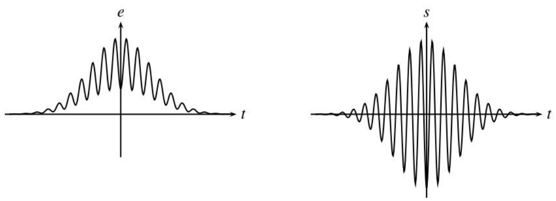
TD 14 | E5- **Filtrage linéaire**

	I	II	III	IV	V	VI
Combiner plusieurs éléments			✓	✓		
Gerer des calculs				✓		✓
Faire preuve de sens physique	✓		✓			✓
Analyser un schéma	✓			✓	✓	✓
Tracer un diag. de Bode		✓	✓			
Appliquer un filtrage à un signal					✓	✓
Déduire la nature d'un filtre	✓					✓
Obtenir une équation différentielle		✓			✓	
Obtenir une fonction de transfert		✓	✓	✓	✓	✓

I Filtrage d'un signal ($\star$)

1. *Quel type de filtre permet-il de passer du signal e au signal s ? Expliquer qualitativement.*



Réponse :
Les oscillations rapides (dont on notera T la période) de e se retrouvent dans s, elles doivent passer à travers le filtre.

e est modulé par un signal très basse fréquence (à valeur moyenne non nulle sur une période T), mais s a une valeur moyenne nulle. La composante basse fréquence, c'est à dire de période longue devant T et donc de pulsation faible, ne passe pas à travers le filtre.

C'est donc un filtre passe-haut qui permet de passer de e à s. Sa pulsation caratéristique ω_0 doit être inférieure à $2\pi/T$ pour laisser passer les oscillations de e.

II Fonctions de transfert ($\star$)

A l'aide d'un circuit RLC série, obtenez les fonctions de transfert des filtres suivants puis tracez les diagrammes de Bode en gain associés pour différentes valeurs du facteur de qualité. **Les tracés des asymptotes devront figurer sur vos graphiques** et leurs expressions devront être justifiées. *Les identifications aux formes canoniques se feront à l'aide des formules proposées dans le cours.*

Retrouver ensuite les deux équations différentielles reliant les tensions de sortie et d'entrée en conservant les grandeurs ω_0 et Q.

1. *Filtre passe bande du second ordre*

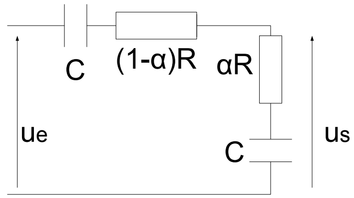
Réponse :
TODO

---

2. *Filtre passe haut du second ordre*

Réponse :
TODO

III Correcteur de tonalité ($\star$)



On étudie un montage utilisé pour la correction de tonalité sur un amplificateur audio.

On considère le circuit ci-contre, utilisé en régime sinusoïdal forcé. On posera $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$. On précise $\alpha \in [0, 1]$.

1. *Montrez que la fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme :*

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \ , \ H_0 \in \mathbb{R}$$

Exprimez H_0, ω_1 et ω_2 en fonction de α et ω_0.

Réponse :
On trouve bien $\underline{H}$ de la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Avec

$$H_0 = \frac{1}{2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\alpha RC} = \frac{\omega_0}{\alpha}, \quad \omega_2 = \frac{2}{RC} = 2\omega_0$$

---

2. *A quelle condition portant sur α a-t-on $\omega_1 < \omega_2$?*

Réponse :
$\omega_1 < \omega_2 \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\alpha} < 2\omega_0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

---

3. *On suppose $\alpha > \frac{1}{2}$. Construire les diagrammes de Bode asymptotiques en gain et phase des fonctions de transfert suivantes (justifiez les pentes des asymptotes et les points anguleux) :*

$$\underline{H}_1 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1} \;,\; \underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

En déduire le diagramme de Bode du filtre $H(\omega)$

Réponse :
Finalement, on a $G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2}$ et $\phi = \phi_1 + \phi_2$. On obtient donc les diagrammes de Bode asymptotiques en sommant les diagrammes asymptotiques de $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$.

---

4. *Même question si $\alpha < \frac{1}{2}$. Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?*

Réponse :
Le expressions des asymptotes n'ont pas changé, seul la position de ω_1 par rapport à ω_2 a changé puisqu'on a maintenant $\omega_2 < \omega_1$. La construction est tout à fait similaire. Si $\alpha = 0$, on a $\underline{H} = \underline{H_2}$. Le filtre est alors un passe-bas d'ordre 1.

