TD 19 | M6- **Forces centrales**

	I	II	III	IV	V
Réaliser une approximation		✓			✓
Démontrer un résultat	✓				
utiliser la troisième loi de Kepler	✓			✓	
Analyser la cinématique			✓	✓	✓
Gerer des calculs					✓
Faire preuve de sens physique				✓	
Analyser un schéma		✓		✓	✓
Etudier un équilibre	✓				✓
Choisir un théorème énergétique	✓	✓	✓		✓

I Satellite en orbite ($\star$)

Dans ce problème, on désignera par $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $R_T = 6370\,\mathrm{km}$ respectivement la masse et le rayon de la Terre . On rappelle que la constante de gravitation universelle a pour valeur $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

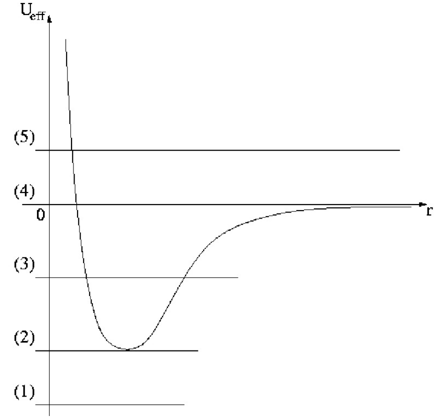
On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel, de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. En l'absence de toute précision explicite, on négligera tout frottement dû à l'atmosphère sur le satellite.

1. Montrez que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimez littéralement la norme de sa vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de G, M_T et R, puis en fonction de g_0, R_T et R, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.
2. Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\,\mathrm{km}$ au-dessus de la Terre. Calculez numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.
3. Etablissez l'expression littérale de la période T du satellite. Retrouvez la 3ème loi de **Képler** et rappelez son énoncé exact. Faîtes l'application numérique. S'agit-il d'un satellite géostationnaire ?
4. La vitesse de libération v_l d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut lui communiquer au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse aller à l'infini (en "se libérant" ainsi de l'attraction terrestre). Exprimez v_l en fonction de G, M_T et R_T (une démonstration rigoureuse est attendue) et calculez sa valeur.

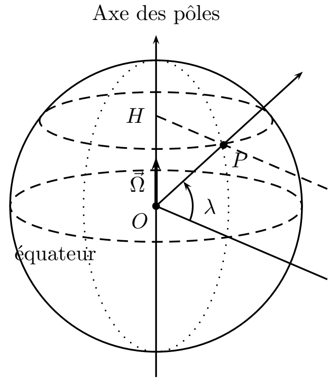
($\star\star$)Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$ dont la courbe représentative est donnée sur la figure ci-après. On a donc

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff(r)} \quad \text{avec } r \text{ la distance du satellite au centre de la Terre.}$$

5. Établissez rigoureusement que le mouvement du satellite est plan.
6. Justifiez le fait que l'énergie mécanique soit une constante du mouvement et déterminer l'expression de $U_{eff}(r)$.
7. Pour chacune des valeurs de E (notées de (1) à (5)) représentées sur la figure précédente, déterminez la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.
   Représentez ces différentes trajectoires en faisant apparaître leurs éventuelles spécificités.



II Satellite et frottements ($\star$)



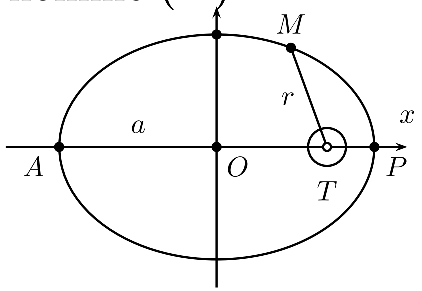
Un satellite M de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre.

On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$ considéré comme galiléen. On note Ω la vitesse angulaire de la Terre dans $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$.

1. Déterminez la vitesse v_0 du satellite, l'énergie potentielle E_{p0}, cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, M_T la masse de la Terre et des données.
2. Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ. Sa vitesse est égale à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T. Déterminez E_{p1}, E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$.
   Où doit-on placer les bases de lancement pour que ΔE soit minimale ?

3. (⋆⋆)On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T, il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1+\alpha t)$ Quel est le signe de α ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire.
   Déterminez en fonction de t, le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.

III Premier vol habité par un homme (⋆⋆)



Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute. Le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse $m = 4725\,\mathrm{kg}$.

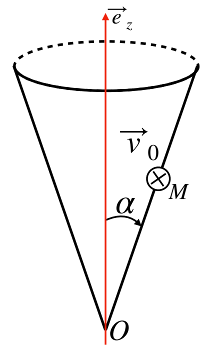
Les altitudes du satellite au périgée P et à l'apogée A étaient $z_P = 180\,\mathrm{km}$ et $z_A = 327\,\mathrm{km}$.

1. Exprimez la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z, de z_P, z_A, M_T, R_T (masse et rayon de la Terre) et de $\mathcal{G}$, la constante de gravitation.
2. Calculez v en P et en A.

IV Troisième loi de KEPLER (⋆⋆)

1. Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon $a = 150 \times 10^6\,\mathrm{km}$ et que la constante de gravitation $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI, calculez la masse du soleil.
2. La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 années, en déduire a' le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars du soleil.
3. La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u a (une unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil).
   Calculez la plus grande distance de cette comète au Soleil et l'excentricité de sa trajectoire.

V Bille dans un cône (⋆⋆⋆)



V.1 Description du mouvement

Une bille supposée ponctuelle (donc de rayon nul) roule sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle α d'axe Oz. La bille est lancée à une altitude h (repérée par rapport au sommet du cône O) avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale.
Dans ce problème, on utilisera les coordonnées cylindriques.

1. Montrer que l'énergie mécanique E_m se conserve.
2. Montrer qu'il en est de même pour le moment cinétique scalaire L_{Oz}.
3. Écrire l'énergie mécanique à un instant quelconque uniquement en fonction de r et $\dot{r}$, m, α, h, g et v_0 (pour obtenir une intégrale première du mouvement.)
4. Montrer que ce problème est équivalent à un problème unidimensionnel pour un système effectif de masse m_{eff}. Quelles sont alors la masse effective m_{eff} ainsi que l'énergie potentielle effective $E_{\text{p,eff}}(r)$?
5. Tracer l'allure de la courbe $r \to E_{\text{p,eff}}(r)$. Montrer ensuite que cette énergie potentielle effective est minimale lorsque :
$$r_{eq} = \left(\frac{h^2 v_0^2}{g}\right)^{1/3} \tan(\alpha)$$
   Puis vérifiez que ce résultat est bien homogène.
6. En déduire une description du mouvement ultérieur de la bille. Peut-elle atteindre le point O ?

V.2 Oscillations autour de la position d'équilibre

7. Déduire des questions précédentes l'équation du mouvement de la bille en fonction de r, g, α et r_{eq}
8. Dans le cas où r reste proche de r_{eq}, comment se simplifie l'équation du mouvement.
   Montrer que l'on obtient de petites oscillations à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_{\text{eq}}}\sin(2\alpha)}$

Éléments de réponses :

E2 Q3 : On trouve $r = \frac{r_0}{1+\alpha t}$
E3 Q2 : on trouve $v_A = v_{\min} \simeq 7{,}7\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ puis $v_P = v_{\max} \simeq 7{,}9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
E4 Q1 : On trouve $M_S \simeq 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
E5 Q4 : $m_{\text{eff}} = m\left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}\right)$