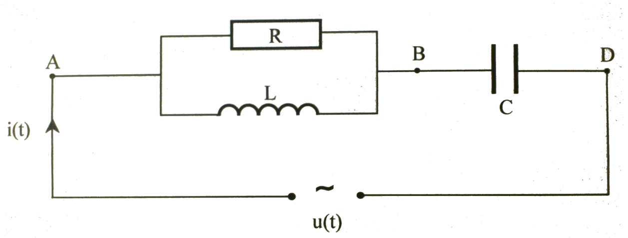
TD 13 | E4- **Régime sinusoïdal forcé et interférences**

	I	II	III	IV
Combiner plusieurs éléments	✓		✓	✓
Gerer des calculs			✓	✓
Etudier une résonance		✓	✓	
Analyser un schéma	✓			✓
Tracer un spectre		✓	✓	
Analyser un comportement asymptotique		✓	✓	
Obtenir une équation différentielle		✓		

I Mesure d'impédance ($\star$)

On considère le circuit représenté ci-dessous où le tronçon AB est constitué d'une bobine idéale d'inductance L montée en dérivation avec une résistance R et où le tronçon BD est constitué d'un condensateur de capacité C. On applique entre les bornes A et D du circuit une tension sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω.



1. *Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}}$ de la portion de circuit AB.*

Réponse :

$$\frac{1}{\underline{Z_{AB}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z_{AB}} = \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L}}$$

2. *Exprimer l'impédance complexe totale $\underline{Z_{AD}}$ du circuit et l'écrire sous la forme $\underline{Z_{AD}} = a + jb$.*

Réponse :

$$\underline{Z_{AD}} = \underline{Z_{AB}} + \frac{1}{jC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z_{AD}} = \frac{\frac{L}{C} - \frac{jR}{C\omega} + j\omega RL}{R + j\omega L} = a + jb$$

avec

$$\boxed{a = \frac{1}{R\left(\frac{1}{(L\omega)^2} + \frac{1}{R^2}\right)}} \quad ; \quad \boxed{b = \frac{1}{L\omega\left(\frac{1}{L^2\omega^2} + \frac{1}{R^2}\right)} - \frac{1}{C\omega}}$$

$$\boxed{a = \frac{RL^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}} \quad ; \quad \boxed{b = \frac{R^2 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2} - \frac{1}{C\omega}}$$

3. *En déduire l'expression, pour ce circuit, du déphasage $\phi_u - \phi_i$ entre la tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$.*

Réponse :

$$\phi_u - \phi_i = \arg(\underline{Z_{AD}}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{car} \quad a > 0.$$

On trouve

$$\boxed{\phi_u - \phi_i = \arctan\left(\frac{R}{L\omega} - \frac{R}{C\omega(L\omega)^2} - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

4. *En déduire pour quelle expression notée ω_r de la pulsation ω le circuit est équivalent à une résistance pure.*

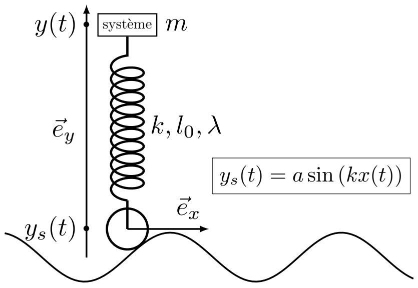
Réponse :
On veut trouver ω_r tel que $b = 0$.

$$b = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{(L\omega_r)^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{C}{L} \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_r = \frac{R}{\sqrt{LCR^2 - L^2}} = \frac{R/L}{\sqrt{R^2(C/L) - 1}}}$$

Cette expression est bien homogène car R/L a pour dimension l'inverse d'un temps tandis que $R^2(C/L) = Q_{//}^2$ est bien sans dimension (facteur de qualité au carré).

II Entrée en résonance d'une suspension ($\star$)

On considère le cas d'un véhicule de masse m roulant à la vitesse (horizontale) v_0 sur une route de profil harmonique $y(x) = a\sin(kx)$ avec $x = v_0 t$. On posera par la suite $\omega = kv_0$.



