TD 12 | O5- **Interférences et battements**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Effectuer un calcul d'incertitude				✓			
Réaliser une approximation							✓
Démontrer un résultat	✓						
Gerer des calculs		✓			✓	✓	✓
Etudier un phénomène de battement			✓			✓	
Manipuler des valeurs efficaces	✓	✓					
Faire preuve de sens physique				✓			✓
Etudier un phénomène d'interférence				✓	✓		✓
Réaliser un schéma			✓		✓		✓

I Valeur moyenne et valeur efficace ($\star$)

On considère deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$. On appelle $S(t)$ le signal $s_1(t)+s_2(t)$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies (justifiez la réponse par un raisonnement ou un contre-exemple) ?

1. *On a toujours* $\langle S\rangle = \langle s_1\rangle + \langle s_2\rangle$

Réponse :
Vrai, par linéarité de l'intégrale ; en effet, on a

$$\langle S\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\mathrm{d}t = \langle s_1\rangle + \langle s_2\rangle$$

d'où le résultat.

---

2. *On a toujours* $\langle 2s_1\rangle = 2\langle s_1\rangle$

Réponse :
Vrai, toujours par linéarité de l'intégrale. Cette fois, on a

$$\langle 2s_1\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T 2s_1(t)\mathrm{d}t = 2\frac{1}{T}\int_0^T s_1(t)\mathrm{d}t = 2\langle s_1\rangle$$

d'où le résultat.

---

3. *On a toujours* $S_{eff} = s_{1,eff} + s_{2,eff}$

Réponse :
Faux, contre exemple : $s_1 = \cos(\omega t)$ et $s_2 = -\cos(\omega t)$. On obtient $S = 0$ donc de valeur efficace nulle, tandis que $s_{1,eff} = s_{2,eff} = 1/\sqrt{2}$ donc leurs somme est non nulle.

II Signaux carré et harmoniques ($\star$)

On considère le signal carré périodique de période T défini par :

$$s(t) = -E \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \text{ et } s(t) = E \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$$

1. *Représentez graphiquement $s(t)$ puis calculez sa valeur moyenne.*

Réponse :
La courbe est celle d'un signal créneau. De plus,

$$< s >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} -E\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T/2}^T E\mathrm{d}t = 0$$

Ce signal est donc de moyenne nulle.

---

2. *Calculez sa valeur efficace.*

Réponse :
Ici, pas besoin de décomposer en deux termes :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T E^2\mathrm{d}t} = |E|$$

En effet, la moyenne de la fonction constante $t \mapsto E^2$ est E^2.

---

3. *Reprendre les questions précédentes pour le signal $h = A\cos(\omega t + \varphi)$, avec $A > 0$.*

Réponse :

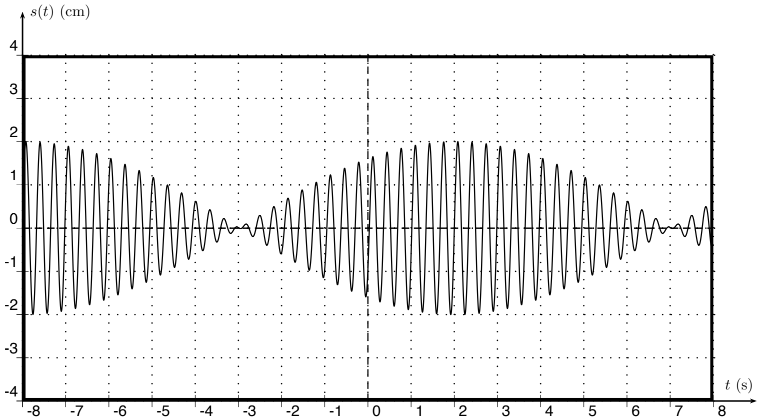
On trouve après calculs $< h >= 0$ puis $H_{eff} = A/\sqrt{2}$; on utilise pour cela le fait que

$$cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}$$

Et on sépare l'intégrale en deux ; le premier terme constant donne le résultat proposé tandis que l'intégrale du second est nulle.

