

TD 19 | M6- Forces centrales

	I	II	III	IV	V
Réaliser une approximation		✓			✓
Démontrer un résultat	✓				
utiliser la troisième loi de Kepler	✓			✓	
Analyser la cinématique			✓	✓	✓
Gerer des calculs					✓
Faire preuve de sens physique				✓	
Analyser un schéma		✓		✓	✓
Etudier un équilibre	✓				✓
Choisir un théorème énergétique	✓	✓	✓		✓

I Satellite en orbite (★)

Dans ce problème, on désignera par $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6370$ km respectivement la masse et le rayon de la Terre . On rappelle que la constante de gravitation universelle a pour valeur $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻².

On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel, de masse m , en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. En l'absence de toute précision explicite, on négligera tout frottement dû à l'atmosphère sur le satellite.

1. Montrez que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimez littéralement la norme de sa vitesse v_0 . On exprimera d'abord v_0 en fonction de G , M_T et R , puis en fonction de g_0 , R_T et R , où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.

Réponse :

On étudie le satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La seule force qui s'exerce sur lui est la force de gravitation de la Terre soit

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{R^2} \vec{u}_r$$

Par ailleurs, on suppose la trajectoire du satellite circulaire, on a donc

$$\vec{OM} = R\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Ainsi, le PFD $m\vec{a} = \vec{F}$ projeté respectivement sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ donne

$$-mR\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_T m}{R^2} \Rightarrow R\ddot{\theta} = 0$$

On a donc $\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$.

Ainsi,

$$\|\vec{v}\| = v_0 = R|\dot{\theta}| = \text{cte}$$

Le mouvement de M est donc uniforme. On a ensuite

$$\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{R^3} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{GM_T}{R^3}} \Rightarrow v_0 = R|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

L'intensité du champ de pesanteur terrestre est telle que $\vec{F} = m\vec{g}$.

A la surface de la Terre, on a donc

$$\frac{GM_T m}{R_T^2} = mg_0 \Leftrightarrow g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Finalement, on peut écrire

$$v_0 = \sqrt{g_0 \frac{R_T^2}{R}}$$

2. Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832$ km au-dessus de la Terre. Calculez numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

Réponse :

D'après les données de l'énoncé, on utilise la première expression avec $R = R_T + h$. L'application numérique donne $v_0 = 7,4$ km/s

3. Etablissez l'expression littérale de la période T du satellite. Retrouvez la 3ème loi de **Képler** et rappelez son énoncé exact. Faites l'application numérique. S'agit-il d'un satellite géostationnaire ?

Réponse :

Comme le mouvement est uniforme, on peut écrire :

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM_T}{R}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} \text{ ou bien } \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Il s'agit de la 3ème loi de KÉPLER qui fut d'abord énoncée ainsi dans le cadre du mouvement des planètes autour du soleil : les planètes décrivent des ellipses telles que le rapport de la période au carré sur le demi-grand axe au cube est indépendant de la planète.

L'application numérique donne $T = 6115 \text{ s} = 1 \text{ h}42 \text{ min}$.

Un satellite géostationnaire a la même période que la période de rotation de la Terre, soit environ 24 h. Il ne s'agit donc pas d'un satellite géostationnaire.

4. La vitesse de libération v_l d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut lui communiquer au niveau de la surface de la Terre pour qu'il puisse aller à l'infini (en "se libérant" ainsi de l'attraction terrestre). Exprimez v_l en fonction de G , M_T et R_T (une démonstration rigoureuse est attendue) et calculez sa valeur.

Réponse :

A l'infini, le satellite a une énergie potentielle gravitationnelle nulle. Sachant que l'énergie mécanique du satellite se conserve (il n'est soumis qu'à une force conservative), et que $E_m \geq E_p$, il faut donc qu'initialement l'énergie mécanique soit au moins égale à 0. v_l correspond donc à la situation limite où $E_m = 0$.

Le satellite étant initialement à la surface de la Terre, on a

$$E_m = -\frac{GM_T m}{R_T^2} + \frac{1}{2} m v_l^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} v_l^2 = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

L'application numérique donne $v_l = 11,4 \text{ km/s}$.

(★★) Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$ dont la courbe représentative est donnée sur la figure ci-après. On a donc

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r) \text{ avec } r \text{ la distance du satellite au centre de la Terre.}$$

5. Établissez rigoureusement que le mouvement du satellite est plan.

