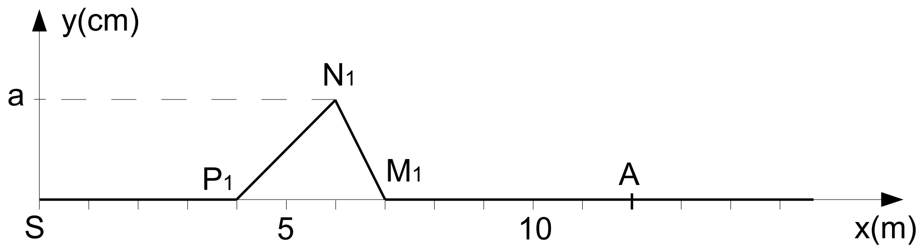
TD 11 | O4- **Ondes progressives et stationnaires**

	I	II	III	IV	V
Gerer des calculs			✓		✓
Faire preuve de sens physique	✓		✓		✓
Analyser un schéma	✓				✓
Etudier une onde stationnaire			✓	✓	✓
Etudier une onde harmonique progressive		✓		✓	
Réaliser un schéma	✓	✓			
Appliquer des conditions limites			✓	✓	✓

I Corde vibrante ($\star$)

On étudie la propagation sans amortissement d'une perturbation le long d'une corde élastique. À la date $t = 0$, le front de l'onde quitte le point S de la corde. La figure ci-dessous représente la corde à l'instant $t_1 = 2{,}30\,\mathrm{s}$.



1. *Calculez la célérité de l'onde le long de la corde.*

Réponse :
L'onde parcoure une distance de 7 m en 2,30 s. La célérité de l'onde est alors :

$$c = \frac{7}{2,30} = \boxed{3{,}04\,\mathrm{m\,s^{-1}}}.$$

---

2. *Quelle est la durée τ du mouvement d'un point de le la corde au passage de l'onde ?*

Réponse :
La perturbation mesure 3 m. La durée τ est alors :

$$\boxed{\tau = \frac{3}{c} = 0{,}99\,\mathrm{s}}.$$

---

3. *À la date t_1, quels sont les points qui s'élèvent ? ceux qui descendent ?*

Réponse :
Les points qui s'élèvent sont compris entre P_1 et N_1, ceux qui descendent sont compris entre N_1 et M_1.

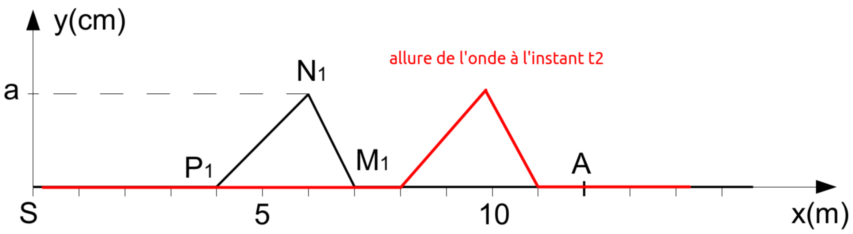
---

4. *Dessinez, sur un graphique similaire à celui de la figure précédente, l'aspect de la corde à l'instant $t_2 = 3{,}60\,\mathrm{s}$.*

Réponse :
À la date t_2, le front de l'onde sera à la position :

$$x_2 = c \times t_2 = 11\,\mathrm{m}.$$

L'aspect de la corde sera alors la suivante :



Soit A le point de la corde situé à 12,0 m de S.

5. *À quelle date t_3 commence-t-il à bouger ?*

Réponse :
Le point A comme à bouger en t_3 tel que :

$$\boxed{t_3 = \frac{12,0}{c} = 3{,}95\,\mathrm{s}}.$$

---

6. *À quelle date t_4 passe-t-il par un maximum d'altitude ?*

   Réponse :
   Il passe par un maximum pour :