---

5. *Justifiez la dénomination "correcteur de fréquences aigües".*

Réponse :
On remarque en traçant les courbes de gain total sur les deux diagrammes précédents qu'en jouant sur α on ne modifie pas le gain en basses fréquence mais seulement le gain en hautes fréquences. On peut donc régler l'atténuation ou l'amplification des fréquences aigües.

---

6. *Proposez un montage permettant de corriger uniquement les basses fréquences*

Réponse :
Il suffit de remplacer les condensateurs par des bobines.

IV Etude d'un filtre RC à l'oscilloscope ($\star\star$)

On considère un circuit RC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdal supposé idéal.

1. *En l'absence d'oscilloscope branché sur le circuit, déterminez la fonction de transfert en tension $\underline{H}$ si la grandeur de sortie est la tension aux bornes du condensateur puis la mettre sous sa forme canonique (c.f. cours).*

Réponse :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec}\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

---

2. *Quel type de filtre est ainsi réalisé ?*

Réponse :
On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

---

3. *Rappelez la définition de la pulsation de coupure ω_c à -3 dB d'un filtre puis donner son expression dans le cas présent.*

Réponse :
La pulsation de coupure ω_c est définie par :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

On obtient finalement $\omega_c = \omega_0$.

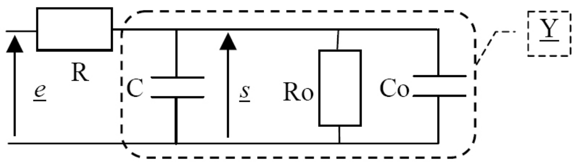
---

4. *Application numérique : calculez la fréquence de coupure f_c du filtre pour $R = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 22\,\mathrm{nF}$.*

Réponse :
L'application numérique donne $\underline{f_c = f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 1539\,\mathrm{kHz}}$.

Influence d'un oscilloscope sur le filtre RC

On utilise un oscilloscope dont les caractéristiques d'entrée sont indiquées : $1\,\mathrm{M}\Omega,\ 25\,\mathrm{pF}$; dans la suite, on désigne par R_0 et C_0 la résistance et la capacité correspondantes.



Cet appareil, branché sur le filtre précédent, correspond ainsi au circuit ci-dessus.

5. *Déterminez **simplement** le gain à **basse fréquence**, noté H_0', de l'ensemble.*

Réponse :

$$H_0' = \frac{R_0}{R+R_0}$$

6. *Exprimez l'admittance complexe $\underline{Y}$. Quelle est la limite à basse fréquence du déphasage de la tension $s(t)$ par rapport a l'intensité $i(t)$ parcourant le dipôle équivalent d'admittance $\underline{Y}$?*

Réponse :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega$$

7. *Déterminez la nouvelle fonction de transfert $\underline{H'} = \underline{s}/\underline{e}$ sous la forme*

$$\underline{H'} = \frac{H_0'}{1+j\omega/\omega_0'}$$

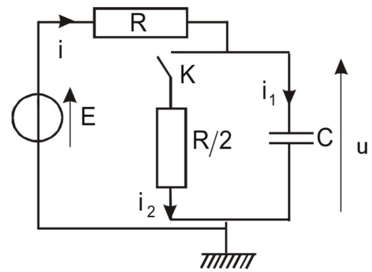
Réponse :

$$\underline{H'}(j\omega) = \frac{H_0'}{1+j\frac{\omega}{\omega_0'}} \text{ avec} H_0' = \frac{R_0}{R+R_0} \text{ et} \omega_0' = \frac{R+R_0}{RR_0}\frac{1}{C+C_0}$$

8. *Estimez ensuite les variations relatives du gain en BF et de la fréquences de coupure lors de l'ajout de l'oscilloscope. Ce dernier perturbe-t-il le montage*

Réponse :
Le gain maximal et la fréquence de coupure ont changé.
On peut évaluer cet effet numériquement. Le gain en basse fréquence passe de 1 à $H_0 = 1/1,0047$ soit une diminution relative de 0,5%

V Diagramme de Bode (⋆⋆)



On considère le circuit suivant et on se place en régime sinusoïdal.

L'interrupteur est fermé et nous remplaçons le générateur de f.e.m constante par une source idéale de tension de f.e.m. $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ où ω représente la pulsation du générateur.