Le véhicule est relié aux roues par une suspension, modélisée par un ressort de longueur à vide l_0, et de raideur k. De plus, on prendre en compte une force de frottement fluide exercée par l'air ambiant sur le véhicule d'expression $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$.

Dans toute la suite, on notera $y(t)$ l'abscisse du véhicule et $y_s(t)$, l'abscisse du sol.

1. *Effectuer un bilan des force verticales exercées sur le véhicule*

Réponse :
On se place en base cartesienne et on obtient pour le bilan des forces
- Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$
- La force de frottement $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$
- La force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_y$ avec $l = y(t) - y_s(t)$

---

2. *En déduire l'équation du mouvement pour l'inconnue y sous sa forme canonique.*

Réponse :
On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule dans le référentiel galiléen lié au sol selon l'axe vertical $\vec{e}_y$.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ky + ky_s + kl_0$$

soit sous la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}(y_s + l_0) - g}$$

On cherche à obtenir une solution particulière $y_p(t)$ de cette équation sous la forme $y_p(t) = y_h(t) + y_c$ avec $y_h = Y\cos(\omega t + \phi)$, une fonction harmonique, associée à la partie harmonique du second membre et y_c, une fonction constante, associée à la partie constante du second membre.

3. *De quelle équation y_c est-elle solution ? Exprimer alors y_c en fonction des données du problème.*

Réponse :
On ne garde que la partie constante du second membre d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y_c = \frac{k}{m}(l_0) - g$$

d'où l'on déduit $\boxed{y_c = l_0 - mg/k}$.

---

4. *De quelle équation y_h est-elle solution ? On pose alors $\underline{y}_h(t) = \underline{Y}_c e^{j\omega t}$ tel que $y_h(t) = \Re(\underline{y}_h(t))$. Déduire de ce qui précède l'expression de $\underline{Y}_c$ en fonction de λ, k, m, ω et a.*

Réponse :
Comme pour la question précédente, on ne garde cette fois ci que la partie harmonique du second membre d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\cos(\omega t - \pi/2)$$

en remarquant que $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$. On passe ensuite l'équation aux complexe d'où

$$(j\omega)^2\underline{Y}_c + \frac{\lambda}{m}j\omega\underline{Y}_c + \frac{k}{m}\underline{Y}_c = \frac{k}{m}ae^{-j\pi/2}e^{j\omega t}$$

d'où l'on déduit après simplification

$$\underline{Y}_c = \frac{ae^{-j\pi/2}}{1 + \frac{\lambda}{k}j\omega + \frac{m}{k}(j\omega)^2}$$

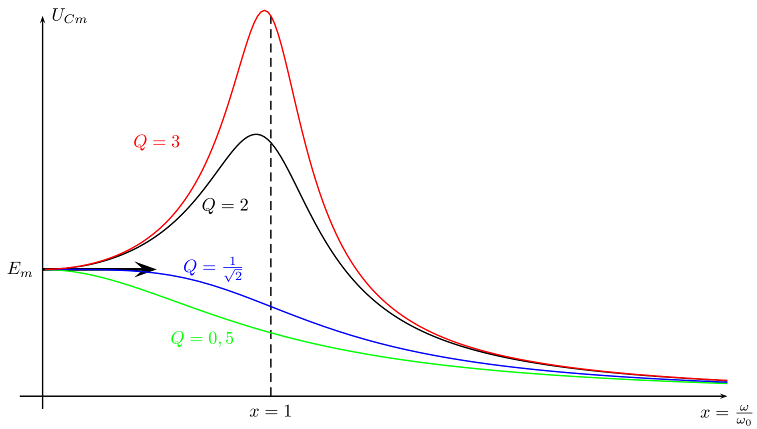
On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre du système et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$, son facteur de qualité

5. *Vers quelle limite tend l'amplitude Y de $y_h(t)$ en basse fréquence ? De même, donner un équivalent de cette amplitude en haute fréquence. Exprimer ensuite cette amplitude pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ en fonction de a et de Q. En déduire la courbe de Y en fonction de ω pour différentes valeurs du facteur de qualité (par exemple 0,5 ; 1 ; 2)*

Réponse :
On a $Y = |\underline{Y}_c| \to a$ lorsque $\omega \to 0$. De même, en haute fréquences, on obtient $Y \sim \frac{k}{m}\frac{a}{\omega^2}$ donc l'amplitude tend vers 0 lorsque $\omega \to +\infty$.