III Battements v1 ($\star\star$)

On superpose deux signaux de fréquences proches et l'on obtient l'enregistrement de la figure ci-dessous.



1. *Déterminez la fréquence et l'amplitude des deux signaux.*

Réponse :
On obtient d'après le cours $f_1 + f_2 = 2/T$ et $f_2 - f_1 = 1/\Delta t_{\text{bat}}$. On inverse ces équations pour isoler les fréquences :

$$f_1 = \frac{1}{T} - \frac{1}{2\Delta t_{\text{bat}}} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{T} + \frac{1}{2\Delta t_{\text{bat}}}$$

De plus, on mesure graphiquement $\Delta t_{\text{bat}} \approx 10\,\text{s}$ puis $T \approx 1/3\,\text{s}$. On en déduit alors

$$f_1 \approx 2{,}95\,\text{Hz} \quad \text{et} \quad f_1 \approx 3{,}05\,\text{Hz}$$

Concernant les amplitudes, on a au maximum pour l'enveloppe, $a_1 + a_2 = s_{\max}$ et au minimum, $a_2 - a_1 = s_{\min}$ avec graphiquement, $s_{\max} \approx 2\,\text{cm}$ et $s_{\min} \approx 0\,\text{cm}$. On en déduit en résolvant le système que $a_2 = a_1 = 1\,\text{cm}$.

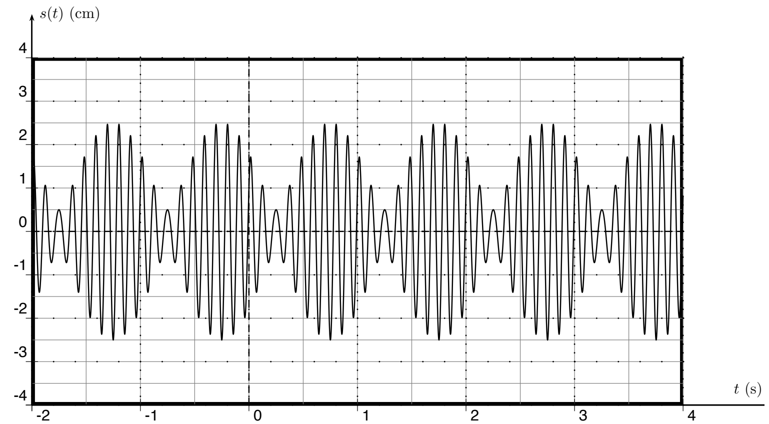
---

2. *Dessinez l'allure du signal obtenu lors de la superposition des signaux suivants :*

$$s_1(t) = 1,5\cos(2\pi f_1 t) \quad et \quad s_2(t) = 1,5\cos(2\pi f_2 t)$$

avec $f_1 = 9\,\text{Hz}$ *et* $f_2 = 10\,\text{Hz}$.

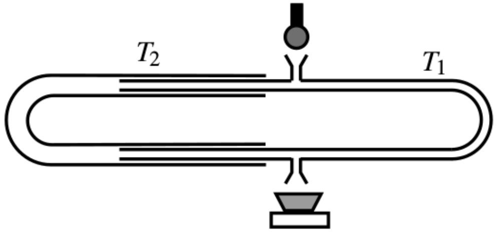
Réponse :
On déduit des fréquences $T = 2/(f_1 + f_2) \approx 0{,}105\,\text{s}$ et $\Delta t_{\text{bat}} = 1/(f_1 - f_1) = 1\,\text{s}$ d'où la courbe suivante :



IV Mesure de la vitesse du son ($\star\star$)

Le trombone de Koenig est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Le haut-parleur, alimenté par un générateur de basses fréquences, émet un son de fréquence $f = 1500\,\text{Hz}$.