   $$\boxed{t_4 = \frac{13,0}{c} = 4{,}28\,\text{s}}.$$

---

7. *À quelle date t_5 cesse-t-il de bouger ?*

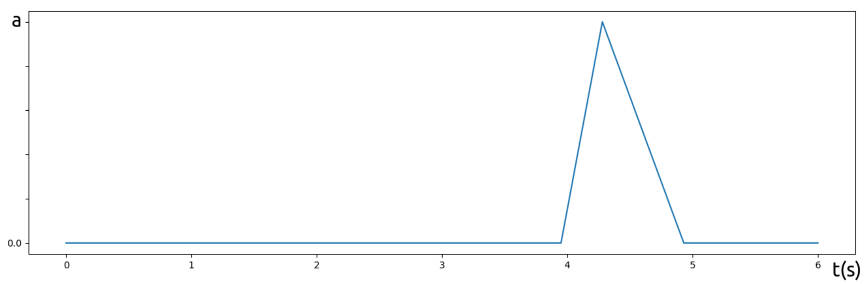
   Réponse :
   Il cesse de bouger en

   $$\boxed{t_5 = \frac{15,0}{c} = 4{,}93\,\text{s}}.$$

---

8. *À l'aide des résultat précédents, schématisez l'allure de la courbe $y_A = f(t)$ représentant l'élongation de la corde en A en fonction du temps.*

   Réponse :



II Evolution temporelle d'une onde sinusoïdale ($\star$)

Soit l'onde $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ où ω, k et A sont des constantes.

1. *Dans quel sens se propage cette onde ?*

   Réponse :
   Cette onde se propage selon les x croissants (a cause du signe entre ωt et kx).

---

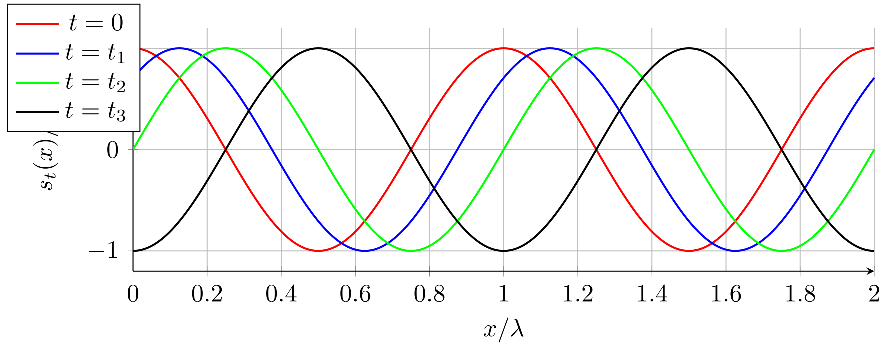
2. *Quelle relation existe-il entre ω et k ?*

   Réponse :
   On a d'après le cours, $k = \omega/c$, qui est bien homogène !

---

3. *Tracer, sur un même graphique, l'allure de l'onde aux instant $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{8}$, $t_2 = \frac{T}{4}$ et $t_3 = \frac{T}{2}$, en fonction de x, pour quelques périodes spatiales*

   Réponse :
   On observe que $\omega t_0 = 0$, $\omega t_1 = \pi/4$, $\omega t_2 = \pi/2$ et $\omega t_3 = \pi$. Ainsi, les premier et dernier signaux seront en opposition de phase. On obtient le graphique suivant :



---

4. *Après quelle durée l'onde apparaîtra-t-elle identique à son aspect initial ?*

   Réponse :
   On obtient à nouveau la même onde lorsque $t = t_i$ avec $\omega t_i = 2\pi \Rightarrow t_i = 2\pi/\omega = T$. Il s'agit bien de la période temporelle !

III Guitare ($\star$)

Soit une corde de guitare de longueur l qui est fixée à ces deux extrémités. On notera c la vitesse des ondes (supposées harmoniques) se propageant sur cette corde.

1. *Écrivez la forme générale du signal $y(x,t)$ en faisant apparaître deux constante a_+ et a_- que l'on ne cherchera pas à déterminer.*

   Réponse :
   On a comme dans le cours $y(x,t) = a_+ \cos(\omega t - kx) + a_- \cos(\omega t + kx)$ (somme d'une onde se propageant vers les x croissant et d'une autre se propageant vers les x décroissants.

---

2. *Trouvez une relation reliant a_+ et a_- en considérant le fait que la corde soit fixée en $x = 0$. Simplifiez ensuite l'expression de $y(x,t)$. Quelle type d'onde obtient-on ?*

   Réponse :
   on a $y(0,t) = 0,\ \forall t$ donc $(a_+ + a_-)\cos(\omega t) = 0,\ \forall t$ donc finalement $a_+ = -a_- = a$. On obtient alors $y(x,t) = a(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2a\sin(\omega t)\sin(kx)$. Il s'agit d'ondes stationnaires

---

3. *On considère maintenant le fait que la corde est aussi fixée en $x = l$. Montrez que seul certaines longueur d'ondes λ_n peuvent être observées.*

   Réponse :
   On a de plus $y(l,t) = 0$ (fixée) soit $2a\sin(\omega t)\sin(kl) = 0,\ \forall t \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n}{l}\pi, n \in \mathbb{N}$. On en déduit finalement :

   $$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2l}{n}$$

   (on vérifie au passage que ce résultat est bien homogène.)