De plus, on a pour $\omega = \omega_0$, $Y = a\frac{k}{\lambda\omega_0} = a\frac{mk}{\lambda} = aQ$

Ces expressions permettent de tracer les courbes demandées.



6. *La résonance est-elle obtenue pour toute les valeurs possible du facteur de qualité ? S'agit-il du même type de résonance que celle obtenue pour l'intensité d'un circuit RLC ?*

Réponse :
On observe graphiquement que la résonance n'apparait que lorsque Q est élevé. Ce résultat est contraire à celui obtenu en cours. C'est donc bien un autre type de résonance que celui en intensité. C'est logique puisque l'élongation du système ressort est analogue à la charge du condensateur, soit à C près analogue à la tension ; en étudiant la vitesse du système on trouverait la même résonance.

7. *(⋆⋆) Déterminer précisément, et par le calcul, à partir de quelle valeur notée Q_c la résonance apparaît. Cette dernière se caractérise par l'apparition d'un maximum local dans la courbe $|Y(\omega)|$.*

Réponse :
On a

$$|Y| = \frac{a}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors poser $x = \omega/\omega_0$, appelée la pulsation réduite, afin d'alléger les calculs. Cette notation sera régulièrement reprise en RSF.

Il y a résonance lorsque $|Y|$ passe par un extremum local pour $x \in]0, +\infty[$. Il convient alors d'étudier les variation du module, où plus simplement, du carré de son dénominateur :

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + x^2/Q^2 \Rightarrow f'(x) = 2(-2x)(1 - x^2) + 2x/Q^2$$

L'extremum est obtenu lorsque la dérivée est nulle (pour $x > 0$) soit après simplification par $2x$:

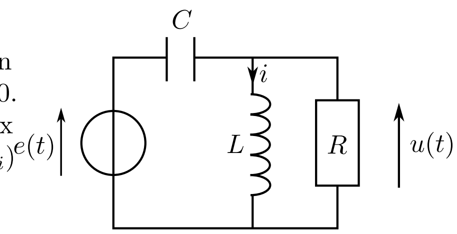
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2(1 - x^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette dernière équation admet une solution sur $]0, +\infty[$ seulement si $1 - 1/(2Q^2) > 0$ donc si

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

III Étude de la résonance (⋆⋆)

Le circuit suivant est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$, avec $E_0 > 0$. On note $u(t) = U_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_u)$ la tension aux bornes de la résistance et $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_i)$ le courant traversant la bobine.



On donne $R = 100\,\Omega$, $L = 10\,\text{mH}$ et $C = 10\,\mu\text{F}$.

1. *La constante E_0 correspond-elle à l'amplitude ou à la valeur efficace du signal $e(t)$. On justifiera la réponse en définissant ces deux termes.*

Réponse :
Le signal $e(t)$ est sinusoïdal. L'amplitude est la valeur maximale, donc $E_{\max} = E_0\sqrt{2}$. La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est $E_{eff} = E_{\max}/\sqrt{2} = E_0$. Donc ici E_0 correspond à la <u>valeur efficace</u> de $e(t)$.

III.1 Étude de $u(t)$

2. *On note $\underline{u}(t) = \underline{U_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $u(t)$ tel que $u(t) = \Re(\underline{u}(t))$. Montrer que $\underline{U_0}$ peut se mettre sous la forme :*

$$\underline{U_0} = \frac{E_0 \times (jx)^2}{1 + jx/Q + (jx)^2}$$

où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer les constantes ω_0 et Q en fonction de L, C et R.