On associe le complexe $\underline{u} = U\sqrt{2}\exp(j(\omega t+\varphi)) = \underline{U}\exp(j\omega t)$ à la tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$ où $\underline{U} = U\sqrt{2}\exp(j\varphi)$. De même, $\underline{E} = E\sqrt{2}$.

1. *Quelle est l'amplitude du signal $e(t)$? Que représente alors la grandeur E ?*

Réponse :
L'amplitude du signal $E(t)$ est $\boxed{E_m = \sqrt{2}E}$. La grandeur E représente donc $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$, il s'agit donc de la valeur efficace du signal.

2. *Calculez la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}}$ que l'on écrira sous la forme $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Préciser le module de $\underline{H}$ et le déphasage φ.*

Réponse :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1}{1+jRC\omega+2} = \frac{1}{3+jRC\omega} = \frac{1/3}{1+j\frac{RC}{3}\omega}$$

On a donc bien la forme demandée avec $\boxed{H_0 = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\omega_0 = \frac{3}{RC}}$

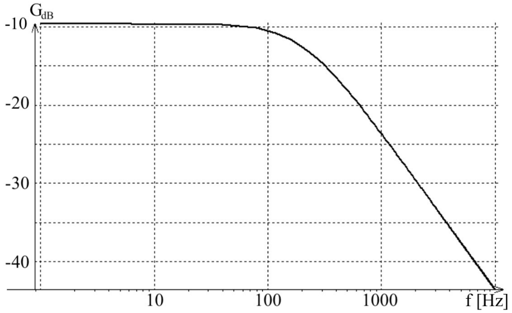
3. *Établissez l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C.*

Réponse :
Pour déterminer ω_c, on doit résoudre

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = \pm 1$$

4. On trace le diagramme de Bode en fonction de la fréquence f

   (a) *On obtient le graphe ci-contre. Déterminer graphiquement la valeur de f_c en précisant la méthode utilisée.*



   Réponse :
   Sur le graphique, on lit $\underline{f_c = 200\,\text{Hz}}$.

   (b) *En déduire la valeur de la capacité C si $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$.*

   Réponse :
   On a :

$$f_c = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{3}{2\pi RC} \Rightarrow \boxed{C = \frac{3}{2\pi R f_c}}$$

   L'application numérique donne $C = 2{,}4\,\mu\text{F}$.

5. *A l'aide de la fonction de transfert, retrouvez simplement l'équation différentielle liant $u(t)$ à $e(t)$?*

   Réponse :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1/3}{1 + j\frac{RC}{3}\omega} \Rightarrow 1 + j\frac{RC}{3}\omega\underline{U} = \frac{1}{3}\underline{E}$$
$$\Rightarrow U + \frac{RC}{3}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}E$$

6. *($\star\star\star$)Quelle sera l'action de ce filtre sur un signal créneau de fréquence $f = 1000\,\text{Hz}$ et de valeur moyenne nulle ? (pour cette question, il convient de prédire l'allure de $u_s(t)$ correspondante à $u_e(t)$).*

   Réponse :
   on a $f \gg f_0$, le filtre passe bas à donc un comportement intégrateur ($H \simeq \frac{G}{j\omega}$). On va donc obtenir un signal triangulaire de moyenne nulle. (la dérivée d'un signal triangulaire est bien un signal créneau)

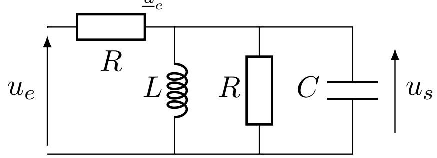
7. *($\star\star\star$)Même question pour $f = 10\,\text{Hz}$.*

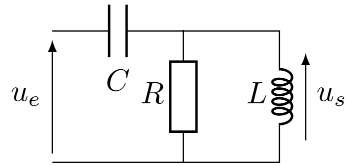
   Réponse :
   Lorsque $f' \ll f_0$, le fondamental ainsi que les premières harmoniques du signal créneau ne vont pas être filtrées. Le signal obtenu sera proche du signal d'entrée mais légèrement plus lissé (au minimum continu).

   Une autre approche consiste à considérer le problème d'un point de vue temporel. On observe ainsi une infinité de cycles charge/décharge du condensateur sous tension constante donc des portions d'exponentielles décroissantes.

