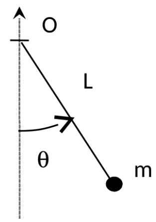
TD 09 | M2- **Dynamique du point**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Réaliser une approximation	✓		✓				
Gerer des calculs		✓			✓	✓	
Analyser la cinématique						✓	
Prendre en compte les frottements		✓	✓		✓		
Faire preuve de sens physique			✓			✓	✓
Analyser un schéma	✓	✓		✓			
Etablir un bilan des actions	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Etudier un équilibre				✓		✓	
Résoudre une équation différentielle	✓		✓		✓		
Mettre en équations un problème abstrait				✓			✓
Obtenir une équation différentielle	✓		✓		✓	✓	

I Étude d'un pendule simple ($\star$)



On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur L. Tant que le fil est tendu, on repère la position de la masse par l'angle θ représenté sur la figure ci-contre.

On néglige les frottements. À l'instant initial, $\theta(0) = 0°$ et on donne au mobile une vitesse de norme v_0.

1. *Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération en fonction des données tant que le fil est tendu.*

Réponse :
On se place en coordonnées polaires. On a alors

$$\vec{r} = L\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

---

2. *Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.*

Réponse :
Bilan des forces qui s'appliquent sur la masse :
— poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z = -mg[-\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$
— tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$

On applique la loi de la quantité de mouvement sur la masse m dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

On projette selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ et on divise par m :

$$-T/m + g\cos(\theta) = -L\dot{\theta}^2 \quad ; \quad \boxed{-g\sin(\theta) = L\ddot{\theta}}$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0} \quad ; \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

---

3. *Que devient cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes ? Pour quel autre système avons-nous rencontré la même équation ?*

Réponse :
Pour de faibles oscillations, typiquement $\theta < 20$ °, alors $\sin(\theta) \approx \theta$ et l'équation différentielle devient celle de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}.$$

---

4. *Résoudre cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes.*

Réponse :
Les solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Les conditions initiales sont :

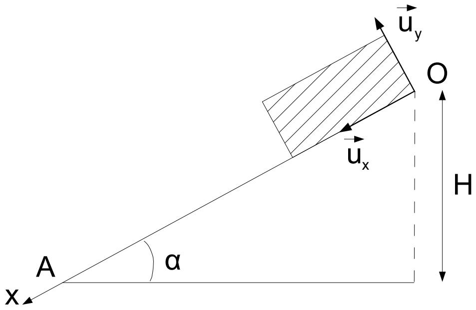
$$\theta(0) = 0 \quad ; \quad v(0) = v_0 = L\dot{\theta}(0).$$

On trouve alors

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}.$$

II Mobile sur un plan Incliné ($\star$)

Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure d'un plan incliné d'angle α, sans vitesse initiale. On note H la hauteur de ce point initial O et g l'accélération de la pesanteur.



II.1 Absence de Frottement

1. *Déterminez l'accélération $a = \ddot{x}$ du mobile à l'instant t en absence de frottement.*

Réponse :
Système {solide} supposé ponctuel dans le référentiel terrestre galiléen.
Repère $\{O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\}$ orthonormé direct selon schéma.
Forces :
Poids $\overrightarrow{P} = -mg\cos(\alpha)\overrightarrow{u_y} + mg\sin(\alpha)\overrightarrow{u_x}$ Réaction normale $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{u_y}$ car absence de frottements.
RFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$
Soit en projection sur :
$\overrightarrow{u_x}$: $m\ddot{x} = mg\sin(\alpha)$
$\overrightarrow{u_y}$: $m\ddot{y} = 0 = R_N - mg\cos(\alpha)$
soit $\boxed{\ddot{x} = g\sin(\alpha)}$

---

2. *En déduire la vitesse $v = \dot{x}(t)$ et la position $x(t)$ et déterminer la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A.*

Réponse :
$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ soit par intégration : $\boxed{\dot{x} = g\sin(\alpha)t}$ car $v(t=0) = 0$.
À nouveau par intégration : $\boxed{x = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2}$ car $x(t=0) = 0$.
Au point A : $x_A = \frac{H}{\sin(\alpha)}$ donc $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g(\sin(\alpha))^2}}$
soit $\boxed{v_A = \dot{x}_A = g\sin(\alpha)t_A = \sqrt{2gH}}$
Vérification avec le théorème de l'énergie mécanique : $E_c(A)+E_p(A) = E_c(O)+E_p(O)$ soit $\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = 0 + mgz_A = mgH$ soit le même résultat.

II.2 Existence de frottements solides (⋆⋆)

Dans cette partie, on ajoute uniquement la prise de compte d'une force de frottement solide dont les coefficients de frottement statiques et dynamiques sont notés f_0 et f respectivement.

