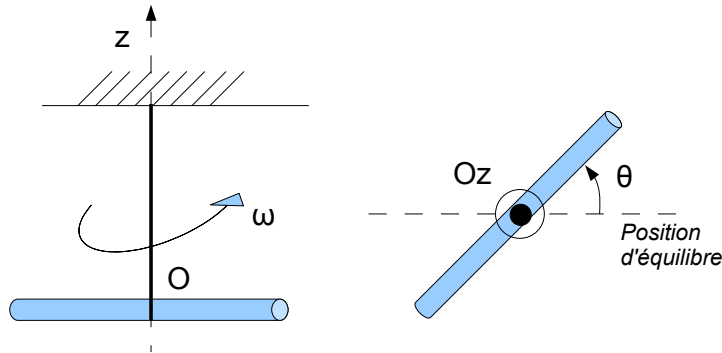


TD 20- Mécanique du solide

	I	II	III	IV	V
Etudier un moment de force			✓	✓	
Etudier un régime permanent					✓
Gerer des calculs				✓	✓
Faire preuve de sens physique	✓		✓		✓
Analyser un schéma	✓	✓	✓		
Appliquer le théorème du moment cinétique	✓	✓			✓
Etudier un équilibre			✓	✓	
Choisir un théorème énergétique	✓	✓			

I Pendule de torsion (★)

On considère une tige homogène de longueur l , de masse m et de moment d'inertie $J_{\Delta} = \frac{ml^2}{12}$ par rapport à l'axe vertical $\Delta = Oz$ accrochée à une ficelle. La position de la tige est repérée par l'angle θ . La ficelle exerce sur la tige une couple de torsion $C = -C\theta$.



1. Déterminez l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique.

Réponse :

On considère la tige, de moment d'inertie J , dans un référentiel galiléen. L'étude cinématique donne tout simplement $\mathcal{L}_{\Delta} = J_{\Delta}\dot{\theta}$. De plus, la seule action contribuant à la mise en rotation est le couple de torsion mentionné dans l'énoncé. Et effet, ni le poids, ni la tension exercée par le fil sur la tige contribuent à la rotation.

Le théorème scalaire du moment cinétique indique alors

$$J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_{\Delta}}\theta = 0$$

2. En déduire la pulsation des oscillations de la tige.

Réponse :

Il s'agit d'une équation de type oscillateur harmonique. On obtient alors par identification : $\omega_0 = \sqrt{C/J_{\Delta}} = \sqrt{12C/(ml^2)}$

3. Calculez la puissance du couple de torsion et montrer qu'on peut définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. A quel autre interaction physique peut on relier ce cas ?

Réponse :

On a par définition de la puissance $P = -C\dot{\theta}$. Or si l'action est conservative, on a aussi $P = -\frac{dE_p}{dt}$ donc ici, on trouve après primitivation $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$ (on suppose la constante nulle).

Il y a donc un lien avec la force de rappel élastique car les formules d'énergies potentielles se ressemblent !

4. Retrouvez alors l'équation du mouvement à l'aide d'un théorème énergétique.

Réponse :

On peut appliquer le théorème de la puissance mécanique, sachant que $E_c = (1/2)J_{\Delta}(\dot{\theta})^2$:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow J_{\Delta}\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$

et on obtient bien le même résultat qu'en Q1, après simplification par la vitesse angulaire.

II Pendule pesant (★)

Un solide de masse M , de centre de masse G , est mobile sans frottements autour d'un axe horizontal $\Delta = (O, \vec{u}_z)$ par rapport auquel son moment d'inertie est J .

On note a la distance de G à l'axe de rotation. On repère la position du solide à un instant donné par l'angle θ que fait (O, G) avec la verticale du lieu.

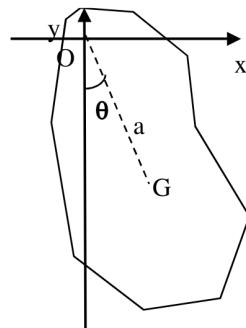


FIGURE 1 – Un pendule pesant.

