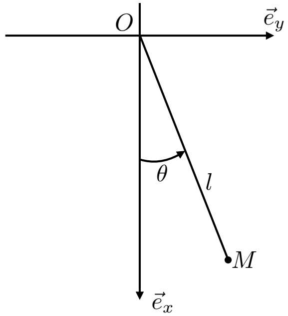
TD 18 | M5- **Théorème du moment cinétique**

	I	II	III	IV	V
Etudier un moment de force	✓	✓			✓
Gerer des calculs			✓	✓	✓
Etablir un bilan des actions	✓			✓	✓
Appliquer le théorème du moment cinétique	✓		✓	✓	✓
Etudier un équilibre				✓	
Résoudre une équation différentielle	✓		✓		✓
Choisir un théorème énergétique	✓		✓	✓	

I Le pendule simple ($\star$)



Un pendule est constitué d'un fil idéal, inextensible et sans masse, de longueur l, fixé en O et auquel est suspendu un objet ponctuel M de masse m. A l'instant $t = 0$, on écarte le point M d'un angle θ_0, supposé petit, par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale.

On suppose par ailleurs que le mouvement reste dans le plan (xOy) et que l'on peut négliger les forces de frottement.

1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta = (Oz)$.
2. Quel est l'intérêt d'utiliser cet axe-là en particulier pour appliquer ce théorème ?
3. Retrouvez l'équation du mouvement avec le PFD puis avec un théorème énergétique.
4. En déduire l'expression de $\theta(t)$.

II Calcul du moment d'une force ($\star$)

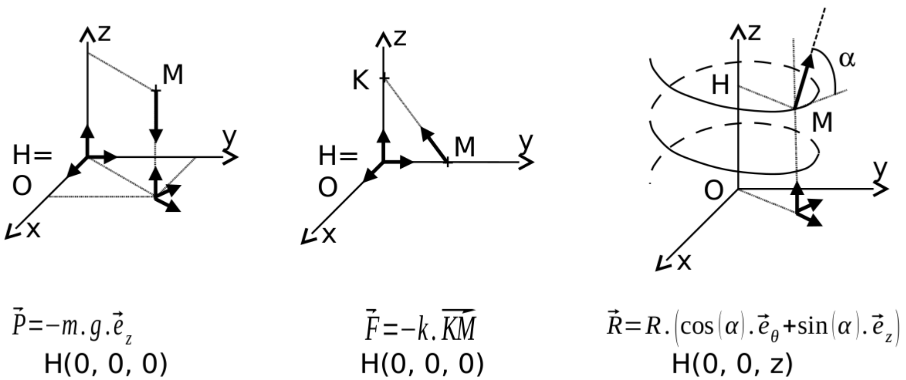
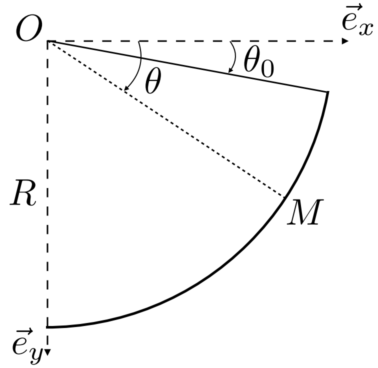


FIGURE 1 – Forces dont il faut calculer le moment.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment de la force en H par calcul vectoriel direct.

1. (a) Poids $\vec{P}$ appliqué en $M(x, y, z)$.
   (b) Force de rappel $\vec{F}$ appliquée en $M(0, y, 0)$.
   (c) Réaction $\vec{R}$ appliquée en $M(r, \theta, z)$.
2. Dans chacun des cas précédents, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_x)$ pour $\vec{P}$ et $\vec{F}$ et par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_z)$ pour $\vec{R}$ par détermination de la distance à l'axe de rotation (bras de levier) et par un raisonnement sur la direction puis par projection du moment calculé à la question 1.

III Descente en toboggan ($\star\star$)

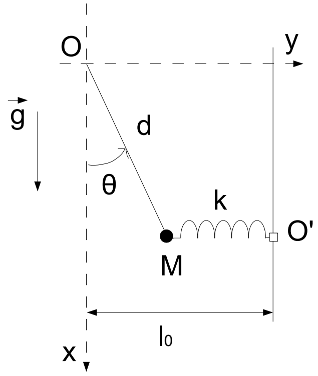


Un enfant assimilé à un point matériel M de masse $m = 40\,\mathrm{kg}$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $R = 2{,}5\,\mathrm{m}$ depuis la position $\theta_0 = 15°$ où il possède une vitesse nulle, jusqu'à la position $\theta_f = 90°$ où il quitte le toboggan.

On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre suppose galiléen.

1. Établissez l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique par rapport à un point judicieusement choisi ($\star$).
2. Montrez que cette équation équivaut à :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)$$
3. Intégrez cette équation en tenant compte des conditions initiales, afin de déterminer une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ.
4. En déduire la vitesse $v_{\max}$ de l'enfant lorsqu'il quitte le toboggan. Faire l'application numérique et donner la valeur de $v_{\max}$ en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
5. Retrouvez l'expression de $v_{\max}$ en utilisant un raisonnement énergétique ($\star$).

IV Pendule et ressort (⋆⋆)



On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O' est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal.

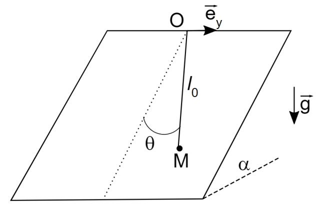
Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.
2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :
$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$
et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2
3. Retrouver l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.
4. Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :
$$E_p(\theta) = md^2\left(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta\right)$$
5. Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.
6. Montrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = 0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
7. Montrer que la position d'équilibre $\theta = \pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition elle l'est. Commenter physiquement.
8. Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$ et en déduire la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.
9. Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question 5 ne sont jamais stables lorsqu'elle existent.

Données :
On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :
$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$

V Pendule incliné (⋆ ⋆ ⋆)

On considère un point matériel M de masse m, accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l_0 et de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixée à un point O d'un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Ce point M se déplace sans frottement sur le plan incliné.



1. Définir une base adaptée à l'étude du mouvement. Déterminer le moment cinétique en O du mobile en l'exprimant dans la base choisie.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. Etudier le cas des mouvements de petite amplitude.
3. Le mobile est lancé depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$. Quel est l'angle maximal atteint ? (On conserve l'hypothèse des petites oscillations)
4. Déterminer l'expression de la tension du fil dans le cas général. Que devient cette expression dans le cadre des petites oscillations ?

Éléments de réponses :

E3 Q4 : On trouve $v_{\max} = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta_0)}$
E4 Q8 : $\Omega' = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_1^2}$
E5 Q3 : $\theta_{\max} = \frac{v_0}{l_0\omega_0}$