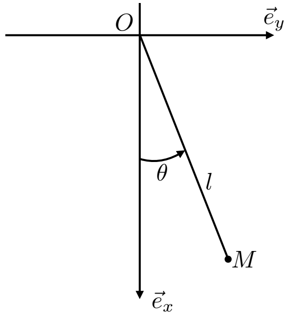
TD 18 | M5- **Théorème du moment cinétique**

	I	II	III	IV	V
Etudier un moment de force	✓	✓			✓
Gerer des calculs			✓	✓	✓
Etablir un bilan des actions	✓			✓	✓
Appliquer le théorème du moment cinétique	✓		✓	✓	✓
Etudier un équilibre				✓	
Résoudre une équation différentielle	✓		✓		✓
Choisir un théorème énergétique	✓		✓	✓	

I Le pendule simple ($\star$)



Un pendule est constitué d'un fil idéal, inextensible et sans masse, de longueur l, fixé en O et auquel est suspendu un objet ponctuel M de masse m. A l'instant $t = 0$, on écarte le point M d'un angle θ_0, supposé petit, par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale.

On suppose par ailleurs que le mouvement reste dans le plan (xOy) et que l'on peut négliger les forces de frottement.

1. *Déterminez l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta = (Oz)$.*

Réponse :
On étudie le pendule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
Bilan des forces :
— Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$
— Tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u_r}$
On se place dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.
Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe d$elta$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{d}elta}(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\mathrm{d}elta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\mathrm{d}elta}(\vec{T})$$

Calculons donc les différents termes de cette équation.
Par définition, $\sigma_{\mathrm{d}elta}(M) = \vec{\sigma}_O(M).\vec{u_z}$, avec $\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$
Or, on a $\overrightarrow{OM} = l\vec{u_r}$ d'où $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$.
Ainsi,

$$\vec{\sigma}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

On a donc $\sigma_{\mathrm{d}elta}(M) = ml^2\dot{\theta}$
Par ailleurs, comme le support de la force $\vec{T}$ coupe l'axe (Oz), son moment par rapport à cet axe est nul.
Enfin, on a $\vec{P} = -mg\vec{u_y} = -mg\cos\theta\vec{u_r} + mg\sin\theta\vec{u_\theta}$
d'où

$$\mathcal{M}_{\mathrm{d}elta}(\vec{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}).\vec{u_z}$$

$$= \left[\overrightarrow{OM} \wedge (-mg\cos\theta\vec{u_r} + mg\sin\theta\vec{u_\theta})\right].\vec{u_z}$$

$$= \left[l\vec{u_r} \wedge (-mg\cos\theta\vec{u_r} + mg\sin\theta\vec{u_\theta})\right].\vec{u_z}$$

$$= -mgl\sin\theta\vec{u_z}.\vec{u_z} = -mgl\sin\theta$$

Finalement, le TMC par rapport à l'axe d$elta$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}ml^2\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -mgl\sin\theta \Leftrightarrow l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

---

2. *Quel est l'intérêt d'utiliser cet axe-là en particulier pour appliquer ce théorème ?*

Réponse :
Cet axe est intéressant pour l'étude car la force $\vec{T}$ a un moment nul par rapport à cet axe, ce qui nous permet d'éliminer cette force inconnue de l'équation.

---

3. *Retrouvez l'équation du mouvement avec le PFD puis avec un théorème énergétique.*

Réponse :
(c.f. autres fiches de TD)

---

4. *En déduire l'expression de $\theta(t)$.*

Réponse :
On reconnaît l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La solution est donc de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Or, à $t = 0$, on a $\theta(0) = A = \theta_0$ et $v(0) = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}(0) = 0$. Or $\dot{\theta} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$. Il vient donc $B\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$.
Finalement

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

II Calcul du moment d'une force ($\star$)

