

TD 16 | M4- Particules chargées dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$

	I	II	III	IV
Réaliser une approximation				✓
Analyser la cinématique			✓	
Gerer des calculs				✓
Faire preuve de sens physique	✓	✓		
Analyser un schéma		✓	✓	✓
Etudier un équilibre				✓
Choisir un théorème énergétique			✓	

I Ordres de grandeurs (★)

1. Calculer la norme de la force électrique exercée sur un électron dans un condensateur plan de $d = 5\text{ cm}$ d'épaisseur soumis à une tension de $U = 5\text{ V}$

Réponse :
Le champ électrique est alors de $||\vec{E}|| = U/d$ et on en déduit la norme de la force $||\vec{F}_e|| = e\frac{U}{d} \approx 2 \times 10^{-17}\text{ N}$. Au vu de la masse de l'électron, cette force va l'accélérer très rapidement !

2. Calculer ensuite la norme de la force magnétique exercée par le champ magnétique terrestre (de l'ordre de $B = 4 \times 10^{-5}\text{ T}$) s'il est animé d'une vitesse v perpendiculaire à ce dernier, d'environ un millièrne de la vitesse de la lumière dans le vide.

Réponse :
Cette fois ci, on obtient, toujours en norme $||\vec{F}_m|| = evB \approx ecB/1000 \approx 2.10^{-18}\text{ N}$. Les ordres de grandeur des deux forces sont comparables.

3. Comparer ensuite ces résultats au poids de l'électron

Réponse :
 $||\vec{P}|| = mg \approx 9.10^{-30}\text{ N}$. Le poids est donc bien négligeable par rapport aux deux autres forces et n'aura donc que très peu d'influence sur les trajectoires étudiées. En pratique, il sera quasi systématiquement négligé dans tous les exercices qui traitent de mouvement de particules chargées.

II Mouvement de particules chargées dans une chambre à bulles (★)

Pour visualiser les trajectoires des particules chargées, les premiers détecteurs étaient des chambres à bulles dans lesquelles les particules (électrons, protons, neutrons...) déclenchaient la formation de bulles dans un liquide et marquaient ainsi leur passage par une traînée de bulles.

La figure ci-contre représente un cliché typique des traces observées lors d'une collision à haute énergie de particules au CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire). Sur le côté droit, on a schématisé les trois types de trajectoires observées avec leur sens de parcours.

Dans ces chambres à bulles, il règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$. Par ailleurs, le passage dans le liquide conduit à une lente décélération des particules.

1. Déterminer le signe de la charge pour les trois types de trajectoires observées.

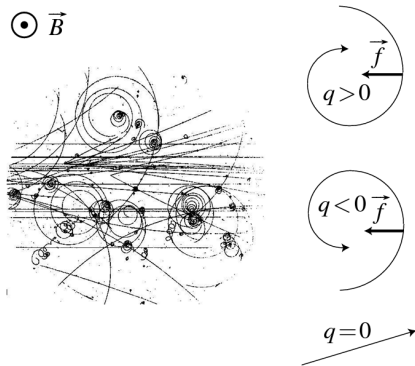
Réponse :
La force de Lorentz magnétique $\vec{f}$ est nécessairement dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire. Il est donc possible de la tracer sur la figure. Or,

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le sens de $\vec{v}$ ainsi que celui de $\vec{B}$ étant connu, il est possible d'en déduire le signe de la charge q : la trajectoire 1 correspond à une charge positive, tandis que la trajectoire 2 correspond à une charge négative et la trajectoire 3 à une particule neutre.

2. Expliquer qualitativement pourquoi les trajectoires observées ne sont pas circulaires mais s'enroulent en spirales dont le rayon diminue.

Réponse :
En présence du seul champ magnétique, une particule chargée suit, d'après le cours, une trajectoire circulaire et uniforme de rayon $R = (mv)/(qB)$. On remarque en particulier que ce rayon est proportionnel à v . Or, les particules sont, d'après l'énoncé, freinées. Il s'en suit une diminution progressive de la vitesse et donc du rayon de la trajectoire. Les particules vont donc spiraler avec un rayon décroissant.



III Mouvement d'un proton dans un cyclotron (★★)

Un cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R , très légèrement écartés et creux, les Dees, au sein desquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant d'intensité $B = 1,67 \text{ T}$. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale $U = 100 \text{ kV}$ crée un champ $\vec{E}$ perpendiculaire aux faces en regard des Dees.