3. *A quelle condition sur le coefficient f_0 de frottement statique le solide commence-t-il à glisser à $t = 0$?*

Réponse :
En statique, on a $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ soit en projection :
$R_T = mg\sin(\alpha_s)$ et $R_N = mg\cos(\alpha_s)$. Les lois de Coulomb nous donnent un lien entre R_T et R_N en statique soit :
$\boxed{R_T \leq f_0 R_N}$ qui s'écrit ici $\boxed{\tan(\alpha_s) \leq f_0}$.
On aura donc glissement si cette condition n'est pas vérifiée soit $\boxed{f_0 < \tan(\alpha_s)}$.

---

4. *On note f le coefficient de frottement dynamique. Quelle relation existe-t-il entre R_T et R_N et f lorsque le mobile se met en mouvement ? Reprendre ensuite la question 2*

Réponse :
On reprend les équations de la première partie en ajoutant les frottements solides.
On arrive en projection à :
$\overrightarrow{u_x}$: $\ddot{x} = g\left(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)\right)$
$\overrightarrow{u_y}$: $0 = R_N - mg\cos(\alpha)$ identique
Par intégration : $\boxed{\dot{x} = g\left(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)\right)t}$ car $v(t=0) = 0$.
À nouveau par intégration : $\boxed{x = \frac{1}{2}g\left(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha)\right)t^2}$ car $x(t=0) = 0$.
Au point A : $x_A = \frac{H}{\sin(\alpha)}$ donc $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g\sin(\alpha))(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}}$
soit $\boxed{v_A = \dot{x}_A = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{f}{\tan(\alpha)}\right)}}$

III Vitesse de chute libre (⋆⋆)

Une goutte d'eau sphérique de rayon a, indéformable et de masse volumique ρ tombe dans le champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$ suivant un axe vertical Oz dirigé vers le haut. L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de trainée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\eta\frac{a\overrightarrow{v}}{1 + l/a}$$

où $\eta = 1{,}7 \times 10^{-5}\,\mathrm{N\,s\,m^2}$ est la viscosité de l'air et $l = 0{,}07\,\mu\mathrm{m}$ une longueur caractéristique. On négligera la poussée d'Archimède.

1. *Exprimez la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera $\vec{v}_l$.*

Réponse :
On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen et on considère le système : "Goutte d'eau". Bilan des forces :

$$P = -mg\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{F} = -\alpha\vec{v}$$

La goutte va atteindre une vitesse limite lorsqu'elle sera pseudo-isolée (accélération nulle), c'est à dire lorsque (d'après la première loi de Newton en référentiel galiléen) :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$-mg\vec{e}_z - \alpha\vec{v}_l = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_l = -\frac{mg}{\alpha}\vec{e}_z = -\frac{mg\,(1 + l/a)}{6\pi\eta a}\vec{e}_z$$

---

2. *Donnez ensuite l'expression du temps caractéristique τ mis pour atteindre cette vitesse limite, ainsi que l'ordre de grandeur de la distance D parcourue pendant cette durée.*

Réponse :
On obtient le temps caractéristique τ à l'aide du PFD :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{6\pi\eta a}{m(1 + l/a)}}_{1/\tau}\vec{v} = -g\vec{e}_z$$

Soit $\tau = \frac{m(1+l/a)}{6\pi\eta a}$ par identification. L'ordre de grandeur de la distance parcourue est, en première approximation,

$$D = \tau \times v_l$$

<u>Remarque</u> : Cette estimation est discutable puisqu'elle ne tient pas compte du fait que la goutte accélère durant cette phase, τ étant précisément la durée durant laquelle la goutte accélère. Néanmoins, ce semble être l'esprit de l'énoncé de faire cette approximation, puisqu'il n'est pas demandé de résoudre explicitement l'équation différentielle.

---

3. *On donne $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Calculez v_l, τ et D pour $a_1 = 0{,}01\,\mathrm{mm}$ et pour $a_2 = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.*

Réponse :
On a $m = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 = 4{,}2 \times 10^{-12}\,\mathrm{kg}$ pour la première goutte et on en déduit $v_l = 1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ puis $\tau = 1{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$.

Pour la deuxième goutte, on a $m = 4{,}2 \times 10^{-9}\,\mathrm{kg}$ puis $v_l = 1{,}3 \times 10^{-1}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et finalement $\tau = 1{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$.

