} \Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{frites}\}) &= m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} (T_1 - T_{F0}) \\ \Delta_{0 \rightarrow 1} U(\{\text{huile}\}) &= m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} (T_1 - T_{H0}). \end{aligned}$$

On a donc :

$$m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} (T_1 - T_{F0}) + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} (T_1 - T_{H0}) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$T_1 = \frac{m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} T_{F0} + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} T_{H0}}{m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}}} = 430 \text{ K} = 158 \text{ °C}.$$

Avec :

$$m_{\text{huile}} = \rho_{\text{huile}} V_{\text{huile}} = 1,84 \text{ kg}.$$

2. Déterminer et calculer l'entropie créée durant cette étape.

Réponse :

L'entropie étant une grandeur extensive (additive), la variation d'entropie de l'ensemble {frites + huile} est la somme des variations d'entropie des 2 sous-parties :

$$\Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = \Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{frites}\}) + \Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{huile}\}).$$

Les frites et l'huile sont des phases condensées indilatables et incompressibles, donc d'après le cours :

$$\Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{frites}\}) = m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} \ln\left(\frac{T_1}{T_{F0}}\right) \quad ; \quad \Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{huile}\}) = m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} \ln\left(\frac{T_1}{T_{H0}}\right).$$

Finalement, la variation d'entropie du système {frites + huile} est :

$$\Delta_{0 \rightarrow 1} S(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} \ln \left(\frac{T_1}{T_{F0}} \right) + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} \ln \left(\frac{T_1}{T_{H0}} \right).$$

Puisque le système {frites + huile} est isolé, alors il ne reçoit pas de transfert thermique de l'extérieur : la quantité d'entropie échangée lors de cette transformation entre le système {frites + huile} et l'extérieur est nul. On en déduit, d'après le second principe de la thermodynamique que :

$$S_{\text{créée}} = m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} \ln \left(\frac{T_1}{T_{F0}} \right) + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} \ln \left(\frac{T_1}{T_{H0}} \right) = 125 \text{ J K}^{-1}.$$

Comme attendu, l'entropie créée durant cette étape est positive car cette transformation est irréversible.

Afin d'assurer la cuisson, la résistance électrique de la friteuse se remet à chauffer avec une puissance $P = 1500 \text{ W}$, elle s'éteint dès que la température atteint T_{H0} . On suppose que la température de la résistance est égale à celle de l'huile T_{H0} .

3. Déterminer la capacité thermique de l'ensemble {huile + frites}.

Réponse :

Puisque la capacité thermique est une grandeur extensive, la capacité thermique de l'ensemble {frites + huile} notée C_{HF} est :

$$C_{HF} = m_{\text{frite}} c_{\text{frite}} + m_{\text{huile}} c_{\text{huile}} = 1,0 \times 10^4 \text{ J K}^{-1} = 10 \text{ kJ K}^{-1}.$$

4. Combien de temps la friteuse va-t-elle rester allumée ?

Réponse :

On note 2 l'état d'équilibre final et on applique le premier principe de la thermodynamique à l'ensemble {frites + huile} lors de la transformation entre l'état 1 et l'état 2 :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} U(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = Q,$$

où Q est le transfert thermique reçu par le système (et donc fourni par la résistance). Puisque la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est P , alors le transfert thermique lors du chauffage d'une durée T est :

$$Q = P \Delta t.$$

On remarque que Q est bien positif : en effet, le système d'étude reçoit effectivement de l'énergie sous forme de transfert thermique. Enfin, le système {frites + huile} étant une phase condensée, il suit la première loi de Joule donc :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} U(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = C_{HF} (T_{H0} - T_1).$$

Finalement :

$$\Delta T = \frac{C_{HF} (T_{H0} - T_1)}{P} = 151 \text{ s} = 2,5 \text{ min}.$$

5. Déterminer et calculer l'entropie créée durant cette étape.

Réponse :

Puisque le système {frites + huile} est une phase condensée :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} S(\{\text{frites} + \text{huile}\}) = C_{HF} \ln \left(\frac{T_{H0}}{T_1} \right).$$

Le système {frites + huile} échange une quantité d'entropie avec la résistance :

$$S_{\text{ech}} = \frac{Q}{T_{H0}} = \frac{C_{HF} (T_{H0} - T_1)}{T_{H0}}.$$

D'après le second principe de la thermodynamique appliqué lors de la transformation entre les états 1 et 2 :

$$S_{\text{créée}} = \Delta_{1 \rightarrow 2} S(\{\text{frites} + \text{huile}\}) - S_{\text{ech}}.$$

On trouve alors :

$$S_{\text{créée}} = C_{HF} \ln \left(\frac{T_{H0}}{T_1} \right) - \frac{C_{HF} (T_{H0} - T_1)}{T_{H0}} = 13 \text{ J K}^{-1}.$$

L'entropie créée est positive : la transformation est irréversible à cause d'une irréversibilité thermique : la résistance qui est en contact avec le système peut être considérée comme un thermostat car sa température ne change pas et le système a toujours une température différente de celle de ce thermostat (sauf au moment de l'état final).