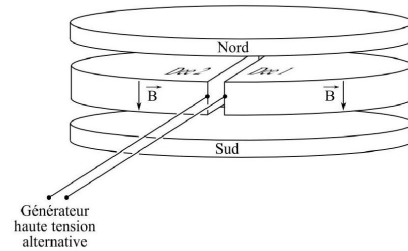


FIGURE 1 – Schéma de principe d'un cyclotron

Des protons de masse $m_P = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et de charge $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$, animés d'une vitesse horizontale négligeable, sont injectés au point A_0 (voire annexe) de l'espace séparant les deux Dees. On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\vec{F}_L$ que subit une particule de charge q , animée d'une vitesse $\vec{v}$ lorsqu'elle est placée dans une zone où règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: $\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Dans tout le problème, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

III.1 Etude du mouvement dans les Dees

On étudie le mouvement d'un proton qui pénètre pour la première fois dans le Dee 1 en A avec la vitesse $\vec{v}_1$, de norme V_1 .

1. Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.

Réponse :

Dans le Dee, le proton est soumis à la seule force de Lorentz magnétique qui ne travaille pas car elle est constamment perpendiculaire à la vitesse. Ainsi, l'énergie mécanique est constante. Il n'y a aucune force conservative donc l'énergie potentielle est constante. Ainsi, E_c est constante et donc le mouvement est uniforme.

2. Reproduire le schéma de gauche (figure 1) de l'annexe et y représenter les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2 .

Réponse :

D'après la figure de l'énoncé, le vecteur champ magnétique est dirigé vers le bas, selon $+\vec{e}_z$; les vecteurs vitesse sont colinéaires à la trajectoire et orientés par celle-ci, la vitesse au point M_2 étant bien sûr plus importante qu'au point M_1 , le proton ayant été accéléré entre B et C. Pour une trajectoire circulaire (la trajectoire est circulaire d'après la trajectoire proposée par l'énoncé) uniforme, les forces sont orthogonales à la trajectoire, orientées à l'intérieur de la courbure.

3. Établir le système d'équations différentielles du mouvement en coordonnées cartésiennes. Faire apparaître la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{m}$ et montrer que cette grandeur est bien homogène à une pulsation.

Réponse :

D'après la seconde loi de NEWTON appliquée au proton dans le référentiel lié au cyclotron et supposé galiléen, on a :

$$m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En effectuant le produit vectoriel et en projetant sur les 3 axes, on obtient :

$$m\ddot{z} = 0$$

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B \Rightarrow \ddot{x} = \frac{eB}{m}\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -e\dot{x}B \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{eB}{m}\dot{x}$$

On remarque donc que la quantité $\frac{eB}{m}$ est homogène à l'inverse d'un temps. On peut

donc poser $\omega_c = \frac{eB}{m}$

4. On admet que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de centre O . Montrer que le rayon de ce cercle a pour expression $R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$.

Réponse :

On se place dans la base polaire de centre O . On a alors

$$\overrightarrow{OM} = R_1 \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R_1 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Or, $\vec{v} = V_1 \vec{e}_\theta$, on en déduit donc que $\dot{\theta} = +\frac{V_1}{R_1}$ (la particule tourne dans le sens direct), d'où :

$$\vec{a} = -V_1 \dot{\theta} \vec{e}_r = -\frac{V_1^2}{R_1} \vec{e}_r$$

Par ailleurs, la seule force qui s'exerce sur le proton est la force magnétique

$$\vec{F}_{mg} = e \vec{v} \wedge \vec{B} = e V_1 \vec{e}_\theta \wedge (-B \vec{e}_z) = -e V_1 B \vec{e}_r$$

L'application du principe fondamental de la dynamique au proton dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$m \vec{a} = \vec{F}_{mg} \Rightarrow -m \frac{V_1^2}{R_1} = -e B V_1 \Rightarrow R_1 = \frac{m V_1}{e B}$$

Or, on a vu précédemment $\omega_c = \frac{eB}{m}$, il vient donc $R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}$

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la n -ième traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = \frac{V_n}{\omega_c}$.

5. Exprimer, en fonction de R_n la distance parcourue dans un Dee lors du n -ième demi-tour.

Réponse :

Lors du tour n , le proton effectue un demi-tour et parcourt donc la distance

$$d = \pi R_n = \frac{\pi V_n}{\omega_c}$$

6. Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m , e et B .

Réponse :

Connaissant la distance parcourue, on en déduit la durée Δt pour ce mouvement effectué à vitesse constante :

$$\Delta t = \frac{d}{V_n} = \frac{\pi}{\omega_c} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi m}{e B}$$

III.2 Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

7. Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\vec{E}$ entre les Dees quand le proton décrit A_0A , puis BC . Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans le schéma de l'annexe) pour que les protons soient toujours accélérés quand ils passent entre les Dees ?