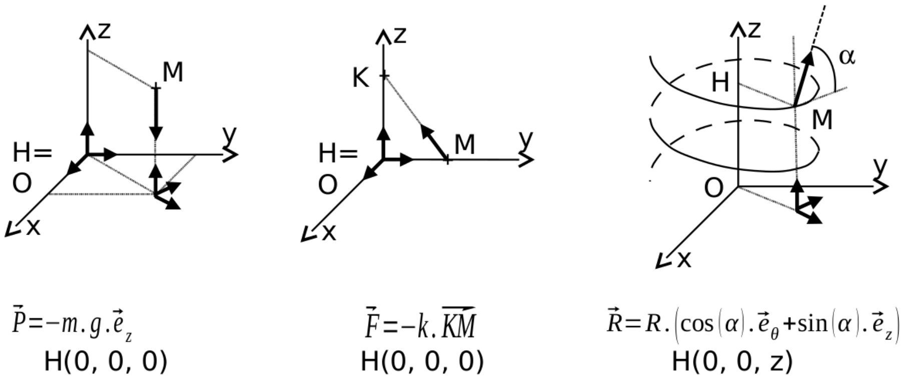


FIGURE 1 – Forces dont il faut calculer le moment.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment de la force en H par calcul vectoriel direct.

1. (a) *Poids $\vec{P}$ appliqué en $M(x, y, z)$.*

Réponse :
On peut mener le calcul de différentes façons. Utilisez celle qui vous semble la plus logique.

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = mg\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{-mgy\vec{e}_x + mgx\vec{e}_y}.$$

(b) *Force de rappel $\vec{F}$ appliquée en $M(0, y, 0)$.*

Réponse :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{F}) = -ky\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{KM} = -ky\vec{e}_y \wedge \left(\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HM}\right) = \boxed{kyKH\vec{e}_x}.$$

(c) *Réaction $\vec{R}$ appliquée en $M(r, \theta, z)$.*

Réponse :
On se place dans les coordonnées cylindro-polaires :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{R}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{pmatrix} = \boxed{-rR\sin\alpha\vec{e}_\theta + rR\cos\alpha\vec{e}_z}.$$

2. *Dans chacun des cas précédents, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_x)$ pour $\vec{P}$ et $\vec{F}$ et par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_z)$ pour $\vec{R}$ par détermination de la distance à l'axe de rotation (bras de levier) et par un raisonnement sur la direction puis par projection du moment calculé à la question 1.*

Réponse :

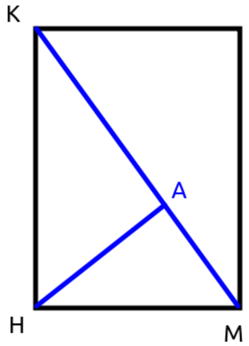
$$\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P}).\vec{e}_x = \boxed{-mgy}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est y. L'intensité de la force est mg. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens indirect. Finalement on retrouve :

$$\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = \boxed{-mgy}.$$

$$\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{F}).\vec{e}_x = \boxed{kyKH}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est la distance entre H et le projeté orthogonal de H sur le segment $[KM]$ (appelons le A). L'intensité de la force est $k \times KM$. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens direct. On remarque que $HA \times KM$ est le double de l'aire du triangle HKM.



On en déduit que :

$$HA \times KM = HM \times HK = yHK$$

Finalement on retrouve :

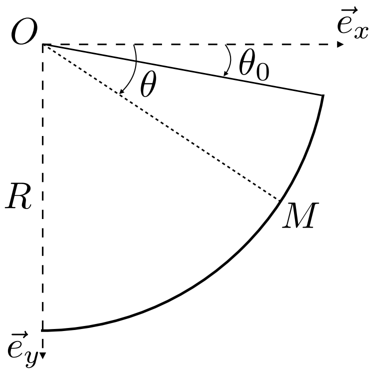
$$\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = +HA \times kKM = \boxed{kyHK}.$$

$$\vec{\mathcal{M}}_z(\vec{R}) = \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{R}).\vec{e}_z = \boxed{rR\cos\alpha}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_z)$ est r. L'intensité de la force dans le plan orthogonal à l'axe $(H\vec{e}_z)$ est $R\cos\alpha$. Cette force tend à faire tourner le point M sans le sens direct autour de l'axe $(H\vec{e}_z)$. Finalement :

$$\vec{\mathcal{M}}_z(\vec{R}) = +R \times R\cos\alpha = \boxed{rR\cos\alpha}.$$

III Descente en toboggan (⋆⋆)