Réponse :
Soit $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente à l'association en parallèle de la bobine et de la résistance. On applique un pont diviseur de tension :

$$\underline{U_0} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + 1/jC\omega}E_0 = \frac{E_0}{1 + \dfrac{1}{jC\omega\underline{Z_{eq}}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jLR\omega}$$

$$\underline{U_0} = \frac{E_0}{1 + \dfrac{R + jL\omega}{jC\omega \times jRL\omega}} = \frac{E_0 \times LC(j\omega)^2}{1 + jL\omega/R + LC(j\omega)^2} \quad ; \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

---

3. *Exprimer $U_0(x)$ en fonction de E_0, x et Q.*

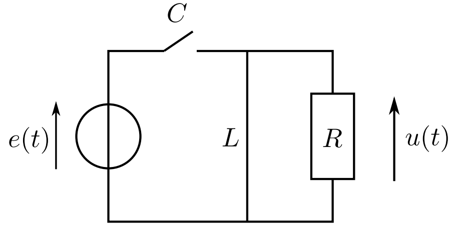
Réponse :

$U_0(x)$ est le module de $\underline{U_0}$: $\boxed{U_0 = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}E_0}$

---

4. *Représenter le schéma électrique équivalent à basse fréquence et en déduire la limite de $U_0(x)$ à basse fréquence. Vérifier ce résultat à l'aide de la réponse à la question précédente. On donnera l'équivalent mathématique de $U_0(x)$ à basse fréquence.*

Réponse :
A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil.



La tension $u(t)$ est celle aux bornes d'un fil, donc $\boxed{\lim_{\omega \to 0} U_0 = 0}$.

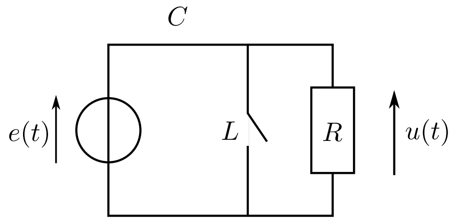
Équivalent de $U_0(x)$:

$$\boxed{U_0(x) \underset{x \ll 1}{\sim} x^2 E_0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0}$$

---

5. *Reprendre la question précédente pour les hautes fréquences.*

Réponse :
A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert.



La tension $u(t)$ est celle du générateur, donc $\boxed{\lim_{\omega \to +\infty} U_0 = E_0}$.

Équivalent de $U_0(x)$:

$$\boxed{U_0(x) \underset{x \gg 1}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}}E_0 = E_0}$$

---

6. *Définir la notion de résonance. À partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de la tension $u(t)$?*

Réponse :
La résonance d'un signal correspond à un maximum du signal pour une pulsation non nulle. Dans le cas de $u(t)$, l'étude des limites ne permet pas de conclure quant à l'existence d'un maximum pour x donné.

---

7. *Montrer qu'il existe une pulsation réduite de résonance x_r si et seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$. Pour cela, on écrira $U_0(x)$ sous la forme $U_0(x) = \dfrac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$, où $f(x)$ est une fonction que l'on définira. En déduire l'expression de la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q. Comparer ω_r à ω_0.*

Réponse :
On réécrit $U_0(x)$ de manière à ce que seul le dénominateur dépende de x :

$$U_0(x) = \frac{E_0}{\sqrt{(1/x^2-1)^2 + 1/(x^2Q^2)}}$$

On pourrait faire un changement de variable en posant $u = 1/x^2$.
La fonction $U_0(x)$ est maximale quand la fonction $f(x) = (x^{-2}-1)^2 + x^{-2}/Q^2$ est minimale. On dérive par rapport à x :

$$\frac{df}{dx} = 2(x^{-2}-1)\times(-2x^{-3}) + (-2x^{-3})/Q^2 = -2x^{-3}\left(2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\frac{1}{Q^2}\right)$$

On cherche la pulsation réduite x_r telle que $f'(x_r) = 0$:

$$f'(x_r) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{1}{x_r^2}-1\right)+\frac{1}{Q^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{Q^2}$$

Cette équation admet une solution réelle si $1 - \dfrac{1}{Q^2} > 0$, soit $Q > 1/\sqrt{2}$, alors :

$$\boxed{x_r = \frac{1}{\sqrt{1-1/(2Q^2)}} \quad \text{si} \quad Q > 1/\sqrt{2}}$$

On constate que $x_r > 1$, donc $\boxed{\omega_r = x_r\omega_0 > \omega_0}$.