On mesure le signal à la sortie avec un microphone branché sur un oscilloscope. En déplaçant la partie mobile T_2, on fait varier l'amplitude du signal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T_2 de $d = 11{,}5\,\text{cm} \pm 2\,\text{mm}$.



1. *Déterminer la valeur de la célérité du son dans l'air à 20°C, température à laquelle l'expérience est faite.*

   Réponse :

   Lorsque le microphone capte un premier minimum d'amplitude, on observe des interférences destructives pour les deux ondes passées par la gauche (chemin optique L_{gauche}) et la droite (chemin optique L_{droite}). Ainsi, il existe un entier relatif p tel que $\delta = p\lambda$ avec $\delta = L_{\text{gauche}} - L_{\text{droite}}$ la différence de marche.

   Lors du prochain passage par un minimum, on obtient à nouveau des interférences destructives, correspondant à l'entier suivant, $p+1$. Ainsi, il vient $\delta' = (p+1)\lambda$ avec $\delta' = L'_{\text{gauche}} - L_{\text{droite}}$ la nouvelle différence de marche.

   On combine ces deux relations pour obtenir $\delta' - \delta = (p+1-p)\lambda = \lambda$. Or l'écart entre les différences de marches est donné par $\delta' - \delta = L'_{\text{gauche}} - L_{\text{gauche}} = 2d$ car l'onde effectue un aller et retour dans la partie gauche du trombone.

   Au final, on trouve $2d = \lambda$ et on en déduit pour la célérité :

   $$\boxed{c = 2df \approx 345\,\text{m/s}}$$

---

2. *Donner l'incertitude associée à cette mesure.*

   Réponse :

   On a alors en appliquant la formule des propagations d'incertitudes pour un produit :

   $$\frac{u_c}{c} = \sqrt{\left(\frac{u_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{u_f}{f}\right)^2}$$

   or le deuxième terme dans la racine est négligeable par rapport au premier d'après l'énoncé. On en déduit :

   $$\boxed{u_c = \frac{c}{d}u_d = 2fu_d \approx 6\,\text{m/s}}$$

V Interférences dans une cuve à onde ($\star$)

On produit des ondes progressives circulaires à la surface de l'eau en utilisant une cuve à ondes (plan Oxy). La célérité c de l'onde est mesurée et vaut $c = 0{,}40\,\text{m/s}$. Le point source S de la surface du liquide contenu dans la cuve à onde est animé d'un mouvement vertical sinusoïdal de fréquence $f = 20\ Hz$ et d'amplitude a supposée constante $a = 2\,\text{mm}$ (on néglige l'amortissement dû aux forces de frottements).

On note (Oz) l'axe vertical (vers le haut). L'élongation de S s'écrit : $z_s(t) = a\cos(\omega t)$.

1. *Calculez la longueur d'onde λ de l'onde progressive.*

   Réponse :
   On a $\lambda = c/f \approx 2\,\text{cm}$

On considère un point M de la surface de l'eau situé à $d = SM$ du point S.

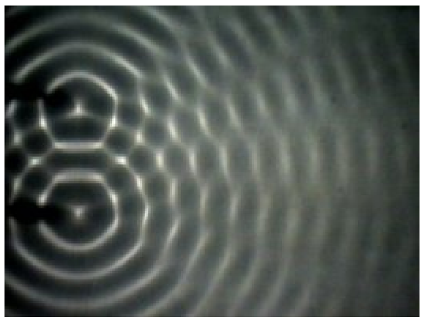
2. *Écrivez l'expression de $z_M(t)$.*

   Réponse :
   On obtient $z_M(t) = a\cos(\omega t - kd)$ avec $k = 2\pi/\lambda$.

---

3. *On se place dans le cas où $d = 12\,\text{cm}$: le point M vibre-t-il en phase ou en opposition de phase avec le point source S ? Justifiez.*

   Réponse :
   On a $|\Delta\varphi| = kd = 6 \times 2\pi$. Le déphasage est un multiple entier de 2π donc les vibrations sont donc en phase.