---

4. *($\star\star$)Sachant que $l = 60$ cm et que $c = 0,132$ km.s^{-1}, à quelle note correspond le mode fondamental ?*

   Réponse :
   Les fréquences correspondantes sont données par la relation suivante :

   $$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l}$$

   On obtient pour le fondamental ($n = 1$) $f_1 = 110\,\text{Hz}$ et cela correspond à un LA.

---

5. *Pour jouer une note une octave plus haute, il convient de pincer la corde à la moitié de sa longueur initiale. Exprimez alors dans ce cas la nouvelle fréquence du fondamental.*

   Réponse :
   Lorsque l'on divise la longueur par deux, on multiplie la fréquence par deux d'après la formule précédente. On obtient donc $f_1' = 220\,\text{Hz}$ qui correspond encore une fois à un LA, mais plus aïgu

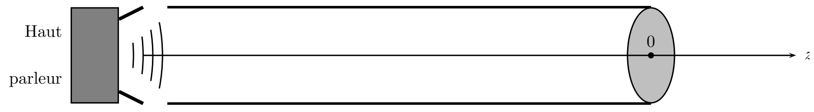
---

6. *Quelle grandeur physique fait-on varier pour ré-accorder une corde qui ne produit plus une note à la bonne fréquence*

   Réponse :
   La tension du fil donc la célérité de l'onde. Il ne faut surtout pas essayer de modifier la longueur de la corde, sous peine de casser le manche de la guitare !

IV Tube à ondes stationnaires ($\star\star$)

Un haut-parleur est placé à l'entrée d'un tube à ondes stationnaire. Il est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω. La célérité des ondes sonores est notée c.



1. *Quelle est la grandeur physique qui oscille ?*

   Réponse :
   C'est la pression (et la vitesse en fait).

---

2. *Donner la forme de l'onde $p_i(z,t)$ engendrée par le haut-parleur*

   Réponse :
   onde progressive vers la droite (ou la gauche : l'énoncé ne précise pas) : $p_i(z,t) = p_0\cos(\omega t - kz)$ (convention prise : vers la droite)

3. *Une surface réfléchissante placée en bout de tube (repérée par $z = 0$) engendre une onde réfléchie. Donner la forme générale de cette onde réfléchie $p_r(z,t)$ sans expliciter les différentes inconnues pour l'instant.*

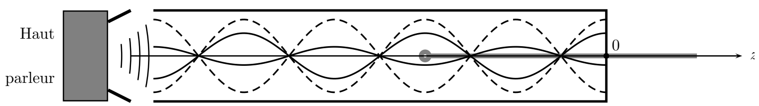
Réponse :
onde qui va dans l'autre sens : $p_r(z,t) = p'_0 \cos(\omega t + kz + \varphi)$

4. *La surface réfléchissante en $z = 0$ est telle qu'elle correspond à un ventre de vibration. Expliciter les différentes inconnues dans la forme de l'onde réfléchie grâce à cette condition aux limites. (Remarque, si on se place au niveau d'un ventre, cela correspond à un maximum de vibration et il existe une dérivée nulle).*

Réponse :
la dérivée de la pression par rapport à z doit être nulle, donc $\frac{dp_{tot}}{dz} = -(-kp_0 \sin(\omega t - k(z=0))) - p'_0 k \sin(\omega t + k(z=0) + \varphi) = 0$ et ce pour tout t. Donc $\varphi = 0$ et $kp_0 = kp'_0$.