---

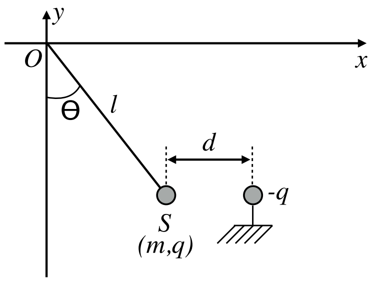
4. *L'atmosphère est modélisé par une couche uniforme de hauteur $h = 8$ km. En utilisant les résultats précédents, calculez le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2. Peut-on supposer la vitesse de chute constante dans ces deux cas ?*

Réponse :
Dans les deux cas, on a $D \ll h$, on pourra donc supposer la vitesse constante et en déduire la durée de la chute simplement en utilisant, pour chacune des deux gouttes

$$t_{\text{transit}} = \frac{h}{v_l}$$

On trouve $t_{\text{transit}} = 71$ jours pour la première goutte et $t_{\text{transit}} = 17\,\mathrm{h}$ pour la seconde. La vitesse de chute de la première goutte est si lente qu'il est possible de négliger sa chute.

IV Équilibre éléctro-statique ($\star\star$)



Un pendule est constitué d'une petite sphère S, de masse $m = 45\,\mathrm{g}$, attachée au bout d'un fil idéal de longueur l. On impose à cette sphère une charge électrique positive q que l'on souhaite déterminer.

D'autre part, une autre sphère chargée avec une charge opposée $-q$ est placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle θ. On supposera que les 2 sphères sont à la même hauteur.

1. *On mesure les valeurs suivantes : $\theta = 36°$ et $d = 22$ cm. La permittivité électrique de l'air est pratiquement égale à celle du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$. Que vaut la valeur de la charge q ?*

   Réponse :
   Il convient premièrement d'effectuer un bilan des forces appliquées à la sphère S dans le référentiel d'étude supposé Galiléen : $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta$, $\vec{F}_E = F_E\sin(\theta)\vec{e}_r + F_E\cos(\theta)\vec{e}_\theta$ puis $\vec{T} = -T\vec{e}_r$, avec $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$ (force électrostatique dirigée vers $\vec{e}_x$)
   Le système est à l'équilibre si $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_E = \vec{0}$ (première loi de Newton). A l'inverse, la relation obtenue selon $\vec{e}_r$ comporte deux inconnues (dont T). La relation obtenue selon $\vec{e}_\theta$ permet d'aboutir au résultat :

   $$-mg\sin(\theta) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mgd^2} \Rightarrow q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 mgd^2\tan(\theta)}$$

   Cela correspond à une charge de $q \approx 1{,}31 \times 10^{-6}$ C

V trajectoire d'un projectile (⋆⋆)

Reprendre l'application du cours sur la chute libre (avec $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\cos(\theta)\vec{e}_y + v_0\sin(\theta)\vec{e}_z$) en prenant en compte cette fois l'existence de frottements fluides du type $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$.

1. *Obtenir les équations horaire $y(t)$ et $z(t)$ en prenant comme origine du repère la position initiale du projectile.*

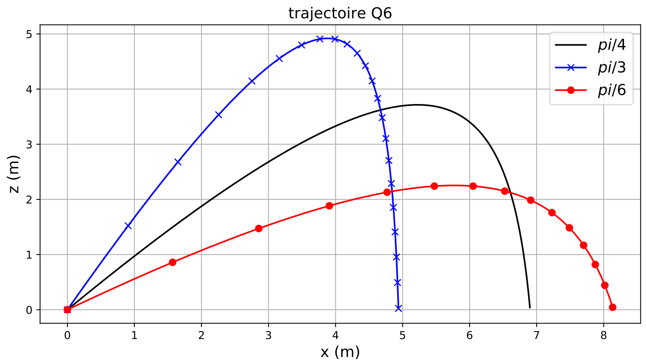
   Réponse :
   On obtient après calcul :

   $$y(t) = \tau v_0\cos(\theta)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$
   $$z(t) = -g\tau t + \tau(v_0\sin(\theta) + g\tau)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

---

2. *En prenant $v_0 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 0{,}4\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$ et $m = 200$ g, tracez la trajectoire $z(y)$ décrite par le projectile à l'aide d'un programme écrit en python pour $\theta = \pi/4$. On stoppera le tracé lorsque le projectile retouchera le sol. Ici, on ne cherchera pas à obtenir l'équation formelle de $Z(y)$.*

   Réponse :
   On obtient la figure suivante (avec aussi les résultats pour d'autres angles).