VI Nature de deux filtres ($\star\star\star$)

On pose $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$ puis on considère les deux filtres suivants :

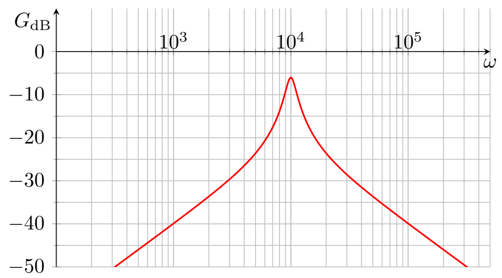


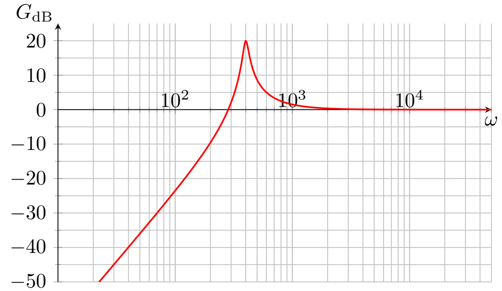


1. *Déterminez **simplement** la nature de ces filtres.*

   Réponse :
   Pour le premier circuit, on obtient $\underline{u}_s = 0$ en BF et HF, il s'agit donc à priori d'un filtre passe bande. Pour le deuxième, on a $\underline{u}_s = 0$ en BF (bobine équivalente à un fil) puis $\underline{u}_s = \underline{u}_e$ en HF (condensateur équivalent à un fil et bobine à un fil). Il s'agit donc d'un filtre passe haut.

On considère alors les deux diagrammes de Bode en gain suivants :





2. *Déterminez les valeurs numériques des constantes Q, ω_0 et G_0 des deux filtres en étudiant les asymptotes des diagrammes de Bode en gain correspondant où les pulsations sont indiquées en* $\mathrm{rad\,s^{-1}}$

   Réponse :
   Pour le filtre passe bande, on sait que les asymptotes BF et HF se croisent lorsque $\omega = \omega_0$ donc $\omega_0 = 10^4$ rad. Le gain max en dB est obtenue à résonance et vaut ici $-6dB$ ce qui donne $G_0 = 10^{-6/20} \approx 0,5$.

   Les deux asymptotes ont pour expression $G_{dB,BF} = 20\log(G_0) + 20\log(x) - 20\log(Q)$ et $G_{dB,HF} = 20\log(G_0) - 20\log(x) - 20\log(Q)$ avec $x = \omega/\omega_0$. Ces asymptotes se croisent bien lorsque $x = 1$ avec une ordonnée de $20\log(G_0/Q) \approx -20$ dB par lecture graphique. On en déduit que $G_0/Q \approx 0,1 \Rightarrow Q = G_0/0,1 \approx 5$.

   Pour le filtre passe haut, on observe de même que les asymptotes BF ($G_{dB,BF} = 20\log(G_0) + 40\log(x)$) et HF ($G_{dB,HF} = 20\log(G_0)$) se croisent lorsque $x = 1$ soit lorsque $\omega = \omega_0 \approx 400$ $rad.s^{-1}$. Le gain HF étant nul, on en déduit que $G_0 = 1$.

   Pour finir, on sait que $G_{db}(x = 1) = 20\log(G_0 Q) \approx 20$ dB par lecture graphique, on en déduit que $Q = 10/G_0 \approx 10$.

---

3. *Donner l'allure du signal recueilli en sortie du filtre passe bande pour un signal d'entrée de type créneau de moyenne nulle et de pulsation* $\omega = 2 \times 10^3$ rad/s.

   Réponse :
   Seul le deuxième harmonique (pulsation 5ω) se trouve dans la bande passante donc on obtiendra un signal quasi harmonique de pulsation $5\omega = \omega_0$

---

4. *Donner l'allure du signal recueilli en sortie du filtre passe bande pour un signal d'entrée de type créneau de moyenne nulle et de pulsation* $\omega = 2 \times 10^4$ rad/s.

   Réponse :
   Cette fois ci, l'ensemble du spectre se trouve dans une zone où le filtre à un comportement de type intégrateur. On obtiendra alors une primitive du signal créneau soit un signal triangulaire.

Éléments de réponses :

E3 Q2 : On doit trouver $\alpha > \frac{1}{2}$
E4 Q4 : On doit trouver $f_c = 1539\,\mathrm{Hz}$
E5 Q2 : On doit trouver $C = 2{,}4\,\mu\mathrm{F}$

E6 Q2 : Pour le premier circuit, on obtient $G_0 \approx 0,5$, $\omega_0 = 10^4$ $rad.s^{-1}$ *et* $Q \approx 5$