5. *En déduire la forme de l'onde totale $p(z,t)$. Montrer que cela correspond effectivement à une onde stationnaire. Représenter la à différents instants.*

Réponse :
On a donc $p_{tot} = p_0(\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz))$ On utilise les formules de trigo : $p_{tot} = 2p_0(\cos(\omega t) \times \cos(kz))$ on a donc bien une onde stationnaire



6. *Proposer une méthode pour mesurer la longueur d'onde*

Réponse :
On bouge un micro et on repère les nœuds (et les ventre). La distance entre deux nœuds est $\lambda/2$

7. *On admet que la présence du haut parleur, qui impose une vitesse acoustique à l'extrémité gauche du tube, en $z = -l$ revient à imposer un noeud à cet endroit. En déduire les longueurs d'ondes observables et démontrer que les fréquences associées peuvent s'écrire selon*

$$f = \frac{c}{4l} \times (1 + 2n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Réponse :
La deuxième condition limite indique $p_{tot}(-l,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\cos(-kl) = \cos(kl) = 0$ car les autres termes dans l'expression de l'onde ne peuvent s'annuler à chaque instant (sauf s'il n'y a pas d'onde, mais ce cas n'est pas physiquement interressant)
Il vient alors qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $kl = \pi/2 + n\pi$ puis que

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{1+2n} = \lambda_n \quad \text{et} \quad f = \frac{c}{4l} \times (1+2n) = f_n$$

V Petite cavité résonnante ($\star\star\star$)

On dispose d'un tube acoustique qui peut être raccourci à une longueur L et dont les extrémités peuvent être fermées ou laissées ouvertes. On cherche la configuration permettant d'obtenir un premier mode à la fréquence $f = 500\,\mathrm{Hz}$ avec le plus petit tube possible. On rappelle de plus que :

— On observe toujours un **nœud** de pression acoustique aux extrémités ouvertes.
— On observe toujours un **ventre** de pression acoustique aux extrémités fermées.

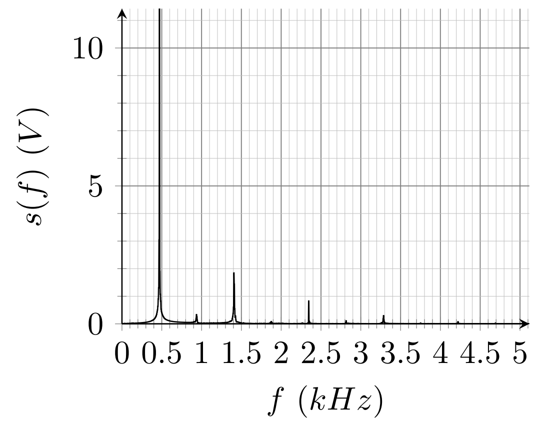
On note de plus c la vitesse du son dans l'air avec $c = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

1. *Répondre au problème posée à l'aide d'une expression littérale et une application numérique en justifiant soigneusement votre réponse.*

Réponse :
Pour une cavité type OO ou FF, on obtient $f_n = \frac{c}{2L}n$ (après calculs pour des ondes stationnaires) soit pour la fréquence la plus basse ($n = 1$) $L = \frac{c}{2f}$.

De même, pour une cavité OF ou FO, on obtient $f_n = \frac{c}{2L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (toujours après calculs, pour les conditions limites correspondantes) soit pour la fréquence la plus basse ($n = 0$) $L = \frac{c}{4f}$. Ce type de cavité permet ainsi d'obtenir une longueur deux fois plus petite pour le tube donc on retient $\boxed{L_{min} = \frac{c}{4f}}$

2. *On active le tube acoustique un tapant dessus à l'aide d'un petit marteau et on effectue un enregistrement audio du signal obtenu. A partir de ce dernier, on obtient le spectre suivant :*



cela est-il en accord avec votre précédente réponse ? Justifier soigneusement votre réponse.

Réponse :
Pour les configurations retenues (OF ou FO), les fréquences s'écrivent selon

$$f_n = \frac{c}{2L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

On a donc $f_0 = \frac{c}{4L}$ pour le fondamental, qui se trouve bien à 500 Hz. On a ensuite $f_1 = f_0 \times 3$ puis $f_2 = f_0 \times 5$, ...
Ainsi, le fréquences dans le spectre sont des multiples pairs du fondamental, ce qui est bien le cas sur l'enregistrement fournis (pics principaux à 500 Hz, 1500 Hz et 2500 Hz). Le spectre proposé est donc bien en accord avec nos résultats.

Astuces :

E1 Q7 : $t_5 = \frac{15{,}0}{c} = 4{,}93\,\mathrm{s}$
E3 Q4 : On doit trouver un LA.
E4 Q5 : $p_{tot} = 2p_0(\cos(\omega t) \times \cos(kz))$
E5 Q1 : On trouve $L_{\min} \approx 17\,\mathrm{cm}$.