Un enfant assimilé à un point matériel M de masse $m = 40\,\mathrm{kg}$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $R = 2{,}5\,\mathrm{m}$ depuis la position $\theta_0 = 15°$ où il possède une vitesse nulle, jusqu'à la position $\theta_f = 90°$ où il quitte le toboggan.

On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre suppose galiléen.

1. *Établissez l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique par rapport à un point judicieusement choisi (⋆).*

Réponse :
Même type de réponse que pour la Q1 de l'exercice précédent. On obtient au final

$$mR^2\ddot{\theta} = mRg\cos\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\cos\theta$$

---

2. *Montrez que cette équation équivaut à :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)$$

Réponse :
On multiplie par $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\dot{\theta}\cos\theta \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta)$$

après simplification par $\dot{\theta}$

---

3. *Intégrez cette équation en tenant compte des conditions initiales, afin de déterminer une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ.*

Réponse :
On cherche une primitive de cette équation :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\sin\theta + K$$

où K est une constante.
A $t = 0$, on a $v_0 = 0$ donc $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$. Ainsi, on a

$$0 = \frac{g}{R}\sin\theta_0 + K \Leftrightarrow K = -\frac{g}{R}\sin\theta_0$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

θ augmente au cours du temps, donc $\dot{\theta} > 0$ et on a donc

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

---

4. *En déduire la vitesse $v_{\max}$ de l'enfant lorsqu'il quitte le toboggan. Faire l'application numérique et donner la valeur de $v_{\max}$ en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.*

Réponse :
La vitesse v est

$$\boxed{v = R\dot{\theta} = R\sqrt{\frac{2g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0)} = \sqrt{2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

Lorsqu'il quitte le toboggan, l'enfant est en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et sa vitesse vaut donc

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta_0)}}$$

L'application numérique donne 6 m/s. Cette vitesse est élevée car les frottements ont été négligés.

---

5. *Retrouvez l'expression de $v_{\max}$ en utilisant un raisonnement énergétique ($\star$).*

Réponse :
Parmi les forces qui s'exercent sur le point M, $\overrightarrow{R_N}$ ne travaille pas et $\vec{P}$ est conservative.
Ainsi, le système est conservatif.
Son énergie mécanique est donc une constante du mouvement.
On a donc

$$E_m = E_p + E_c = E_0 \text{ avec } E_c = \frac{1}{2}mv^2 \text{ et } E_p = -mgz = -mgR\sin\theta$$

Attention ! La verticale est descendante, d'où le signe "-" dans l'expression de l'énergie potentielle.
Ainsi, on a

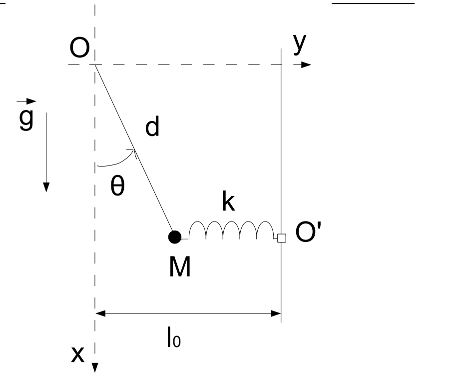
$$\frac{1}{2}mv^2 - mgR\sin\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR\sin\theta_0 = -mgR\sin\theta_0$$

soit

$$\frac{1}{2}mv^2 = mRg\sin\theta - mRg\sin\theta_0 \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)}}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

IV Pendule et ressort ($\star\star$)



On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O' est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal.

Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.

1. *Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.*

Réponse :
Bilan des forces :
— $\vec{P} = mg\overrightarrow{u_x} = mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$
— $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$
— $\vec{F} = -k(l - l_0)(-\overrightarrow{u_y})$. Avec $l = l_0 - d\sin\theta$, on a $\vec{F} = -kd\sin\theta\overrightarrow{u_y} = -kd\sin\theta(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

---

2. *Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :*

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$

et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2

Réponse :
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On a $\overrightarrow{OM} = d\vec{u}_r$, $\vec{v} = d\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -d\dot{\theta}^2\vec{u}_r + d\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
Le PFD projeté sur le vecteur $\vec{u}_\theta$ s'écrit donc :

$$md\ddot{\theta} = -kd\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \sin\theta\left(\frac{k}{m}\cos\theta + \frac{g}{d}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0} \quad (2)$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{d}}$. On retrouve les pulsations propres caractéristiques d'un pendule pensant et d'un oscillateur masse-ressort.

3. *Retrouver l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.*

Réponse :
Le théorème du moment cinétique par rapport au point O s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P})$$

Or, on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$, soit

$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge (mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) = d\overrightarrow{u_r} \wedge (mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) = -mgd\sin\theta\overrightarrow{u_z}$

et enfin

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{F}) = d\overrightarrow{u_r} \wedge (-kd\sin\theta(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})) = -kd^2\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{u_z}$$

D'autre part, on a $\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{u_r}$ d'où $\vec{v} = d\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = md^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$
Le théorème du moment cinétique projeté sur $\overrightarrow{u_z}$ donne donc

$$\frac{\mathrm{d}(md^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = -kd^2\cos\theta\sin\theta - mgd\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \sin\theta\left(\frac{k}{m}\cos\theta + \frac{g}{d}\right) = 0$$

Avec $\frac{k}{m} = \omega_1^2$ et $\frac{g}{d} = \omega_2^2$, il vient finalement $\boxed{\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0}$

4. *Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :*

$$E_p(\theta) = md^2(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta)$$

Réponse :
La tension du fil ne travaille pas car elle reste toujours perpendiculaire à la vitesse. Le poids est conservatif et l'énergie potentielle associée est $E_{p_p} = -mgx = -mgd\cos\theta$.
La force de rappel élastique est conservative et l'énergie potentielle associée est $E_{p_{el}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}d^2\sin^2\theta$
Finalement, le système est bien conservatif et

$$\boxed{E_p(\theta) = \frac{1}{2}kd^2\sin^2\theta - mgd\cos\theta}$$

Et on retrouve bien le résultat attendu par ré-identification de ω_1 et ω_2

5. *Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.*

Réponse :
Les positions d'équilibre correspondent aux extrema d'énergie potentielle, on cherche donc les points d'annulation de la dérivée de $E_p(\theta)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = kd^2\cos\theta\sin\theta + mgd\sin\theta = md^2\left(\omega_1^2\sin\theta\cos\theta + \omega_2^2\sin\theta\right)}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \quad \text{ou} \quad kd\cos\theta + mg = 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 0 \text{ ou} \pi \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{mg}{kd} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} \tag{4}$$

Les deux premières solutions existent toujours, la troisième équation ne possède de solution que si $\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2} < 1 \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$ (l'effet du ressort prédomine sur les effets de la gravité). Les solutions sont alors $\boxed{\theta_{eq} = \pm\arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)}$
Elles sont situées de façon symétrique par rapport à l'axe Ox. De plus, comme $\cos\theta_{eq} > 0$, l'une est située entre $\pi/2$ et π, l'autre entre $-\pi/2$ et $-\pi$.