Réponse :

Conservation du moment cinétique ($\vec{OM} \perp \vec{L}_0$ à chaque instant).

6. Justifiez le fait que l'énergie mécanique soit une constante du mouvement et déterminer l'expression de $U_{eff}(r)$.

Réponse :

absence de forces non conservatives +

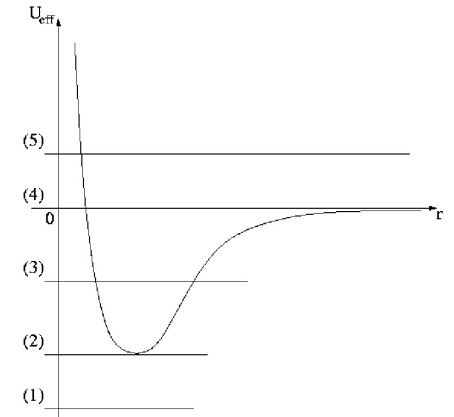
$$U_{eff}(r) = -\frac{GM_T m}{r^2} + \frac{mC^2}{2r^2}$$

7. Pour chacune des valeurs de E (notées de (1) à (5)) représentées sur la figure précédente, déterminez la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.

Représentez ces différentes trajectoires en faisant apparaître leurs éventuelles spécificités.

Réponse :

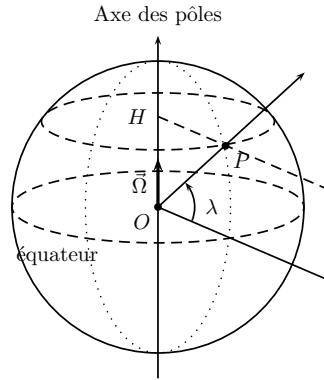
- (1) est impossible, car $E_m \geq U_{eff}(r)$.
- (2) correspond à une trajectoire circulaire car un seul r est autorisé, et la vitesse radiale est toujours nulle.
- (3) correspond à une trajectoire elliptique. En effet, le mouvement de M est compris entre deux rayons extrêmes. Pour ces rayons, la vitesses est purement orthoradiale.
- (4) correspond à une trajectoire parabolique. Lorsque le rayon est minimum, la vitesse est orthoradiale.
- (5) correspond à une branche d'hyperbole s'enroulant autour du point O . Lorsque le rayon est minimum, la vitesse est orthoradiale.



II Satellite et frottements (★)

Un satellite M de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre.

On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{Géo}$ considéré comme galiléen. On note Ω la vitesse angulaire de la Terre dans $\mathcal{R}_{Géo}$.



- Déterminez la vitesse v_0 du satellite, l'énergie potentielle E_{p0} , cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation \mathcal{G} , M_T la masse de la Terre et des données.

Réponse :

On est dans le cas classique d'un mouvement circulaire.

En travaillant dans la base polaire, on a ici $\vec{OM} = r_0 \cdot \vec{e}_r$ d'où $\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ et enfin $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

La seule force appliquée au satellite M est la force de gravitation $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \vec{e}_r$.

Dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, par application du principe fondamental de la dynamique sur M dans la base polaire,

$$m(-r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \vec{e}_r$$

- Par projection selon \vec{e}_θ , on obtient $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r_0 \dot{\theta} = v_0 = Cte$, le mouvement est donc circulaire et uniforme : $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0}$.
- Par projection selon \vec{e}_r , on obtient

$$-mr_0 \dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \Rightarrow r_0 \frac{v_0^2}{r_0^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}$$

On en déduit ensuite son énergie cinétique $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{2r_0}$ et $E_{m0} = E_{c0} + E_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}$ avec $k = \mathcal{G}mM_T$ d'où $E_{m0} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2r_0}$ (on retrouve $E_{m0} = -\frac{k}{2a}$ avec $a = r_0$ car l'état est lié).

- Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ . Sa vitesse est égale à la vitesse d'entraînement \vec{v}_e due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T . Déterminez E_{p1} , E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P . Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$. Où doit-on placer les bases de lancement pour que ΔE soit minimale ?

Réponse :

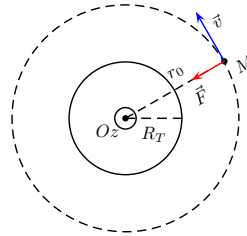
Le satellite étant posé à la surface du globe on a simplement $E_{p1} = -\frac{k}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$. Dans le référentiel géocentrique, il est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon $r_1 = HP = R_T \cos \lambda$ et en notant Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans $\mathcal{R}_{Géo}$ et $v_e = \Omega \cdot r_1 = \Omega \cdot R_T \cos \lambda$.

