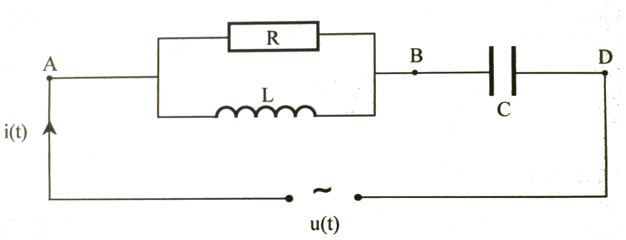
TD 13 | E4- **Régime sinusoïdal forcé et interférences**

	I	II	III	IV
Combiner plusieurs éléments	✓		✓	✓
Gerer des calculs			✓	✓
Etudier une résonance		✓	✓	
Analyser un schéma	✓			✓
Tracer un spectre		✓	✓	
Analyser un comportement asymptotique		✓	✓	
Obtenir une équation différentielle		✓		

I Mesure d'impédance (⋆)

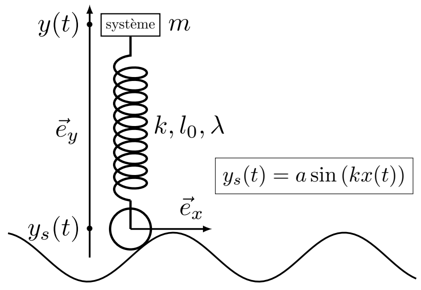
On considère le circuit représenté ci-dessous où le tronçon AB est constitué d'une bobine idéale d'inductance L montée en dérivation avec une résistance R et où le tronçon BD est constitué d'un condensateur de capacité C. On applique entre les bornes A et D du circuit une tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω.



1. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ de la portion de circuit AB.
2. Exprimer l'impédance complexe totale $\underline{Z_{AD}}$ du circuit et l'écrire sous la forme $\underline{Z_{AD}} = a + jb$.
3. En déduire l'expression, pour ce circuit, du déphasage $\phi_u - \phi_i$ entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$.
4. En déduire pour quelle expression notée ω_r de la pulsation ω le circuit est équivalent à une résistance pure.

II Entrée en résonance d'une suspension (⋆)

On considère le cas d'un véhicule de masse m roulant à la vitesse (horizontale) v_0 sur une route de profil harmonique $y(x) = a\sin(kx)$ avec $x = v_0t$. On posera par la suite $\omega = kv_0$.



Le véhicule est relié aux roues par une suspension, modélisée par un ressort de longueur à vide l_0, et de raideur k. De plus, on prendre en compte une force de frottement fluide exercée par l'air ambiant sur le véhicule d'expression $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$.

Dans toute la suite, on notera $y(t)$ l'abscisse du véhicule et $y_s(t)$, l'abscisse du sol.

1. Effectuer un bilan des force verticales exercées sur le véhicule
2. En déduire l'équation du mouvement pour l'inconnue y sous sa forme canonique.

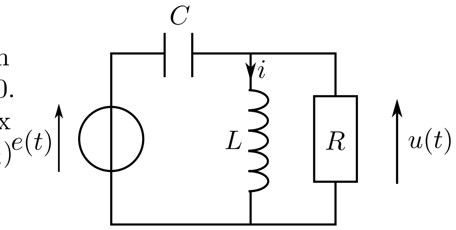
On cherche à obtenir une solution particulière $y_p(t)$ de cette équation sous la forme $y_p(t) = y_h(t) + y_c$ avec $y_h = Y\cos(\omega t + \phi)$, une fonction harmonique, associée à la partie harmonique du second membre et y_c, une fonction constante, associée à la partie constante du second membre.

3. De quelle équation y_c est-elle solution ? Exprimer alors y_c en fonction des données du problème.
4. De quelle équation y_h est-elle solution ? On pose alors $\underline{y}_h(t) = \underline{Y}_c e^{j\omega t}$ tel que $y_h(t) = \Re(\underline{y}_h(t))$. Déduire de ce qui précède l'expression de $\underline{Y}_c$ en fonction de λ, k, m, ω et a.