---

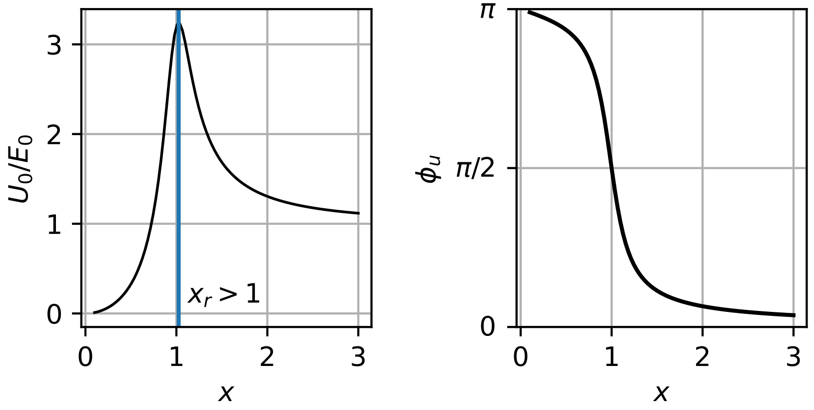
8. *Donner l'expression de U_0 pour $x = 1$. Calculer le facteur de qualité.*

Réponse :
$U_0(x=1) = QE_0$ et $Q = 3,2$

---

9. *Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.*

Réponse :



---

10. *Exprimer la phase ϕ_u en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_u en fonction de x.*

Réponse :
$\phi_u = \arg(\underline{U_0})$, or la partie réelle du dénominateur de $\underline{U_0}$ change de signe en fonction de x, on ne peut pas appliquer la fonction arctangente. On réécrit $\underline{U_0}$ en multipliant au numérateur et au dénominateur par $-j$:

$$\underline{U_0} = \frac{jE_0x^2}{x/Q - j(1-x^2)} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\phi_u(x) = \pi/2 + \arctan\left(\frac{Q(1-x^2)}{x}\right)}$$

Étude des limites :
— $\lim_{x\to 0}\phi_u(x) = \pi$
— $\lim_{x\to+\infty}\phi_u(x) = 0$
— $\phi_u(x=1) = \pi/2$

III.2 Étude de $i(t)$

11. *On note $\underline{i}(t) = \underline{I_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $i(t)$ tel que $i(t) = \Re(\underline{i}(t))$. Montrer que $\underline{I_0}$ peut se mettre sous la forme :*

$$\underline{I_0} = \frac{I_{max}}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer I_{max} en fonction de E_0, L, C et R.

Réponse :
On applique la loi d'Ohm généralisée sur la bobine :

$$\underline{I_0} = \frac{U_0}{jL\omega} = \frac{E_0RC/L}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$$

Par identification, on retrouve les expressions de Q et ω_0 et on a $\boxed{I_{\max} = E_0RC/L}$.

---

12. *Justifier que l'expression de I_{max} obtenue est homogène.*

Réponse :
On sait que $[RC] = [L/R] = T$:

$$[E_0RC/L] = [E_0/R] \times [R^2C/L] = I \times \frac{[RC]}{[L/R]} = I$$

C'est bien une intensité électrique.

---

13. *Exprimer I_0 en fonction de I_{max}, x et Q. Faire l'étude des limites de la fonction $I_0(x)$. On précisera l'équivalent mathématique de $I_0(x)$ à haute et basse fréquences.*

Réponse :
I_0 est le module de $\underline{I_0}$:

$$\boxed{I_0(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}}$$

Étude des limites :
- $\lim_{x\to0} I_0(x) = \lim_{x\to0} I_{\max}x/ = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} I_0(x) = \lim_{x\to+\infty} I_{\max}/(Qx) = 0$

---

14. *A partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de l'intensité $i(t)$?*

Réponse :
Comme $I_0(x) > 0$ et que les limites à haute et basse fréquences sont nulles, il existe nécessairement une résonance en intensité.

---

15. *Déterminer la pulsation réduite à la résonance.*

Réponse :
$I_0(x)$ est maximale pour $x_r = 1$, alors $I_0(x = 1) = I_{\max}$.