6. *Montrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = 0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.*

Réponse :
Pour connaître la stabilité des positions d'équilibre, on étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mgd\cos\theta + kd^2\cos^2\theta - kd^2\sin^2\theta = md^2\left(\omega_1^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \omega_2^2\cos\theta\right)}$$

Ainsi, $\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgd + kd^2 > 0}$. La position d'équilibre $\boxed{\theta_{eq} = 0 \text{ est donc stable}}$.

Pour connaître la pulsation des oscillations autour de cette position d'équilibre, on fait un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de $\theta_{eq} = 0$:

$$E_p(\theta) \sim E_p(0) + \theta \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_0}_{=0} + \frac{\theta^2}{2} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_0}_{=mgd+kd^2} = E_p(0) + \frac{1}{2}\theta^2(mgd + kd^2)$$

On injecte dans l'intégrale permière du mouvement : $E_c + E_p = E_{m_0} = \text{cte}$ avec $E_c = \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2$:

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + E_p(0) + \frac{1}{2}\theta^2(mgd + kd^2) = \text{cte}$$

On dérive par rapport au temps :

$$md^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\theta(mgd + kd^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \theta\left(\underbrace{\frac{g}{d}}_{\omega_2^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1^2}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$$

avec $\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$

Remarque : on peut aussi retrouver ce résultat en faisant des approximations à l'ordre 1 dans le PFD. On se place à autour de $\theta_{eq} = 0$ c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$. On a alors $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\boxed{\ddot{\theta} + \theta\underbrace{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}_{\Omega^2} = 0}$$

---

7. *Montrer que la position d'équilibre $\theta = \pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition elle l'est. Commenter physiquement.*

Réponse :
$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -mgd + kd^2 > 0$ si $mg < kd \Rightarrow \frac{g}{d} < \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$. Ainsi, cette position n'est stable que si l'effet du ressort prédomine sur les effets de la gravité. Si c'est l'inverse, elle est instable, ce qui est conforme à l'intuition physique.

---

8. *Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$ et en déduire la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.*

Réponse :
On applique la même méthode que précédemment en utilisant un développement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$:

$$E_p(\theta) \sim E_p(\pi) + (\theta - \pi)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_\pi}_{=0} + \frac{(\theta-\pi)^2}{2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_0}_{=-mgd+kd^2} = E_p(\pi) + \frac{1}{2}\theta^2(-mgd + kd^2)$$

On injecte dans l'intégrale première du mouvement : $E_c + E_p = E_{m_0} = \text{cte}$ avec $E_c = \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2$:

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + E_p(\pi) + \frac{1}{2}(\theta - \pi)^2(-mgd + kd^2) = \text{cte}$$

On dérive par rapport au temps :

$$md^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}(\theta - \pi)(-mgd + kd^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \theta\left(-\underbrace{\frac{g}{d}}_{\omega_2^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1^2}\right) = \left(-\frac{g}{d} + \frac{k}{m}\right)\pi = \Rightarrow \ddot{\theta} + \Omega'^2\theta$$

avec $\boxed{\Omega' = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_1^2}}$

Comme on est dans le cas où cette position est stable, on a $\omega_2 < \omega_1$ donc $-\omega_2^2 + \omega_1^2 > 0$.

Remarque : on peut à nouveau retrouver ce résultat avec le PFD. On se place proche de $\theta_{eq} = \pi$. On pose donc $\theta = \pi + q$ avec $q \ll 1$.