On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre du système et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$, son facteur de qualité

5. Vers quelle limite tend l'amplitude Y de $y_h(t)$ en basse fréquence ? De même, donner un équivalent de cette amplitude en haute fréquence. Exprimer ensuite cette amplitude pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ en fonction de a et de Q. En déduire la courbe de Y en fonction de ω pour différentes valeurs du facteur de qualité (par exemple 0,5 ; 1 ; 2)
6. La résonance est-elle obtenue pour toute les valeurs possible du facteur de qualité ? S'agit-il du même type de résonance que celle obtenue pour l'intensité d'un circuit RLC ?
7. (⋆⋆) Déterminer précisément, et par le calcul, à partir de quelle valeur notée Q_c la résonance apparaît. Cette dernière se caractérise par l'apparition d'un maximum local dans la courbe $|Y(\omega)|$.

III Étude de la résonance (⋆⋆)



Le circuit suivant est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$, avec $E_0 > 0$. On note $u(t) = U_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_u)$ la tension aux bornes de la résistance et $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_i)$ le courant traversant la bobine.

On donne $R = 100\,\Omega$, $L = 10\,\text{mH}$ et $C = 10\,\mu\text{F}$.

1. La constante E_0 correspond-elle à l'amplitude ou à la valeur efficace du signal $e(t)$. On justifiera la réponse en définissant ces deux termes.

III.1 Étude de $u(t)$

2. On note $\underline{u}(t) = \underline{U_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $u(t)$ tel que $u(t) = \Re(\underline{u}(t))$. Montrer que $\underline{U_0}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{E_0 \times (jx)^2}{1 + jx/Q + (jx)^2}$$

   où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer les constantes ω_0 et Q en fonction de L, C et R.
3. Exprimer $U_0(x)$ en fonction de E_0, x et Q.
4. Représenter le schéma électrique équivalent à basse fréquence et en déduire la limite de $U_0(x)$ à basse fréquence. Vérifier ce résultat à l'aide de la réponse à la question précédente. On donnera l'équivalent mathématique de $U_0(x)$ à basse fréquence.
5. Reprendre la question précédente pour les hautes fréquences.
6. Définir la notion de résonance. À partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de la tension $u(t)$?
7. Montrer qu'il existe une pulsation réduite de résonance x_r si et seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$. Pour cela, on écrira $U_0(x)$ sous la forme $U_0(x) = \dfrac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$, où $f(x)$ est une fonction que l'on définira. En déduire l'expression de la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q. Comparer ω_r à ω_0.
8. Donner l'expression de U_0 pour $x = 1$. Calculer le facteur de qualité.
9. Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.
10. Exprimer la phase ϕ_u en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_u en fonction de x.

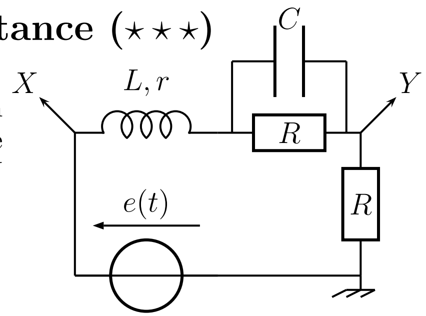
III.2 Étude de $i(t)$

11. On note $\underline{i}(t) = \underline{I_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $i(t)$ tel que $i(t) = \Re(\underline{i}(t))$. Montrer que $\underline{I_0}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{I_0} = \frac{I_{\max}}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

   où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer $I_{\max}$ en fonction de E_0, L, C et R.
12. Justifier que l'expression de $I_{\max}$ obtenue est homogène.
13. Exprimer I_0 en fonction de $I_{\max}$, x et Q. Faire l'étude des limites de la fonction $I_0(x)$. On précisera l'équivalent mathématique de $I_0(x)$ à haute et basse fréquences.
14. A partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de l'intensité $i(t)$?
15. Déterminer la pulsation réduite à la résonance.
16. Définir la bande passante $\Delta x = [x_1, x_2]$. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de Q.
17. Tracer l'allure de I_0 en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.
18. Exprimer la phase ϕ_i en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_i en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.

IV Détermination d'une inductance (⋆⋆⋆)



On réalise le montage représenté ci-contre, et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\,\text{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\text{F}$.

1. En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.

Éléments de réponses :

E1 Q4 : Le dipôle se comporte comme un résistor pour $\omega_r = \frac{R/L}{\sqrt{R^2(C/L)-1}}$

E3 Q7 : $x_r = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$

E4 Q1 : L = $44\,\text{mH}$