TD 21 | T1- **Equation d'état d'un gaz**

	I	II	III	IV	V	VI
Gerer des calculs						✓
Faire preuve de sens physique					✓	✓
Réaliser un bilan local				✓		
Appliquer une équation d'état	✓	✓	✓		✓	✓
Etudier un équilibre	✓		✓		✓	
tracer une courbe		✓				
Obtenir une équation différentielle				✓		

I Utilisation de l'équation d'état des gaz parfaits ($\star$)

Le gaz de cet exercice se comporte comme le gaz parfait. Une bouteille d'acier munie d'un détendeur, contient dans un volume de 60 l de l'air comprimé sous une pression de 15 bar. En ouvrant le détendeur, à température constante, à la pression atmosphérique, on gonfle un ballon à l'aide de la totalité du gaz contenu dans la bouteille.

1. Quel est le système étudié ? Décrire et qualifier ce système.
2. Décrire l'état d'équilibre final. En particulier que vaut la pression du gaz si on néglige les forces de tension superficielle du ballon ? Que vaut la température de ce gaz à l'état final ?
3. Quel sera le volume du ballon à l'état final d'équilibre ?

II Equation de Van Der Waals ($\star$)

L'équation d'état de Van Der Waals permet de modéliser le comportement d'un gaz réel en prenant notamment en compte le rayon non nul des molécules ainsi qu'une interaction globalement attractive entre ces dernières :

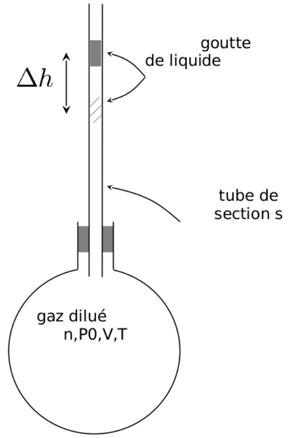
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

où P désigne la pression, T la température et V le volume occupé par une mole du gaz réel. a et b sont deux constantes positives qui ne dépende que du type de molécule. Ce modèle permet notamment d'expliquer le phénomène de transition de phase liquide-gaz qui sera abordé un peu plus tard cette année.

1. Retrouvez l'équation d'état pour n moles de gaz.
2. Dans le cas où $a = 0$, comparez le comportement d'un gaz de Van Der Waals à celui d'un GP. Quel sens physique peut on ainsi donner à b ?
3. Dans le cas où $b = 0$, comparez le comportement d'un gaz de VDW à celui d'un GP. Interprétez ce comportement en introduisant une interaction entre les particules, et en s'intéressant au choc entre une particule et une paroi ?
4. ($\star\star$)Tracez à l'aide d'un programme en python sur le même graphique les courbe $P = f(V)$ pour une mole d'un gaz de Van Der Waals avec, $a = 5\,\mathrm{Pa\,m^6}$ et $b = 6 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3}$ pour $T_1 = 460\,\mathrm{K}$ puis $T_2 = 260\,\mathrm{K}$. Ajoutez y aussi les courbes obtenues avec l'équation du gaz parfait. Commentez.

   Afin de simplifier la visualisation, utiliser une échelle loglog avec un volume variant de $V_{min} = 0{,}22\,\mathrm{L}$ *à* $V_{max} = 220\,\mathrm{L}$

III Thermometre à gaz ($\star$)



On peut mesurer la température à l'aide d'un gaz sous basse pression P_0 qui se comporte alors comme un gaz parfait. On mesure dans le dispositif ci-contre, appelé thermomètre à gaz, la variation de hauteur Δh d'une goutte de liquide dans le tube de section s lorsque la température varie.

1. Décrire le système thermodynamique étudié à l'équilibre. Préciser en particulier ce que l'on sait de la pression et de la température.
2. Exprimer la variation de volume ΔV en fonction de s et Δh.
3. Exprimer la relation entre ΔT et Δh.
4. À 300 K, la goutte est à l'équilibre et la pression dans l'enceinte est 1, 00 bar. Calculer n sachant que $V = 50{,}0\,\mathrm{ml}$.
5. Calculer le diamètre du tube pour que la goutte monte de 1 m lorsque T augmente de 100 K.

