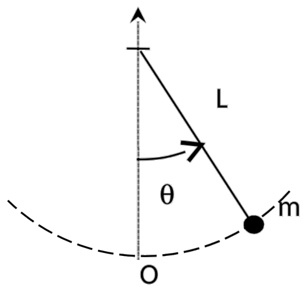
TD 10 | M3- **Energétique du point**

	I	II	III	IV	V	VI
Réaliser une approximation	✓					✓
Analyser la cinématique	✓				✓	
Gerer des calculs	✓		✓		✓	
Faire preuve de sens physique				✓		✓
Etablir un bilan des actions	✓			✓	✓	
Etudier un équilibre		✓				✓
Résoudre une équation différentielle	✓		✓			
Choisir un théorème énergétique	✓	✓		✓	✓	
Obtenir une équation différentielle	✓					✓

I L'énergie et le pendule ($\star$)

On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur L. Tant que le fil est tendu, on repère la position de la masse par l'angle θ représenté sur la figure ci-contre. On néglige les frottements.
À l'instant initial, $\theta(t=0) = 0°$ et on donne au mobile une vitesse purement orthoradiale de norme v_0 telle que les oscillations restent de faible amplitude. Par choix, l'origine du repère sera prise à l'intersection de la trajectoire de M avec la verticale.



1. Déterminer l'équation différentielle sur la variable $\theta(t)$ vérifiée par le pendule, à l'aide d'une loi portant sur l'énergie. En déduire $\theta(t)$.
2. Quelle altitude maximale $z_{\max}$ est atteinte par ce pendule. On utilisera pour cela l'expression de $\theta(t)$ obtenue précédemment, dans le cadre de l'approximation des petits angles.
   On rappelle que $\forall \varepsilon \ll 1,\ \cos(\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon^2/2$
3. Déterminer ensuite l'expression de l'altitude maximale $z_{\max}$ atteinte par ce pendule sans aucune approximation, à l'aide d'un théorème énergétique, et comparer au résultat précédent.

II Distance minimale d'approche ($\star$)

1. Rappelez l'expression de la force d'interaction coulombienne entre deux charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r.
2. Rappelez la relation entre le travail élémentaire d'une force conservative et son énergie potentielle.
3. Déterminez l'énergie potentielle électrostatique dont dérive la force d'interaction coulombienne. On la supposera nulle à l'infini.

Une particule de masse m et de charge $+2e$ est lancée vers un noyau d'atome immobile de charge $+Ze$. Elle vient de l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ comme représentée ci-dessous.

4. Pourquoi la particule ne peut-elle pas percuter le noyau ? Quelle est sa vitesse lorsqu'elle est au plus proche du noyau ?
5. Calculez la distance minimale d à laquelle elle peut s'approcher en fonction de Z, e, m, v_0 et ε_0.
6. Faîtes l'application numérique pour $Z = 56$ (noyau d'or), $m = 6{,}63 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{S\,I}$. puis $v_0 = 1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

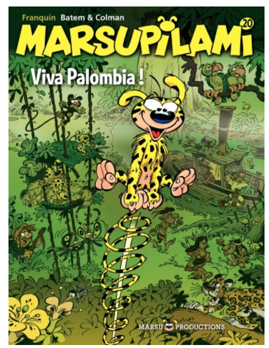
III Résolution d'équations différentielles ($\star$)

Trouvez la forme générale des solutions des EDs suivantes **en utilisant la méthode de séparation des variables**. On fera apparaître des instants t_1 et t_2.

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha x = 0$
2. $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \beta\theta^2 = 0$

IV Le Marsupilami ($\star\star$)

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.



On note $l_0 = 2\,\mathrm{m}$ la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $l_m = 50\,\mathrm{cm}$. La masse m de l'animal est $50\,\mathrm{kg}$ et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure l_0. On prendra $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

1. Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est $h = 10\,\mathrm{m}$?
2. Quelle est sa vitesse v lorsque la queue quitte le sol ?

V Glissades ($\star\star\star$)

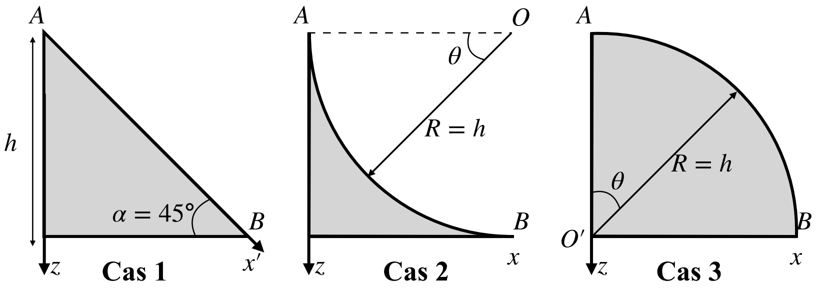
On considère un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement de A d'altitude $z_A = 0$ à B suivant trois trajectoires distinctes :

— soit le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale

— soit le long d'un profil circulaire concave de rayon $R = h$

— soit le long d'un profil circulaire convexe de rayon $R = h$

Dans les trois cas le dénivelé entre le point de départ A et le point d'arrivée B est h. On se placera dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.



1. En supposant que M quitte A sans vitesse, déterminez la vitesse d'arrivée du point M en B. Cette vitesse dépend-elle du chemin suivi ?
2. On s'interresse alors au premier profil (cas 1).
   (a) Montrez que la norme de la vitesse v s'exprime en fonction de $\dot z$ uniquement : $v = \sqrt{2}\dot z$.
   (b) Intégrez alors l'intégrale première du mouvement (ici, l'énergie mécanique E_m) entre les points A et B puis déterminez le temps t_1 mis par le point M pour parvenir au point B.
3. Utilisez la même méthode pour déterminer le temps t_2 mis par le point M pour effectuer le trajet AB sur le profil circulaire concave (cas 2). Montrez qu'il s'exprime sous la forme :
$$t_2 = \sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$$
4. On donne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \approx 2,62$. Comparez les distances parcourues et les temps de parcourt pour les deux trajets. Commentez.
5. Pour le cas 3, montrer qu'il existe un angle $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ à partir duquel le point matériel M va quitter la piste.

VI Molécule diatomique ($\star\star\star$)

Une molécule de molécule de carbone CO est modélisée par deux masses ponctuelles, m_1 pour l'atome de carbone, et m_2 pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera ici que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long de l'axe (Ox), dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_r}$. On néglige la gravitation.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse : $V(r) = V_0[1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2$ où r est la distance des noyaux des deux atomes et où V_0, β et r_0 sont des constances positives et $\beta r_0 \gg 1$.

1. Faîtes l'étude de la fonction $V(r)$ puis tracez la courbe associée en faisant apparaître V_0 et r_0.
2. Montrez qu'il existe un domaine de distances où l'énergie potentielle peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction de V_0 et β.
3. Dans le cadre de cette approximation, déterminez l'équation différentielle du mouvement de l'atome d'oxygène et en déduire la pulsation des petites oscillations.

Astuces :

E1 Q2 : $z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$
E2 Q3 : $E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$
E2 Q5 : On trouve $d = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}$
E3 Q2 : $\theta_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \beta(t_2 - t_1)}$
E4 Q1 : $k = \frac{2mg(h-l_m)}{(l_m-l_0)^2}$
E6 Q2 : On doit trouver $k = 2V_0\beta^2$