On a alors $\sin\theta = \sin(\pi + q) = -\sin q \sim -q$, $\cos(\pi + q) = -\cos q \sim -1$.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\ddot{\theta} - q(-\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{q}_{\theta-\pi}(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \theta(\omega_1^2 - \omega_2^2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\pi}$$

---

9. *Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question 5 ne sont jamais stables lorsqu'elle existent.*

Réponse :
On calcule à nouveau la dérivée seconde en θ_{eq} tel que $\cos\theta_{eq} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = -\frac{mg}{kd}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq}} = mgd\cos\theta_{eq} + kd^2\cos^2\theta_{eq} - kd^2\underbrace{\sin^2\theta_{eq}}_{1-\cos^2\theta_{eq}} = -mgd\frac{mg}{kd} + kd^2\frac{(mg)^2}{(kd)^2} - kd^2\left(1 - \frac{(mg)^2}{(kd)^2}\right) \quad (5)$$

$$= -\cancel{\frac{(mg)^2}{k}} + \cancel{\frac{(mg)^2}{k}} - kd^2 + \frac{(mg)^2}{k} \quad (6)$$

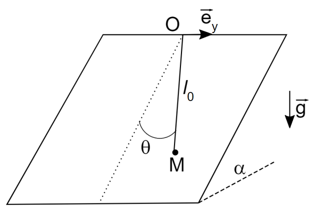
Cette position est stable si et seulement si $-kd^2 + \frac{(mg)^2}{k} > 0 \Rightarrow \frac{k^2}{m^2} < \frac{g^2}{d^2} \Rightarrow \omega_1^2 < \omega_2^2$
C'est la condition opposée à la condition d'existence de cette position d'équilibre. Ainsi, cette position d'équilibre n'est jamais stable lorsqu'elle existe.

Données :
On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$

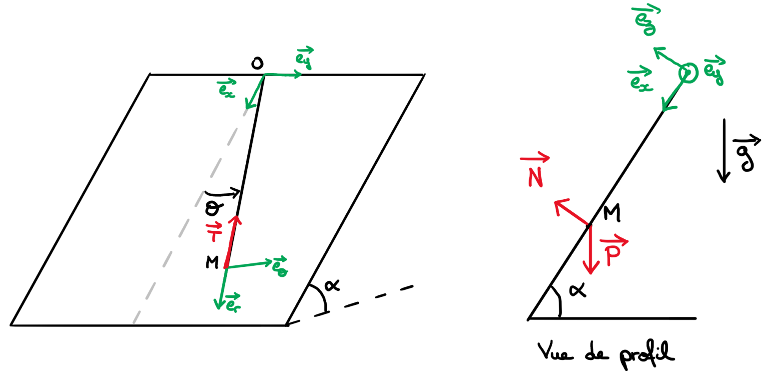
V Pendule incliné ($\star\star\star$)

On considère un point matériel M de masse m, accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur l_0 et de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixée à un point O d'un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Ce point M se déplace sans frottement sur le plan incliné.



1. *Définir une base adaptée à l'étude du mouvement. Déterminer le moment cinétique en O du mobile en l'exprimant dans la base choisie.*

Réponse :
<u>Système</u> : Point matériel M de masse m.
<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen.
Le mouvement du système est un mouvement plan (celui du le plan incliné), la trajectoire est circulaire de centre O et de rayon l_0 : l'étude sera faite en utilisant la base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.



Remarque : Sur le schéma précédent, le plan incliné est le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
<u>Moment cinétique en O de M :</u>
On a : $\overrightarrow{OM} = l_0\vec{e}_r$ et $\vec{v}(M) = l_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On calcule :

$$\vec{L}_0 = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) = ml_0^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

---

2. *Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. Etudier le cas des mouvements de petite amplitude.*

Réponse :
<u>Bilan des forces</u> :
- poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- réaction normale du plan incliné (pas de frottements) $\vec{N} = N\vec{e}_z$
- Tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

Exprimons $\vec{P}$ dans la base cylindrique :

$$\vec{P} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_z) = -mg(-\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\alpha\,\vec{e}_z)$$

(On a en effet : $\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$)
<u>Appliquons le théorème du moment cinétique en O :</u>

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_0(\vec{P}) + \vec{M}_0(\vec{T}) + \vec{M}_0(\vec{N})$$

Calculons le moment de chaque force en O :

