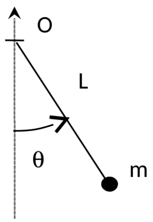
TD 09 | M2- **Dynamique du point**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Réaliser une approximation	✓		✓				
Gerer des calculs		✓			✓	✓	
Analyser la cinématique						✓	
Prendre en compte les frottements		✓	✓		✓		
Faire preuve de sens physique			✓			✓	✓
Analyser un schéma	✓	✓		✓			
Etablir un bilan des actions	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Etudier un équilibre				✓		✓	
Résoudre une équation différentielle	✓		✓		✓		
Mettre en équations un problème abstrait				✓			✓
Obtenir une équation différentielle	✓		✓		✓	✓	

I Étude d'un pendule simple ($\star$)



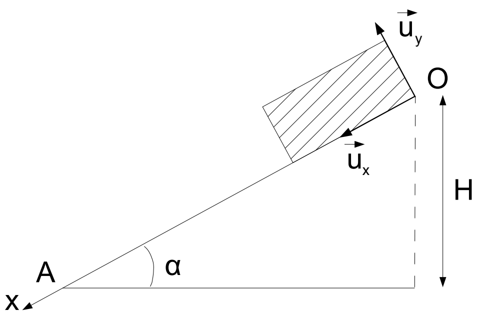
On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur L. Tant que le fil est tendu, on repère la position de la masse par l'angle θ représenté sur la figure ci-contre.

On néglige les frottements. À l'instant initial, $\theta(0) = 0°$ et on donne au mobile une vitesse de norme v_0.

1. Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération en fonction des données tant que le fil est tendu.
2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
3. Que devient cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes ? Pour quel autre système avons-nous rencontré la même équation ?
4. Résoudre cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes.

II Mobile sur un plan Incliné ($\star$)

Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure d'un plan incliné d'angle α, sans vitesse initiale. On note H la hauteur de ce point initial O et g l'accélération de la pesanteur.



II.1 Absence de Frottement

1. Déterminez l'accélération $a = \ddot{x}$ du mobile à l'instant t en absence de frottement.
2. En déduire la vitesse $v = \dot{x}(t)$ et la position $x(t)$ et déterminer la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A.

II.2 Existence de frottements solides ($\star\star$)

Dans cette partie, on ajoute uniquement la prise de compte d'une force de frottement solide dont les coefficients de frottement statiques et dynamiques sont notés f_0 et f respectivement.

3. A quelle condition sur le coefficient f_0 de frottement statique le solide commence-t-il à glisser à $t = 0$?
4. On note f le coefficient de frottement dynamique. Quelle relation existe-t-il entre R_T et R_N et f lorsque le mobile se met en mouvement ? Reprendre ensuite la question 2

III Vitesse de chute libre ($\star\star$)

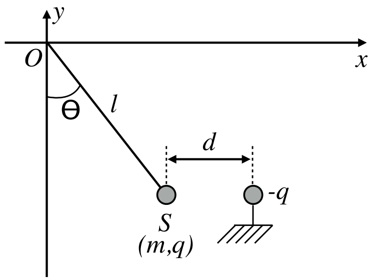
Une goutte d'eau sphérique de rayon a, indéformable et de masse volumique ρ tombe dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ suivant un axe vertical Oz dirigé vers le haut. L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de trainée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation

$$\vec{F} = -6\pi\eta \frac{a\vec{v}}{1 + l/a}$$

où $\eta = 1{,}7 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,s\,m^2}$ est la viscosité de l'air et $l = 0{,}07\,\mu\mathrm{m}$ une longueur caractéristique. On négligera la poussée d'Archimède.

1. Exprimez la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera $\vec{v}_l$.
2. Donnez ensuite l'expression du temps caractéristique τ mis pour atteindre cette vitesse limite, ainsi que l'ordre de grandeur de la distance D parcourue pendant cette durée.
3. On donne $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Calculez v_l, τ et D pour $a_1 = 0{,}01\,\mathrm{mm}$ et pour $a_2 = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.
4. L'atmosphère est modélisé par une couche uniforme de hauteur $h = 8$ km. En utilisant les résultats précédents, calculez le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2. Peut-on supposer la vitesse de chute constante dans ces deux cas ?