On en déduit $E_{c1} = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$ et

$$E_{m1} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$$

Pour placer le satellite sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$.

Cette énergie sera minimale quand $\lambda = 0$, c'est à dire sur l'équateur.



- (★★) On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T , il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$. Quel est le signe de α ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire.

Déterminez en fonction de t , le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.

Réponse :

Si l'énergie mécanique de M diminue, $\frac{dE_m}{dt} = E_{m0}\alpha < 0$ or le satellite était (et reste) dans un état lié donc $E_{m0} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$.

Si on considère que la trajectoire reste quasiment circulaire, on peut encore utiliser la relation

$$E_m = -\frac{k}{2r} \Rightarrow E_{m0}(1 + \alpha t) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2r} \Rightarrow r = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2E_{m0}(1 + \alpha t)} = \frac{r_0}{1 + \alpha t}$$

Donc r diminue au cours du temps.

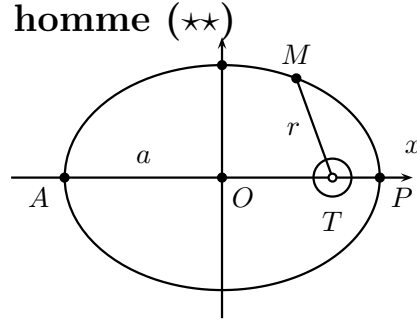
En reprenant le résultat du 1., $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0} (1 + \alpha t)}$ augmente au cours du temps.

Cela provient du fait que $E_m = -E_c \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_m}{dt} > 0$, la force de frottement n'est pas la seule à intervenir

III Premier vol habité par un homme (★★)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute. Le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse $m = 4725$ kg.

Les altitudes du satellite au périégée P et à l'apogée A étaient $z_P = 180$ km et $z_A = 327$ km.



1. Exprimez la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z , de z_P , z_A , M_T , R_T (masse et rayon de la Terre) et de \mathcal{G} , la constante de gravitation.

Réponse :

Comme l'énoncé parle de périégée et d'apogée, on est dans le cas d'un état lié (mouvement elliptique) et la relation $E_m = -\frac{k}{2a}$ s'applique.

En notant $r = TM = z + R_T$ la distance entre le centre de la Terre et l'engin spatial, on a ici

$$2a = r_A + r_P = R_T + z_A + R_T + z_P = 2R_T + z_A + z_P \text{ et } k = \mathcal{G}mM_T \text{ d'où}$$

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2R_T + z_A + z_P} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2\mathcal{G}M_T \left(\frac{1}{z + R_T} - \frac{1}{2R_T + z_A + z_P} \right)}$$

2. Calculez v en P et en A .

Réponse :

Les applications numériques donnent $v_A = v_{\min} \simeq 7,7 \text{ km s}^{-1}$ puis $v_P = v_{\max} \simeq 7,9 \text{ km s}^{-1}$.

IV Troisième loi de KEPLER (★★)

1. Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon $a = 150 \times 10^6$ km et que la constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ SI, calculez la masse du soleil.

Réponse :

Mouvement quasi circulaire de la Terre autour du Soleil

Pour relier M_S à a , \mathcal{G} et des valeurs connues, on peut passer par l'expression de v la vitesse de la Terre sur son orbite.

L'énergie mécanique de la Terre est

$$E_m = -\frac{k}{2a} = E_c + E_p = E_c - \frac{k}{a} \Rightarrow E_c = \frac{\mathcal{G}M_T M_S}{2a} = \frac{1}{2}M_T v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{\mathcal{G}M_S}{a}$$

Le mouvement étant circulaire et uniforme, on a également

$$v = \frac{2\pi a}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_S}{a} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}T^2}$$

Où T est la période de révolution de la Terre autour du Soleil : $T \simeq 365,25 \times 24 \times 3600$ secondes.

L'application numérique donne $M_S \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

2. La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 années, en déduire a' le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars du soleil.

Réponse :

Par utilisation de la Troisième loi de Kepler,

$$\left[\frac{T^2}{a^3} \right]_{\text{Terre}} = \left[\frac{T^2}{a^3} \right]_{\text{Mars}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3} \Rightarrow a' = a \left(\frac{T'}{T} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq 230 \times 10^6 \text{ km}$$

3. La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (une unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil). Calculez la plus grande distance de cette comète au Soleil et l'excentricité de sa trajectoire.