On réalise maintenant des interférences à la surface de l'eau. Deux points sources synchrones, notés S_1 et S_2 vibrant en phase et ayant la même amplitude a émettent chacun une onde progressive. On s'intéresse à la zone où les deux ondes interfèrent.

4. *Rappelez la définition de la différence de marche δ.*

Réponse :
D'après le cours, on a $\delta = S_1M - S_2M$
Pour aller plus loin :
Définir $\delta = S_2M - S_1M$ est aussi possible, et permettra d'obtenir les mêmes résultats, par parité de la fonction cosinus.

---

5. *On considère un point M tel que $S_1M = 8\,\text{cm}$ et $S_2M = 17\,\text{cm}$. Quel type d'interférences y observe-t-on ? Justifiez. Avec quelle amplitude le point M vibre-t-il ?*

Réponse :
Ici, $\delta = 9\,\text{cm} \Rightarrow |\Delta\varphi| = k\delta = 9\pi = \pi + 4 \times 2\pi$. On obtient alors des interférences destructives.

On considère le segment $[S_1S_2]$ avec $S_1S_2 = L = 11\,\text{cm}$. On note O le milieu de ce segment.

6. *Determiner les expressions de S_1M et S_2M en fonction de x, la coordonnée du point $M \in [S_1, S_2]$. En choisira arbitrairement $x = 0$ lorsque M est en O.*

Réponse :
On a $S_1M = x + L/2$ et $S_2M = L/2 - x$ par lecture graphique sur un schéma correctement tracé.

---

7. *Après avoir établi l'expression de la superposition des deux ondes sur ce segment, représentez graphiquement $z(x,t)$.*

Réponse :
On a $z(x,t) = a\cos(\omega t - kS_1M) + a\cos(\omega t - kS_2M) = a\cos(\omega t - kx - kL/2) + a\cos(\omega t + kx - kL/2)$

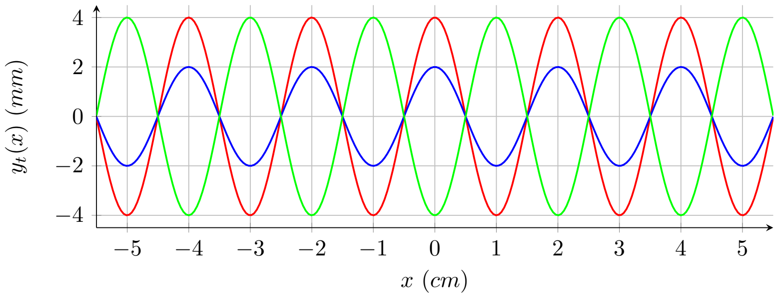
Pour aller plus loin :
Lorsque l'on s'interresse à la distance parcourue depuis un emméteur (ici S_1M ou S_2M), on obtient toujours un "-" entre le terme temporel et le terme spatial dans la phase de l'onde. En effet, la distance parcourue est toujours une fonction croissante du temps.

On remarque que pour la coordonnée x, on obtient $\omega t - kx$ pour l'onde qui se déplace vers la droite (x croissant au cours du temps) et $\omega t + kx$ pour l'onde qui se déplace vers la gauche (x décroissant au cours du temps). Cela est en accord avec le chapitre sur les ondes stationnaires.
On peut alors simplifier cette expression pour obtenir :

$$z(x,t) = a\big(\cos(\omega t - kL/2)\cos(kx) + \sin(\omega t - kL/2)\sin(kx) + \cos(\omega t - kL/2)\cos(kx) - \sin(\omega t - kL/2)\sin(kx)\big)$$