Réponse :

Pour que le proton de charge positive soit accéléré, le champ électrique doit être dans le sens de la vitesse (cf schéma ci-dessus). Or, on sait que le champ électrique est dirigé suivant les potentiels décroissants donc la tension $u(t)$ est positive pendant que le proton parcourt A_0A et négative pendant qu'il parcourt BC .

8. Le schéma 2 de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Reproduire puis faire apparaître sur ce graphe : la zone où le proton passe de A_0 à A , puis lorsqu'il passe de B à C , ainsi que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

Réponse :

Le passage en A_0A doit être associé à un maximum de la tension, le passage en BC à un minimum. La durée Δt doit correspondre à une demi-période. En effet, les dees étant très faiblement écartés, on pourra négliger le temps de parcours entre les deux dees.

9. Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m , e et B .

Réponse :

La tension change de signe toutes les demi-périodes, ce qui doit correspondre à la durée Δt pour qu'il y ait effectivement accélération des protons à chaque passage entre les Dees. On a donc

$$\frac{T}{2} = \Delta t \Rightarrow f = \frac{eB}{2\pi m}$$

10. En supposant que le proton franchi l'espace entre les Dees lorsque la tension est extrême (et supposée constante pendant le franchissement) avec une vitesse initiale de norme V_i , établir l'expression de V_{i+1} une fois l'espace franchi.

Réponse :

La seule force ($\vec{F}_e$) appliquée au proton étant conservative, on utilise le TMC :

$$E_{c,i+1} + E_{p,i+1} = E_{c,i} + E_{p,i}$$

or a chaque fois, on a $E_{p,i+1} - E_{p,i} = \pm 1 \times \pm 1 eU = +eU$ (changement de sens + inversion de la tension à chaque demi tour). On en déduit $V_{i+1}^2 = V_i^2 + \frac{2e}{m}U \Rightarrow$

$$V_{i+1} = \sqrt{V_i^2 + \frac{2e}{m}U}$$

11. Donner l'expression littérale du temps t_E pour que le proton atteigne une énergie cinétique E puis faire l'application numérique pour $E = 1 \times 10^{-12}$ J. Quelle est le nombre de tour effectué et la vitesse finale associée ?

Réponse :

À chaque tour, le proton passe deux fois dans l'espace entre les dees et gagne $\Delta E_c = 2eU$. Il faudra donc $n = E/(2eU)$ tours pour atteindre la bonne énergie cinétique et donc un temps de

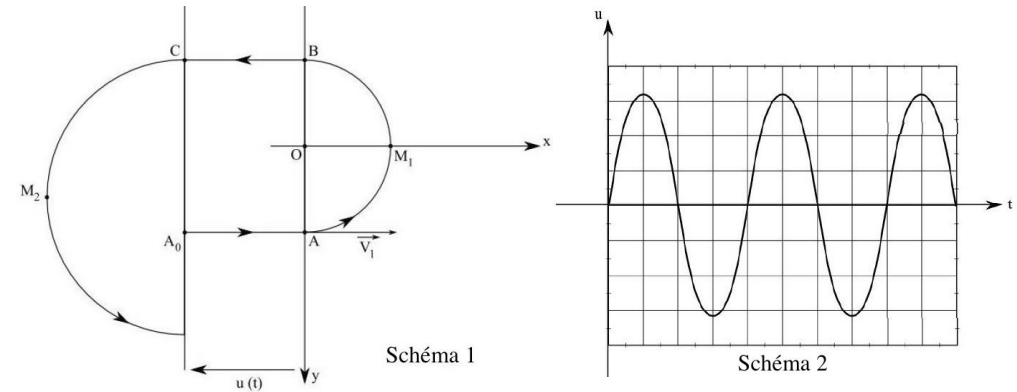
$$t_E = n/f = \frac{E}{2eU} \frac{2\pi m}{eB} \Rightarrow t_E = \frac{\pi m E}{U B e^2}$$

L'application numérique donne $t_E = 1,23 \mu\text{s}$ et cela correspond à une vitesse de $v_E = \sqrt{2E/m} \approx 3,4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ soit environ $c/10$.

12. Pour un cyclotron de rayon $R = 0,1$ m, quelle vitesse maximale peut-on obtenir ?

Réponse :

Au maximum, le rayon de la trajectoire vaudra $r = R$ et donc $V_f = R\omega_c = \frac{ReB}{m} \approx 1,6 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$

**Éléments de réponses :**

$$E3 \text{ Q6 : } \Delta t = \frac{\pi m}{eB}$$

$$E3 \text{ Q10 : } V_{i+1} = \sqrt{V_i^2 + \frac{2e}{m}U}$$