Réponse :

À nouveau, par utilisation de la Troisième loi de Kepler,

$$\left[\frac{T^2}{a^3} \right]_{\text{Terre}} = \left[\frac{T^2}{a^3} \right]_{\text{Comète}} \Rightarrow a'' = a \left(\frac{T''}{T} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{r_P + r_A}{2} \Rightarrow r_A = 2a \left(\frac{T''}{T} \right)^{\frac{2}{3}} - r_P \simeq 1497 \times 10^6 \text{ km}$$

Par ailleurs, comme

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow r_A = \frac{p}{1 - e} \text{ et } r_P = \frac{p}{1 + e} \Rightarrow e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \simeq 0,96$$

Comme $e \simeq 1$, on a presque un mouvement parabolique,

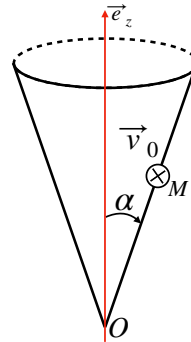
$$E_m \simeq 0 \Rightarrow E_c = -E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{r} = \frac{\mathcal{G}mM_S}{r} \Rightarrow v_{\max} = v_P \simeq \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_S}{r_P}} \simeq 90 \text{ km s}^{-1}$$

V Bille dans un cône (☆☆☆)

V.1 Description du mouvement

Une bille supposée ponctuelle (donc de rayon nul) roule sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle α d'axe Oz . La bille est lancée à une altitude h (repérée par rapport au sommet du cône O) avec une vitesse \vec{v}_0 horizontale.

Dans ce problème, on utilisera les coordonnées cylindriques.



1. Montrer que l'énergie mécanique E_m se conserve.

Réponse :

Les forces extérieures sont le poids \vec{P} qui dérive d'une énergie potentielle et la réaction du support \vec{R} perpendiculaire à ce dernier (pas de frottement) donc qui ne travaille pas. On en déduit que l'énergie mécanique du système se conserve : $E_m(t) = E_m$

2. Montrer qu'il en est de même pour le moment cinétique scalaire L_{Oz} .

Réponse :

On observe que la projection du moment du poids est nulle suivant \vec{e}_z : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P})$. Il en va de même pour la projection verticale de la réaction du support (cette dernière ne contribue pas non plus à "faire tourner" la bille autour du cône). L'application du TSMC donne donc $\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$ soit un moment cinétique constant.

3. Écrire l'énergie mécanique à un instant quelconque uniquement en fonction de r et \dot{r} , m , α , h , g et v_0 (pour obtenir une intégrale première du mouvement.)

Réponse :

On a en coordonnées polaires $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2)$ puis $E_p(z) = mgz + c$. On choisit arbitrairement $c = 0$ par la suite. On a donc pour le moment une expression de l'énergie mécanique qui dépend de trois variables (r, θ et z).

La bille étant astreinte à se déplacer le long du cône, on en déduit que $r(z) = \tan(\alpha)z \Rightarrow z(r) = \frac{r}{\tan(\alpha)}$.

De plus, la conservation du moment cinétique implique que :

$$L_{Oz} = ((r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)) \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta} = mr^2(0)\dot{\theta}(0) = mr(0)v_0 = mhv_0 \tan(\alpha)$$

On en déduit $\dot{\theta} = \frac{hv_0 \tan(\alpha)}{r^2}$ et finalement pour l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \left(\frac{hv_0 \tan(\alpha)}{r} \right)^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2(\alpha)} \right) + mg \frac{r}{\tan(\alpha)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \right) \dot{r}^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{mg \frac{r}{\tan(\alpha)} + \frac{m}{2} \left(\frac{hv_0 \tan(\alpha)}{r} \right)^2}_{\text{énergie potentielle effective}}$$

4. Montrer que ce problème est équivalent à un problème unidimensionnel pour un système effectif de masse m_{eff} . Quelles sont alors la masse effective m_{eff} ainsi que l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$?