D'où
$$z(x,t) = 2a\cos(\omega t - kL/2)\cos(kx)$$

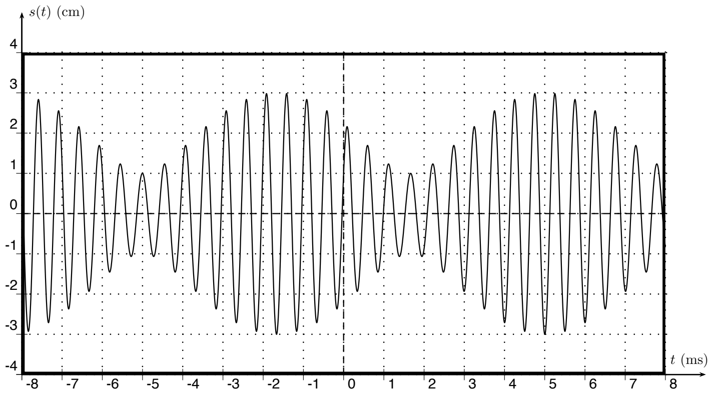
Il en vient à différents instants :



On observe ainsi une amplitude nulle (noeud) au niveau des deux émetteurs ce qui peut sembler contre-intuitif. Cependant, il faut bien considerer l'onde résultante, qui contient aussi celle issue de l'autre émetteur, qui arrive en opposition de phase. On obtient alors des interférences destructives sur les deux bords.

VI Battements v2 ($\star\star\star$)

On superpose deux autres signaux de fréquences proches et l'on obtient l'enregistrement de la figure ci-dessous.



1. *Déterminez la fréquence et l'amplitude des deux signaux.*

Réponse :
On mesure $\Delta t_{\text{batt}} \approx 6{,}5\,\text{ms}$ la durée entre deux minimum de battement. Cette duré correspond d'après le cours à $\Delta f = f_2 - f_1 = 1/\Delta t_{\text{batt}}$. De plus, $T_{\text{moy}} \approx 0{,}5\,\text{ms} \Rightarrow (f_1+f_2)/2 = 1/T_{\text{moy}}$. En combinant ces résultats, on obtient après simplification :

$$f_2 = \frac{1}{T_{\text{moy}}} + \frac{1}{2\Delta t_{\text{batt}}} \quad \text{et} \quad f_1 = \frac{1}{T_{\text{moy}}} - \frac{1}{2\Delta t_{\text{batt}}}$$

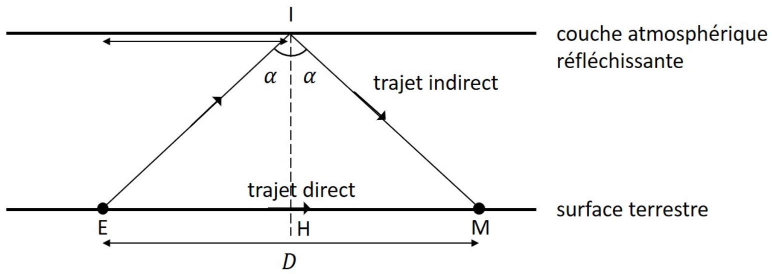
On en déduit $f_2 = 2{,}08\,\text{kHz}$ et $f_1 = 1{,}92\,\text{kHz}$. (les valeurs utilisées pour le graphique sont $f_1 = 1{,}95\,\text{kHz}$ et $f_2 = 2{,}1\,\text{Hz}$ soit proche des résultats obtenus). Il reste maintenant à déterminer les amplitudes des signaux.
Au maximum, on a $s_{\text{max}} = a_1 + a_2 \approx 3\,\text{cm}$ puis $s_{\text{min}} = a_1 - a_2 \approx 1\,\text{cm}$ en supposant que $a_1 \geq a_2$. On en déduit $a_1 = 2\,\text{cm}$ et $a_2 = 1\,\text{cm}$. Dans cette question, on ne nous demande pas de déterminer les phases à l'origine des deux signaux.