IV Effusion d'un gaz ($\star\star$)

Une cabine de navette spatiale (volume $V = 2\,\mathrm{m^3}$) contient N_0 molécules d'air à la température T. A l'instant $t = 0$, une petite météorite perce dans la paroi un petit trou de section $s = 1\,\mu\mathrm{m}^2$ par lequel le gaz peut s'échapper dans le vide.

On supposera que le trou est suffisamment petit peur que la distribution des vitesses des particules dans la navette ne soit pas perturbée. On note $N(t)$ le nombre de molécules présentes à l'intérieur de l'enceinte à l'instant t.

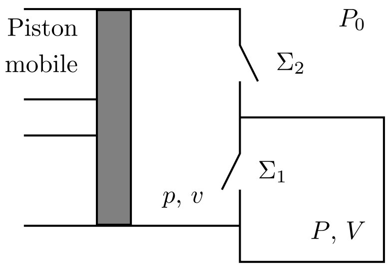
On prendra un modèle dans lequel les molécules se déplacent selon 6 directions, avec des vitesses de même normes (égale à la vitesse quadratique moyenne v^*).

1. Montrez qu'à un instant t, le nombre de molécules sortant de l'enceinte pendant dt s'écrit :
$$\mathrm{d}N_s = \frac{Ns}{6V} v^* \mathrm{d}t$$
2. En déduire une équation différentielle sur $N(t)$, on fera apparaitre un temps caractéristique dont on vérifiera la dimension.
3. En déduire l'expression du nombre de molécule dans l'enceinte à l'instant t.
4. Donnez finalement l'expression de l'instant $t_{1/2}$ au bout duquel la pression dans l'enceinte a diminuée de moitié.

V Pompe à vide (⋆⋆)

On veut vider un réservoir de volume V , initialement rempli d'air (considéré comme un gaz parfait), au moyen d'une pompe. On donne $R = 8{,}31\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$, la constante des gaz parfaits.

La soupape Σ_1 est fermée si la pression p dans le corps de pompe est supérieure à la pression P du réservoir.
La soupape Σ_2 est fermée si la pression p est inférieure à la pression P_0 constante.
Le volume v du corps de pompe est compris entre v_1 (volume résiduel minimal) et v_2 (volume maximal).
On suppose que la température de l'air reste constante et égale à T. La valeur initiale de P est égale à P_0.



1. Au cours du coup de pompe n, le volume v passe de v_1 à v_2, puis de v_2 à v_1. La pression P dans le réservoir passe de P_n à P_{n+1}.
Déterminez la relation de récurrence entre les P_n.

   Faîtes attention à bien décomposer le mouvement du piston en plusieurs étapes d'un cycle pour lesquelles la pression est connue.
2. Déterminez P_{lim}, valeur de P lorsque $n \to +\infty$. Quelle est la signification de cette pression ?

VI Obtention d'une équation d'état (⋆⋆⋆)

On admet que pour un fluide quelconque, les cœfficients thermoélastiques de dilatation isobare α et de compressibilité isotherme χ_T sont reliés par la relation
$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial P}\right)_T \qquad (E)$$

Des mesures montrent que pour une mole de ce gaz, on a :
$$\alpha = \frac{R}{RT + bP} \qquad \text{et} \qquad \chi = \frac{RT}{P(RT + bP)}$$

où R et b sont des constantes.

On rappelle de plus qu'on a par définition
$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad \text{et} \qquad \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

1. Montrer que ces cœfficients obéissent à l'équation (E).
2. Démontrer alors que l'on obtient l'équation d'état pour une mole de ce gaz :
$$p(V - b) = RT$$
On pourra pour cela considérer une transformation isobare, puis une transformation isotherme subie par le système considéré.
3. Justifier physiquement l'origine de la différence entre l'équation d'état obtenue et celle du gaz parfait.

Éléments de réponses :

E3 Q3 : $\Delta T = \frac{sP}{nR} \times \Delta h$
E4 Q4 : On trouve $t_{1/2} = \ln(2)\frac{6V}{sv^*}$
E5 Q1 : $P_{n+1} = \frac{P_n V + P_0 v_1}{v_2 + V}$