1. Déterminer l'équation du mouvement en utilisant la loi du moment cinétique.

Réponse :

Le pendule pesant est soumis à deux forces : son poids $\vec{P} = -Mg\vec{u}_y$ qui s'applique au centre de gravité G et l'action mécanique dans la liaison pivot \vec{R} au point O . On applique la loi du moment cinétique scalaire sur l'axe (O, \vec{u}_z) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}).$$

Puisque la force \vec{R} s'applique en O :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0.$$

Le moment du poids par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) est :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -aMg \sin \theta.$$

Pour le montrer, on peut par exemple utiliser la formule du bras de levier : la distance entre la droite qui porte le poids et l'axe de rotation est $a \sin \theta$, la norme du poids est Mg et le poids tend à faire tourner le pendule pesant dans le sens indirect. On trouve alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{aMg}{J} \sin \theta = 0$$

2. Déterminer l'équation du mouvement en utilisant la loi de la puissance cinétique.

Réponse :

Pour un solide en rotation, la loi de la puissance cinétique est :

$$\frac{1}{2} J \frac{d(\omega^2)}{dt} = P(\vec{P}) + P(\vec{R}).$$

La puissance de l'action mécanique dans la liaison pivot est nulle car le point O est fixe dans le référentiel d'étude. La puissance du poids est :

$$P(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v}(G).$$

Or la vitesse du centre de gravité est :

$$\vec{v}(G) = a\omega \vec{u}_\theta.$$

On a alors :

$$P(\vec{P}) = -Mg a \omega \vec{u}_y \cdot \vec{u}_\theta = -Mg a \omega \sin \theta$$

On trouve :

$$\frac{1}{2} J \frac{d(\omega^2)}{dt} = -Mg a \omega \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad J \omega \dot{\omega} = -Mg a \omega \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{J \ddot{\theta} = -Mg a \sin \theta}.$$

On retrouve bien entendu la même équation du mouvement qu'à la question précédente.

3. Déterminer la pulsation des petites oscillations.

Réponse :

Pour des petites oscillations, $\sin \theta \approx \theta$, donc l'équation différentielle du mouvement devient celle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{aMg}{J}.$$

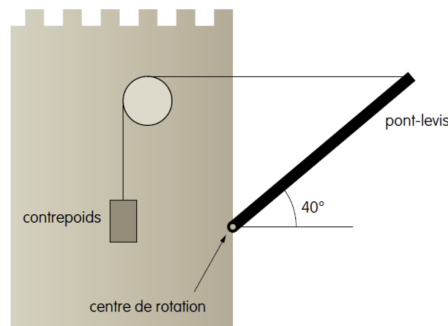
La période des petites oscillation est donc :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{aMg}}}$$

III Equilibre d'un pont levis (★)

Un pont-levis homogène pèse $m = 2$ tonnes et mesure $L = 5$ m de long. Il est maintenu en l'air grâce à une corde et un contrepois.

La poulie, supposée idéale, transmet les tensions. La liaison pivot est supposée parfaite. Le pont forme un angle de $\alpha = 40^\circ$ par rapport à l'horizontale.



1. Quelle est la masse M du contrepois ?

Réponse :

Le moment du poids du pont levis par rapport au centre de rotation O est :

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = -\frac{L}{2}mg \cos \alpha \vec{e}_z,$$

où \vec{e}_z est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du problème et dérivé vers nous. La tension de la corde qui retient le pont levis est $\vec{T} = -Mg\vec{e}_x$ où \vec{e}_x est le vecteur unitaire horizontal dirigé vers la droite. Le moment de cette force par rapport au point O est :

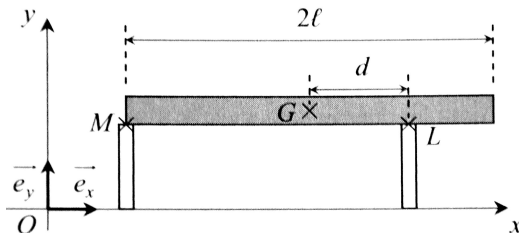
$$\vec{M}_O(\vec{T}) = LMg \sin \alpha \vec{e}_z.$$

