TD 17 | O6 - **Mécanique quantique**

I Flux de photons d'un laser ($\star$)

Un laser hélium - néon émet une lumière rouge quasi - monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600\,\text{nm}$. La puissance du laser est $P = 3\,\text{mW}$. La section du faisceau laser est un disque de diamètre $1\,\text{mm}$.

1. Préciser la famille d'éléments chimiques à laquelle appartiennent le néon et l'hélium.
2. Exprimer l'énergie E d'un photon émis par le laser. Faire l'application numérique en joule et en électron-volt.
3. Quel est le flux Φ de photons, c'est-à-dire le nombre de photons émis par unité de temps par le laser ?

Données numériques : Pour simplifier les applications numériques, on prendra $h \approx 6 \times 10^{-34}\,\text{J s}$ et $1\,\text{eV} \approx 1{,}5 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

II Vitesse d'un électron ($\star$)

Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ confiné dans une zone de taille $a = 1{,}0 \times 10^{-10}\,\text{m}$ autour d'un proton.

1. Estimez l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron à l'aide de l'inégalité de Heisenberg.
2. Quelle est son énergie cinétique ?

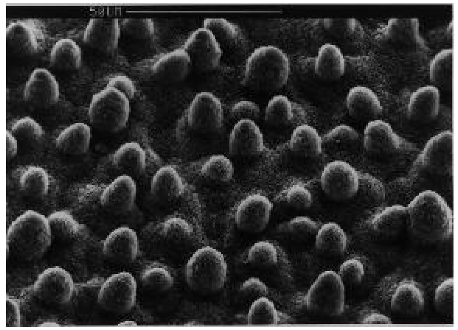
On donne la constante de Planck réduite : $\hbar = 1{,}0 \times 10^{-34}\,\text{J s}$.

3. Estimez ensuite la valeur absolue de son énergie potentielle à l'aide de la formule suivante :
$$|E_p| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \; U.S.I.$$
puis concluez.
4. Quelle est la longueur d'onde associée à l'électron ? A-t-on besoin de la mécanique quantique pour décrire un atome ?

III Microscope électronique à balayage ($\star$)

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée.

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?
2. Rappelez les valeurs des longueurs d'onde extrêmes (dans le vide) du spectre visible et déterminer les énergies des photons correspondants en eV.



L'image ci-contre a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB), dans lequel un faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser.

L'objectif est de visualiser une feuille de lotus afin de comprendre ses propriétés. Après interaction avec la matière, ces électrons sont récupérés par des capteurs dont les informations permettent de reconstruire l'image.

3. La taille des picots recouvrant la surface de cette feuille de lotus est d'environ 10 μm. Sachant que l'on peut observer des détails 100 fois plus petits que les picots de la feuille (d'ailleurs eux-même recouverts de "micro-picots"), expliquer pourquoi il n'est pas possible d'obtenir une telle image avec un microscope optique.
4. Évaluez l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons qui doivent être utilisés pour observer les détails mentionnés ci-dessus. On donne la masse de l'électron $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$.
5. Sachant que les MEB actuels peuvent aller jusqu'à des énergie de $150\,\text{eV}$, déterminez la taille des plus petits détails qu'on peut observer avec ce type d'appareil.

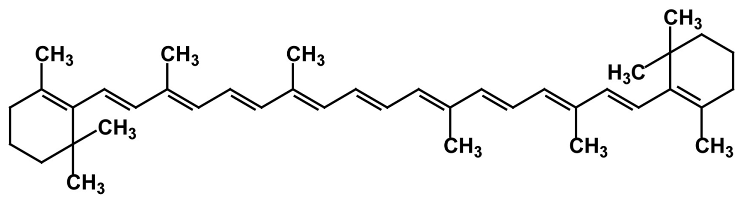
IV Électron confiné dans une molécule ($\star\star$)

Certaines molécules ayant une longue chaîne carbonée linéaire, comme le β-carotène contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule. On modélise un tel électron, de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. L'énergie potentielle de l'électron est alors nulle sur ce segment et infiniment grande partout ailleurs : l'électron est confiné dans une boîte quantique.

1. Que peut-on en déduire (qualitativement) quant aux valeurs possibles pour les énergies de cet électron et en particulier concernant son énergie minimale (on détaillera le raisonnement) ?
2. Rappeler la définition de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$. En particulier, quelle relation existe-t-il entre $\Psi(x,t)$ et la *probabilité de présence* de l'électron en x à l'intstant t ?
3. Que valent $\Psi(0)$ et $\Psi(L)$? Justifier.

4. En déduire les valeurs possibles de la longueur d'onde de l'électron confiné. A quel phénomène ce comportement est-il analogue ?
5. Donner enfin l'expression des niveaux d'énergie mécanique E_n en fonction de m, L, n et h. Justifier précisément.

Dans le β-carotène (formule ci-dessous), ce sont les 22 électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur $L = 1,83$ nm. Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas (deux par niveaux).



6. Calculer les niveaux d'énergie E_{11} et E_{12}. On donne $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J s.
7. En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde dans le vide d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.
8. Expliquer alors la couleur orangées des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles, etc).

V Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire ($\star\star\star$)

On considère une particule quantique confinée dans un puits d'energie potentielle V rectangulaire infini,unidimensionnel et de largeur L suivant l'axe (Ox) : $V(x) = 0$ pour $x \in [0, L]$, $V(x) = +\infty$ pour $x < 0$ et $x > L$

On cherche à retrouver l'expression E_n des niveaux d'énergie n par résolution directe de l'équation de Schrödinger stationnaire, qui dans ce cas, s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

De plus, $|\Psi(x)|^2 dx$ représente la probabilité d'observer la particule dans le domaine $[x - dx/2, x + dx/2]$. Ainsi on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ car il est certain d'observer la particule quelque part sur $\mathbb{R}$.

1. Justifiez le fait que $|\Psi(x)|^2 = 0$ en dehors de l'intervalle $[0, L]$. En déduire les conditions aux limites $\Psi(0)$ et $\Psi(L)$.
2. On se place donc dans l'intervalle $[0, L]$. Simplifiez l'équation sur cet intervalle.
3. La résoudre dans le cas où $E = 0$. Cette solution est-elle physiquement acceptable ?
4. La résoudre enfin dans le cas où $E > 0$. Montrez que pour que la solution vérifie les conditions aux limites, on doit avoir :

$$E = E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Éléments de réponses :

E2 Q4 : on trouve $\lambda \approx 1{,}5$ nm pour la longueur d'onde de l'électron
E3 Q5 : On trouve une taille typique de $1{,}0 \times 10^{-10}$ m
E4 Q5 : On doit trouver $E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$