Réponse :

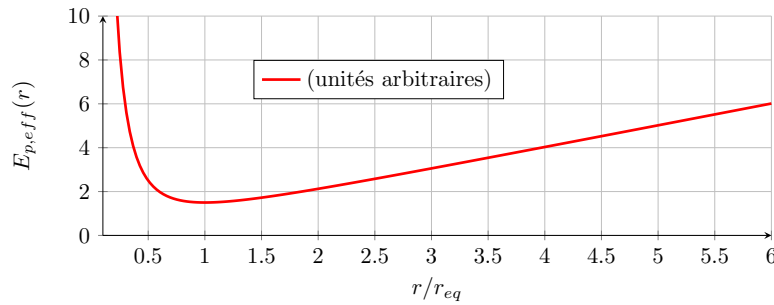
On utilise le "découpage" défini à la question précédente et on obtient une énergie cinétique effective en posant $m_{\text{eff}} = m \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \right)$ puis $E_{p,\text{eff}} = mg \frac{r}{\tan(\alpha)} + \frac{m}{2} \left(\frac{hv_0 \tan(\alpha)}{r} \right)^2$

5. Tracer l'allure de la courbe $r \rightarrow E_{p,\text{eff}}(r)$. Montrer ensuite que cette énergie potentielle effective est minimale lorsque :

$$r_{\text{eq}} = \left(\frac{h^2 v_0^2}{g} \right)^{1/3} \tan(\alpha)$$

Puis vérifiez que ce résultat est bien homogène.

Réponse :



Le minimum d'énergie potentielle effective est obtenu lorsque :

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{mg}{\tan(\alpha)} - m \frac{(hv_0 \tan(\alpha))^2}{r_{\text{eq}}^3} = 0 \Rightarrow r_{\text{eq}} = \left(\frac{h^2 v_0^2}{g} \right)^{1/3} \tan(\alpha)$$

On vérifie aisément que ce résultat est homogène car $[h^2 v_0^2 g^{-1}] = L^3$.

6. En déduire une description du mouvement ultérieur de la bille. Peut-elle atteindre le point O ?

Réponse :

Peut importe la valeur initiale de r , le système se trouve dans un puit de potentiel infini et va donc osciller autour d'une position d'équilibre. L'énergie potentielle effective étant infinie en O , on en déduit que la bille ne pourra jamais atteindre ce point (il faudrait une énergie mécanique infinie).

V.2 Oscillations autour de la position d'équilibre

7. Déduire des questions précédentes l'équation du mouvement de la bille en fonction de r , g , α et r_{eq}

Réponse :

L'énergie mécanique étant constante, on peut la dériver par rapport au temps :

$$m_{\text{eff}} \ddot{r} + \frac{mg}{\tan(\alpha)} \dot{r} - mh^2 v_0^2 \tan^2(\alpha) \frac{\dot{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{g}{\tan(\alpha) + \frac{1}{\tan(\alpha)}} - \frac{h^2 v_0^2 \tan^2(\alpha)}{1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)}} \frac{1}{r^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{g}{2} \sin(2\alpha) \left(1 - \frac{r_{\text{eq}}^3}{r^3} \right) = 0$$

8. Dans le cas où r reste proche de r_{eq} , comment se simplifie l'équation du mouvement.

Montrer que l'on obtient de petites oscillations à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_{\text{eq}}} \sin(2\alpha)}$

Réponse :

On pose $r = r_{\text{eq}} + \epsilon$ avec $\epsilon \ll r_{\text{eq}}$ et on obtient :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{g}{2} \sin(2\alpha) \left(1 - \frac{r_{\text{eq}}^3}{r^3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{g}{2} \sin(2\alpha) \left(1 - \frac{1}{(1 + (\epsilon/r_{\text{eq}}))^3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{g}{2} \sin(2\alpha) \left(1 - 1 + 3 \frac{\epsilon}{r_{\text{eq}}} \right) \approx 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \underbrace{\frac{3g}{2r_{\text{eq}}} \sin(2\alpha)}_{=\omega_0^2} \epsilon \approx 0$$

On obtient ainsi l'équation de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2r_{\text{eq}}} \sin(2\alpha)}$

Éléments de réponses :

E2 Q3 : On trouve $r = \frac{r_0}{1+\alpha t}$

E3 Q2 : on trouve $v_A = v_{\text{min}} \simeq 7,7 \text{ km s}^{-1}$ puis $v_P = v_{\text{max}} \simeq 7,9 \text{ km s}^{-1}$

E4 Q1 : On trouve $M_S \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$

E5 Q4 : $m_{\text{eff}} = m \left(1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \right)$