---

16. *Définir la bande passante $\Delta x = [x_1, x_2]$. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de Q.*

Réponse :
Les valeurs de $x \in \Delta x$ vérifient $\boxed{I_0(x) \geq I_{\max}/\sqrt{2}}$. On cherche les solutions de l'équation $I_0(x) = I_{\max}/\sqrt{2}$:

$$\frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad (Q(x - 1/x))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x - 1/x) = \pm 1$$

On obtient deux trinômes de même discriminent :

$$Qx^2 \pm x - Q = 0 \quad ; \quad \Delta = 1 + 4Q^2$$

Parmi les quatre solutions, seules deux sont positives :

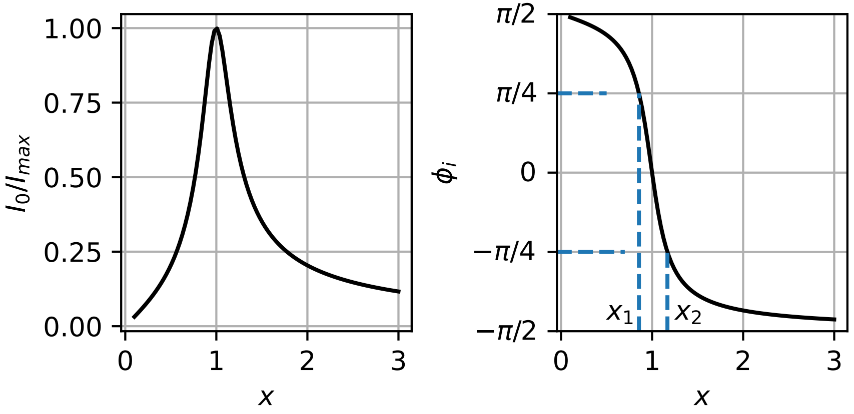
$$\boxed{x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}}$$

On retrouve $\Delta x = 1/Q$, soit $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1/Q$.

---

17. *Tracer l'allure de I_0 en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.*

Réponse :



18. *Exprimer la phase ϕ_i en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_i en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.*

Réponse :
$\phi_i = \arg(\underline{I_0})$. La partie réelle du dénominateur de $\underline{I_0}$ est toujours positive, donc on peut utiliser la fonction arctangente :

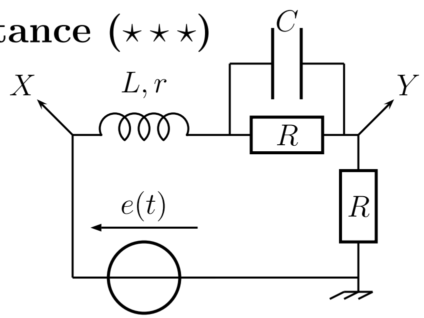
$$\boxed{\phi_i = -\arctan[Q(x - 1/x)]}$$

— $\lim_{x\to 0} \phi_i(x) = \pi/2$
— $\lim_{x\to +\infty} \phi_i(x) = -\pi/2$
— $\phi_i(x = 1) = 0$
— $\phi_i(x_1) = \pi/4$ et $\phi_i(x_2) = -\pi/4$

IV Détermination d'une inductance ($\star\star\star$)

On réalise le montage représenté ci-contre, et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\,\mathrm{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$.



1. *En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.*

Réponse :
Sur la voie X, on visualise $e(t)$, et sur la voie Y, on visualise la tension $Ri(t)$. S'il n'y a pas de déphasage entre ces deux voies, c'est que le courant $i(t)$ délivré par le générateur est en phase avec la tension $e(t)$ délivrée par le générateur. Donc l'impédance totale du circuit est un réel (partie imaginaire nulle).
Exprimons l'impédance totale : $\underline{Z} = r + jL\omega + \underline{Z'} + R$ où $\underline{Z'}$ est l'impédance de l'association en parallèle de la résistance R et de la capacité C.

$$\underline{Z'} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = r + R + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{Z} = r + R + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right)$$

On veut $\mathrm{Im}[\underline{Z}] = 0$, soit $\boxed{L = \dfrac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = 44\,\mathrm{mH}}$.

Éléments de réponses :

E1 Q4 : Le dipôle se comporte comme un résistor pour $\omega_r = \frac{R/L}{\sqrt{R^2(C/L) - 1}}$

E3 Q7 : $x_r = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}}$ *si* $Q > 1/\sqrt{2}$

E4 Q1 : $L = 44\,\mathrm{mH}$