IV Équilibre éléctro-statique (⋆⋆)



Un pendule est constitué d'une petite sphère S, de masse $m = 45\,\mathrm{g}$, attachée au bout d'un fil idéal de longueur l. On impose à cette sphère une charge électrique positive q que l'on souhaite déterminer.

D'autre part, une autre sphère chargée avec une charge opposée $-q$ est placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle θ. On supposera que les 2 sphères sont à la même hauteur.

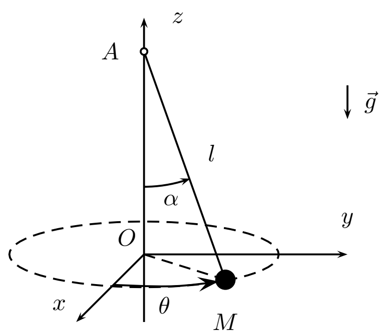
1. On mesure les valeurs suivantes : $\theta = 36°$ et $d = 22\,\mathrm{cm}$. La permittivité électrique de l'air est pratiquement égale à celle du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$. Que vaut la valeur de la charge q ?

V trajectoire d'un projectile (⋆⋆)

Reprendre l'application du cours sur la chute libre (avec $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\cos(\theta)\vec{e}_y + v_0\sin(\theta)\vec{e}_z$) en prenant en compte cette fois l'existence de frottements fluides du type $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$.

1. Obtenir les équations horaire $y(t)$ et $z(t)$ en prenant comme origine du repère la position initiale du projectile.
2. En prenant $v_0 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ et $m = 200\,\mathrm{g}$, tracez la trajectoire $z(y)$ décrite par le projectile à l'aide d'un programme écrit en python pour $\theta = \pi/4$. On stoppera le tracé lorsque le projectile retouchera le sol. *Ici, on ne cherchera pas à obtenir l'équation formelle de $Z(y)$.*
3. Toujours à l'aide d'un programme écrit en python, cherchez pour quel angle initial $\theta_{\max}$ la portée du tir est maximale.

VI Pendule conique (⋆⋆⋆)



Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A et tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Az.

Soit α l'angle que forme AM avec la verticale (c.f. schéma ci-contre).

1. Exprimez l'angle α et la tension du fil T en fonction de m, g, l et ω avec l'hypothèse $l\omega^2 > g$. On supposera dans cette question uniquement que $\alpha \neq 0$.
2. Qu'est ce qui se passe lorsque $l\omega^2 < g$.

VII Trois petits problèmes ouverts (⋆⋆⋆)

1. Un objet lancé verticalement vers le haut passe par la même altitude h (hauteur repérée par rapport à l'origine O du repère) aux instants $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ et $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Déterminer h.
2. Tous les êtres humains vivant sur la Terre se regroupent au même endroit et sautent au même moment. Déterminer le déplacement subit par la Terre durant le saut. On suppose l'ensemble immobile (pas d'action du Soleil ou de la Lune notamment).
3. Le champ de gravitation à la surface de la Lune est de $\vec{g_L} = 1{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Déterminer la hauteur maximale à laquelle vous seriez capable de sauter sur la Lune.

Astuces :

E2 Q4 : on trouve $v_{A,\text{frottsol}} = \sqrt{2gH(1 - \frac{f}{tan\alpha})}$
E3 Q3 : $v_l \approx 1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $\tau \approx 1{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$
E4 Q1 : On trouve $q \approx 1{,}31 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$
E5 Q3 : Numériquement, on trouve $\theta_{\max} = 0{,}419\,\mathrm{rad}$
E6 Q1 : $\alpha = \mathrm{acos}(g/(l\omega^2))$
E7 Q1 : $h \approx 100\,\mathrm{m}$