Le pont étant en équilibre, la loi du moment cinétique impose que :

$$\vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{P}) = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \cos \alpha = M \sin \alpha \Rightarrow \boxed{M = \frac{m}{2 \tan \alpha} = 1,2 \text{ t}}$$

IV Portage d'une poutre (★★)

Marty et Lisa portent ensemble une poutre de longueur $2l = 4,0$ m et de masse $m = 30$ kg. Marty est à une extrémité M de la poutre tandis que Lisa est au point L à une distance $d = 1,4$ m du milieu de la poutre. Les deux forces qu'ils exercent sont verticales.



1. On suppose tout d'abord que Marty et Lisa ont la même taille, la poutre est donc maintenue horizontale.

(a) Déterminer une équation simple reliant les deux forces $F_M = ||\vec{F}_M||$ et $F_L = ||\vec{F}_L||$ exercées sur la poutre.

Réponse :

On considère la poutre, à l'équilibre, et on étudie les forces extérieures qui s'y applique. Il y a le poids, $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$. Il y a aussi les deux réactions exercées par les porteurs : $\vec{F}_M = F_M \vec{e}_y$ et $\vec{F}_L = F_L \vec{e}_y$.

La poutre étant à l'équilibre, la somme des forces qui s'y appliquent est nulle d'où $-mg + F_M + F_L = 0 \Rightarrow \boxed{F_M + F_L = mg}$.

(b) Déterminer, à l'aide du théorème du moment cinétique scalaire une seconde équation reliant ces forces. On réfléchira bien au choix de l'axe.

Réponse :

Le poids s'applique en G , tandis que les forces des porteurs s'appliquent en M et L . On choisi de calculer les moments par rapport à G afin d'obtenir uniquement une relation entre les forces des porteurs :

- $\vec{M}_G(\vec{F}_M) = \vec{GM} \wedge \vec{F}_M = -l\vec{e}_x \wedge F_M \vec{e}_y = -lF_M \vec{e}_z$
- $\vec{M}_G(\vec{F}_L) = \vec{GL} \wedge \vec{F}_L = d\vec{e}_x \wedge F_L \vec{e}_y = dF_L \vec{e}_z$
- $\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{GG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$

Ainsi, et toujours à l'équilibre, la somme des moments exercés sur la poutre est nulle d'où :

$$\boxed{-lF_M + dF_L = 0}$$

(c) Résoudre le système obtenu et déterminer F_L et F_M .

Réponse :

Il convient alors de combiner les deux équations précédentes, afin d'isoler les

forces. On obtient alors après calculs :

$$F_L = \frac{mgl}{d+l} \quad \text{et} \quad F_M = \frac{mgd}{d+l}$$

Pour $l = d$ (porteurs aux extrémités de la poutre, on obtient bien des forces identiques, ce qui est conforme à l'intuition. De même, si Lisa est au centre ($d = 0$), Marty n'aura plus rien à porter ($F_M = 0$).

2. *En réalité, Lisa est plus grand que Marty, et la poutre fait un angle α avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales. Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.*

Réponse :

L'équation issue du PFD à l'équilibre (1a) reste valide. De plus, les vecteurs \vec{GM} et \vec{GL} sont modifiés. Leurs composantes verticale ne va pas intervenir dans l'expression des moments car les forces sont aussi verticales. De même, leurs composantes horizontales sont modifiées toutes les deux dans les mêmes proportions. Au final, on obtient encore une fois l'équation de la question 1b.

Ainsi, le résultat précédent reste inchangé!

V Volant d'inertie (***)

Dans une machine tournante, la partie mobile nommée rotor possède un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation (fixe). Le rotor est soumis à un couple moteur Γ_0 constant, ainsi qu'à des frottements fluide de moment $\mathcal{M} = -\alpha\omega$ où α est une constante de ω la vitesse angulaire du rotor.