VII Ondes radio à la surface de la terre ($\star\star\star$)

Un émetteur E (longueur d'onde λ) et un récepteur M d'ondes radio se trouvent au sol à la distance D l'un de l'autre. Une couche atmosphérique réfléchissante horizontale se comporte comme un miroir plan vis-à-vis des ondes radio.
Lorsque l'altitude de la couche réfléchissante est H, l'onde directe et l'onde réfléchie sont en phase ; quand l'altitude devient $H+h$, M ne reçoit aucun signal.

1. *Réalisez un schéma détaillé de la situation en précisant bien les deux chemins suivis par l'onde radio.*

Réponse :



On note δ la différence de marche entre ces deux chemins. Dans cette question, on ne cherchera pas à exprimer δ en fonction des données géométrique du problème.

2. *Que vaut δ en cas d'interférences constructives ? Destructives ? De combien δ varie-t-il lorsque l'altitude de l'atmosphère passe de H à $H+h$?*

Réponse :
Dans le cas d'interférences constructives, on a $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dans le cas d'interférences destructives, on a $\delta = (p+1/2)\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$ Avec un schéma, la distance parcourue par l'onde dans le premier cas est $d_1 = 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}$ et dans le 2ième cas $d_2 = 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + (H+h)^2}$. Dans le premier cas, les interférences entre le trajet direct et le trajet réfléchie sont constructives, dans le deuxième cas, elles sont destructives, il y a donc eu une demi longueur d'onde de plus soit $\boxed{\delta = d_2 - d_1 = \lambda/2}$.

---

3. *Établissez la relation liant D, H, h et la longueur d'onde λ, en supposant que h est petit devant D et H : $h/H \ll 1$ $h/D \ll 1$.*

Réponse :
D'où

$$d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + (H+h)^2} - 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2(1+\frac{h}{H})^2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$$

On utilise la formule fournie pour le carré :

$$\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2(1+2\frac{h}{H})}-\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}=\frac{\lambda}{4}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2+2hH}-\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}=\frac{\lambda}{4}$$

puis pour la racine on factorise par le plus grand terme pour faire apparaître une expression du type $\sqrt{1+\epsilon}$ avec $\epsilon \ll 1$

$$\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}\sqrt{1+2\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)}}-\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}=\frac{\lambda}{4}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}\left(1+\frac{2}{2}\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)}\right)-\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}=\frac{\lambda}{4}$$

Ce qui donne finalement :

$$\sqrt{\frac{D^2}{4}+H^2}\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)}=\frac{\lambda}{4}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{D^2}{4H^2}}\frac{h}{1+\frac{D^2}{4H^2}}=\frac{\lambda}{4}\Rightarrow\frac{h}{\sqrt{1+\frac{D^2}{4H^2}}}=\frac{\lambda}{4}$$

d'où $\boxed{h=\frac{\lambda}{4}\sqrt{1+D^2/4H^2}}$.

---

4. *On donne* $H = 80{,}0\,\mathrm{km}$, $D = 200\,\mathrm{km}$ *et* $\lambda = 400\,\mathrm{m}$. *Calculez* h. *Commenter*

Réponse :
$h = 160\,\mathrm{m}$. Cette valeur est faible devant H. Il faut donc que l'altitude de la couche réflectrice soit particulièrement stable pour obtenir une réception permanente du signal.

On rappelle pour les approximations que $(1+\epsilon)^\alpha \approx 1+\alpha\epsilon$ *si* $|\epsilon| \ll 1$.
Cette approximation devra être utilisée plusieurs fois dans cet exercice.

Éléments de réponses :

E3 Q1 : On trouve $f_1 = 2{,}95\,\mathrm{Hz}$ *et* $f_2 = 3{,}05\,\mathrm{Hz}$
E6 Q1 : Ici, les deux amplitudes sont différentes. Pensez à identifiez les moments où ces dernières s'ajoutent ou se soustraient.
E7 Q3 : $h = \frac{\lambda}{4}\sqrt{1+D^2/4H^2}$