- $\overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = mgl_0 \cos\alpha \, \overrightarrow{e}_\theta - mgl_0 \sin\alpha \sin\theta \, \overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$ car les deux vecteurs sont colinéaires à tout instant
- $\overrightarrow{M}_0(\overrightarrow{N}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{N} = -Nl_0 \, \overrightarrow{e}_\theta$

Projetons le théorème du moment cinétique :

- sur $\overrightarrow{e}_r$: $0 = 0$
- sur $\overrightarrow{e}_\theta$: $0 = mgl_0 \cos\alpha - Nl_0$
- sur $\overrightarrow{e}_z$: $ml_0^2 \ddot{\theta} = -mgl_0 \sin\alpha \sin\theta$

La troisième équation est l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \sin\alpha \sin\theta = 0}$$

Remarque : La deuxième équation donne l'expression de la norme de la réaction normale du support : $N = mg\cos\alpha$.

Cas des mouvements de faible amplitude : L'angle θ est faible et on peut écrire : $\sin\theta \approx \theta$.

En posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}\sin\alpha}}$ (on a bien $\sin\alpha \geq 0$ car $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$), on obtient l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

La période des petites oscillations est : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g\sin\alpha}}}$.

Remarque : On remarque que lorsque α tend vers 0, la période devient infinie : lorsque le plan est horizontal, le pendule ne peut plus se mettre en mouvement sous l'effet de la pesanteur. Lorsque α tend vers $\frac{\pi}{2}$, on retrouve l'expression du cours pour la période des petites oscillations du pendule simple.

---

3. *Le mobile est lancé depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0 \overrightarrow{e}_y$. Quel est l'angle maximal atteint ? (On conserve l'hypothèse des petites oscillations)*

Réponse :
On résout l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.
Les solutions sont du type $\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ avec A, B deux constantes à déterminer en utilisant les conditions initiales.

Conditions initiales : On a : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{l_0}$.
On obtient finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{l_0\omega_0}\sin(\omega_t)}$$

L'angle maximal atteint est donc : $\boxed{\theta_{\max} = \frac{v_0}{l_0\omega_0}}$.

---

4. *Déterminer l'expression de la tension du fil dans le cas général. Que devient cette expression dans le cadre des petites oscillations ?*

Réponse :
La tension du fil a un moment nul par rapport à O, elle ne peut pas être déterminée à l'aide du théorème du moment cinétique.
On utilise donc la deuxième loi de Newton :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

que nous projetons sur $\overrightarrow{e}_r$:

$$-ml_0^2\dot{\theta}^2 = -T + mg\sin\alpha\cos\theta$$
$$T = mg\sin\alpha\cos\theta + ml_0^2\dot{\theta}^2$$

Il faut déterminer $\dot{\theta}$. On peut utiliser un théorème énergétique pour obtenir la vitesse $l_0\dot{\theta}$ du pendule ou bien multiplier l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et intégrer :

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}\sin\alpha \times \dot{\theta}\sin\theta = 0$$

En intégrant temporellement :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l_0}\sin\alpha\cos\theta = K$$

où K est une constante déterminée à l'aide des conditions initiales :
à $t = 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{l_0^2} - \frac{g}{l_0}\sin\alpha = K$$

Ainsi : $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l_0}\sin\alpha(\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{l_0^2}}$

Injectons dans l'expression de T, il vient :

$$T = mg\sin\alpha(3\cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{l_0}$$

L'expression de la tension du fil est :

$$\overrightarrow{T} = -\left(mg\sin\alpha(3\cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{l_0}\right)\overrightarrow{e}_r$$

Éléments de réponses :

E3 Q4 : On trouve $v_{max} = \sqrt{2gR(1-\sin\theta_0)}$
E4 Q8 : $\Omega' = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_1^2}$
E5 Q3 : $\theta_{max} = \frac{v_0}{l_0\omega_0}$