1. *Quel est le signe de α . Justifiez votre réponse.*

Réponse :

La puissance de la force de frottement fluide vaut $P_f = \mathcal{M} \cdot \omega = -\alpha\omega^2$. S'agissant de frottement, la puissance doit être négative donc $\alpha > 0$

2. *Le rotor est initialement immobile. Donnez l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$. On donnera notamment sa vitesse finale ω_f et le temps de relaxation du système τ . Commentez la dépendance de ces résultats par rapport à α .*

Réponse :

On applique le TMC projeté sur l'axe de rotation du système :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - \alpha\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J}$$

On obtient une E.D. linéaire, du premier ordre, non homogène. Le régime permanent vaut (solution particulière) $\omega_f = \Gamma_0/\alpha$ et le temps de relaxation $\tau = J/\alpha$. En effet, plus α augmente, plus la vitesse de rotation en régime permanent sera faible. De la même manière, plus le moment d'inertie J sera élevé, plus le temps de relaxation sera long.

En fait, suite à des vibrations du dispositif, le couple moteur varie selon

$$\Gamma = \Gamma_0(1 + r \cos(\Omega t))$$

où r est liée à l'intensité de la perturbation de Ω sa pulsation. On cherche, après la fin du régime transitoire, une évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$.

3. *De quelle forme doit-on chercher $\omega(t)$?*

Réponse :

On remplace Γ_0 par $\Gamma_0(1 + r \cos(\Omega t))$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J}\omega &= \frac{\Gamma_0}{J}(1 + r \cos(\Omega t)) \\ \Leftrightarrow \tau \frac{d\omega}{dt} + \omega &= \omega_f(1 + r \cos(\Omega t)) \end{aligned}$$

On cherche alors ω sous la forme $\omega_f + \omega_v \cos(\Omega t + \varphi)$. Ici, on va obtenir une perturbation harmonique autour de la vitesse angulaire en régime permanent ω_f .

4. *Déterminez l'expression de $\omega(t)$ en fonction de r , Ω , τ et ω_f .*

Réponse :

On note $x = \omega - \omega_f$ et l'on obtient :

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = \omega_f r \cos(\Omega t)$$

Il s'agit d'une E.D. linéaire avec second membre harmonique. On est donc amené à utiliser la technique des complexes pour la résoudre. On pose $x(t) = \Re(\underline{x}e^{j\Omega t})$ avec $\underline{x}e^{j\Omega t}$ solution de :

$$j\Omega\tau\underline{x}e^{j\Omega t} + \underline{x}e^{j\Omega t} = \omega_f r e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(1 + j\Omega\tau) = \omega_f r \Rightarrow \underline{x} = \frac{\omega_f r}{1 + j\Omega\tau}$$

On obtient finalement :

$$\omega(t) = \omega_f + \Re\left(\frac{\omega_f r}{1 + j\Omega\tau} e^{j\Omega t}\right)$$

$$= \omega_f + \frac{r\omega_f}{\sqrt{1 + (\Omega J/\alpha)^2}} \cos(\Omega t + \varphi)$$

avec $\varphi = -\text{atan}(\Omega\tau)$

5. Expliquez pourquoi, afin de régulariser le fonctionnement du rotor, on lui fixe un anneau de masse assez importante et de grand rayon, appelé volant d'inertie. Quelles sont les limites de cette méthode ?

Réponse :

On observe que la perturbation sera d'autant plus dommageable que la fréquence Ω est basse (comportement type passe-bas) La pulsation de coupure vaut ici $\Omega_c = \alpha/J$ et sera d'autant plus basse que J est élevé. Ajouter un volant d'inertie permet donc d'abaisser la fréquence de coupure et donc de s'affranchir des perturbation. Cependant, cette solution va ralentir l'éventuelle durée du régime transitoire lorsqu'un nouveau couple moyen Γ_0 est appliqué.

Éléments de réponses :

$$E1 Q1 : \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

$$E3 Q1 : M = \frac{m}{2 \tan \alpha}$$

$$E4 Q3 : F_L = \frac{mgl}{d+l}$$

$$E5 Q4 : \omega(t) = \omega_f + \frac{r\omega_f}{\sqrt{1 + (\Omega J/\alpha)^2}} \cos(\Omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi = -\text{atan}(\Omega\tau)$$