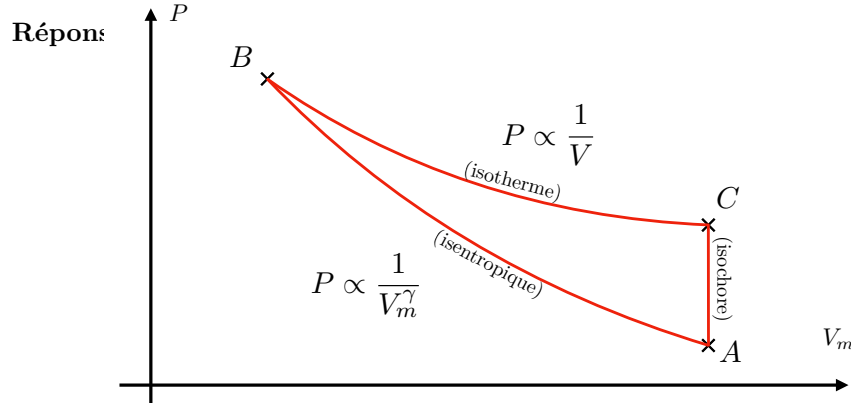
V Etude d'un cycle thermodynamique (***)

Un gaz parfait de quantité de matière constante n et caractérisé par un rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ parcourt un cycle constitué des transformations suivantes :

- AB : compression adiabatique réversible
- BC : détente isotherme réversible
- CA : isochore non quasi-statique en contact avec un thermostat à la température extérieure $T_e = T_A$

On donne $P_A = 1,0 \text{ bar}$, $V_A = 500 \text{ cm}^3$, $T_A = 100 \text{ K}$ et $T_B = 300 \text{ K}$.

1. Tracez l'allure de ce cycle dans le diagramme de CLAPEYRON ($P = f(V_m)$). Pour cette question, n'hésitez pas à essayer plusieurs possibilités pour placer les points A, B et C les uns par rapport aux autres. Il conviendra de respecter l'allure des adiabatique réversible ($P \propto 1/V^\gamma$) par rapport aux isothermes ($P \propto 1/V$).



La pente de l'isentropique est plus importante (en valeur absolue) que celle de l'isotherme. On en déduit que C est au dessus de A d'où l'allure du graphique.

2. Calculez P_B , V_B et P_C en fonction de P_A , V_A , T_A , γ et T_B

Réponse :

On a une compression adiabatique réversible \rightarrow On utilise une des lois de Laplace : $T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$ et on en déduit :

$$V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Connaissant le volume et la température, on peut retrouver la pression à l'aide de l'équation du GP :

$$\frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_A V_A}{T_A} \Rightarrow P_B = P_A \frac{V_A T_B}{V_B T_A} = P_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ensuite, le système effectue une détente isotherme réversible, puis une isochore, en en déduit $V_C = V_A$ (cycle). La détente étant isotherme, on a

$$P_C = P_B \frac{V_B}{V_C} = P_B \frac{V_B}{V_A} = P_A \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma-1}} = P_A \frac{T_B}{T_A}$$

A.N. : $V_B \approx 32 \text{ cm}^3$, $P_B = 46,7 \text{ bar}$ et $P_C = 3 \text{ bar}$

3. Pour chaque transformation, calculez la variation d'entropie, l'entropie échangée et l'entropie créée ($S_{c,i}$, $i \in [1, 3]$) par irréversibilité. (exprimez ces quantités en fonction de n , R , γ , T_A et T_B uniquement)

Réponse :

Pour la première transformation, on a une détente adiabatique ($Q = 0$) réversible ($S_c = 0$). Elle est donc isentropique : $\Delta S_{AB} = 0$.

Pour la deuxième transformation, elle est réversible ($S_c = 0$) et isotherme. La variation d'entropie vaut donc :

$$\Delta S_{BC} = nR \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) = nR \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = S_{ech}$$

Pour la dernière transformation, on remarque que l'on termine un cycle :

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 \Rightarrow \Delta S_{CA} = -(\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}) = -\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)$$

Pour trouver l'entropie échangée, il faut connaître le transfert de chaleur lors de la dernière étape.

Cette dernière détente étant isochore, on en déduit d'après le premier principe : $\Delta U_{CA} = Q$ (pas de travail des forces de pression) soit au final $Q = C_v(T_A - T_B)$ (car $T_C = T_B$). Cela permet de calculer l'entropie échangée :

$$S_{ech} = \frac{Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_A} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right)$$

L'entropie créée peut enfin être retrouvée grâce au second principe :

$$S_{c,3} = \Delta S_{CA} - S_{ech} = -\frac{nR}{\gamma-1} \left(\ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + \left(1 - \frac{T_B}{T_A} \right) \right)$$

-
4. En posant $\epsilon = \frac{T_B}{T_A} - 1$, vérifiez que l'entropie créée est positive ou nulle pour chaque étapes.

Réponse :

Pour les deux premières transformations, on a montré que $S_c = 0$. Pour la dernière, et si on pose $\epsilon = T_B/T_A - 1 > 0$, on obtient :

$$S_{c,3}(\epsilon) = \frac{nR}{\gamma - 1}(\epsilon - \ln(1 + \epsilon))$$

Et on vérifie bien que cette quantité reste toujours positive. ($S_c(0) = 0$ et $S'_c(\epsilon) \geq 0$)

Éléments de réponses :

E3 Q3 : On trouve $T'' = \frac{2\gamma-1}{\gamma}T$

E4 Q5 : $C_{HF} \ln\left(\frac{T_{H0}}{T_1}\right) - \frac{C_{HF}(T_{H0}-T_1)}{T_{H0}} \approx 13 \text{ J/K}$

E5 Q2 : On trouve $P_C = P_A \frac{T_B}{T_A}$

E5 Q3 : $S_{c,3}(\epsilon) = \frac{nR}{\gamma-1}(\epsilon - \ln(1 + \epsilon))$