---

3. *Toujours à l'aide d'un programme écrit en python, cherchez pour quel angle initial $\theta_{\max}$ la portée du tir est maximale.*

   Réponse :
   Il faut écrire une fonction donnant la portée du tir en fonction de θ. Pour cela on peut utiliser une dichotomie pour chercher t_c lors z s'annule une seconde fois puis calculer $y(t_c)$
   On pourra ensuite chercher le maximum de cette fonction par rapport à θ

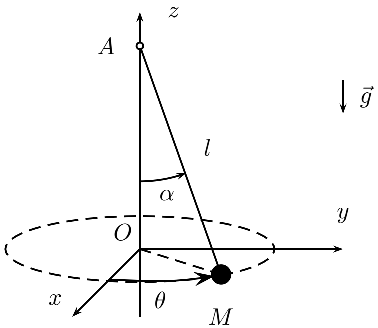
   On obtient ainsi $\theta_{\max} = 0{,}419$ rad et correspond à ce qui est observé sur le graphique précédant. En absence de frottement, on avait obtenu $\theta'_{\max} = \frac{\pi}{4} \approx 0,78$. Cette solution est donc différente

---

VI Pendule conique (⋆⋆⋆)

Un point matériel M, de masse m, lié par un fil inextensible de longueur l à un point fixe A et tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe Az.

Soit α l'angle que forme AM avec la verticale (c.f. schéma ci-contre).



1. *Exprimez l'angle α et la tension du fil T en fonction de m, g, l et ω avec l'hypothèse $l\omega^2 > g$. On supposera dans cette question uniquement que $\alpha \neq 0$.*

Réponse :

— Système : $\{M\}$
— Référentiel : Le référentiel lié au support fixe supposé Galiléen
— Base de projection : la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec O définit sur le schéma (mouvement tournant)
— Bilan des forces :
  — Le poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
  — La tension du fil : $\vec{T} = T(-\sin(\alpha)\vec{e}_r + \cos(\alpha)\vec{e}_z)$
— Application du principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \tag{1}$$

$$m\left((\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2)\vec{e}_r + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z \right) = -mg\vec{e}_z - T(\sin(\alpha)\vec{e}_r + \cos(\alpha)\vec{e}_z) \tag{2}$$

Cette relation vectorielle permet d'obtenir trois équations scalaires. On cherche à exprimer α et T. On peut donc résoudre !

Projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$2m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$$

On en déduit $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$: La distance à l'axe ne varie pas dans ce cas. (conséquence de $\omega = Cste$). On en déduit aussi $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = 0$ et $z = Cste$ (application du Th de Pythagore dans le triangle AOM)

Projection sur $\vec{e}_r$:

$$mr\omega^2 = T\sin(\alpha) \tag{3}$$

Projection sur $\vec{e}_z$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0 = -mg + T\cos(\alpha) \Rightarrow mg = T\cos(\alpha) \tag{4}$$

Les deux dernières equations dépendant à la fois de α et T. On peut donc les combiner pour isoler ces deux paramètres sachant que $\sin(\alpha) = r/l$

$$(3)/(4) \Rightarrow \frac{r\omega^2}{g} = \tan(\alpha) \Rightarrow l\frac{\omega^2}{g}\sin(\alpha) = \tan(\alpha) \Rightarrow \frac{g}{l\omega^2} = \cos(\alpha) \quad \text{ou} \quad \alpha = 0 \tag{5}$$

On a bien $g/(l\omega^2) < 1$ donc cette équation admet une solution non triviale $\alpha = \mathrm{acos}(g/(l\omega^2))$. Pour la tension, on obtient dans le cas non trivial :

$$(3) \Rightarrow T = ml\omega^2 \tag{6}$$

Il existe aussi une autre solution : $\alpha = 0$. Cette dernière est d'ailleurs la seule solution envisageable lorsque $g/(l\omega^2) > 1$ et donc le point matériel reste à la verticale.

---

2. *Qu'est ce qui se passe lorsque $l\omega^2 < g$.*

Réponse :
Cette fois, la solution non triviale disparait et il ne reste plus que le cas $\alpha = 0$ (pendule vertical). On ne peut plus déduire la valeur de T d'après l'équation 3. A l'inverse, l'équation 4 donne $T = mg$ (ce qui est attendu pour un pendule vertical).

VII Trois petits problèmes ouverts ($\star\star\star$)

1. *Un objet lancé verticalement vers le haut passe par la même altitude h (hauteur repérée par rapport à l'origine O du repère) aux instants $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ et $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Déterminer h.*

Réponse :
Appliquons le PFD au point matériel M assimilé à l'objet dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place dans un repère cartésien 1D avec $\vec{e_z}$ orienté selon la verticale ascendante. Une fois lancée, en supposant l'absence de frottement, seul le poids s'exerce sur l'objet. Ainsi, en projection sur $\vec{e_z}$:

$$m\ddot{z} = -mg$$

En intégrant deux fois successivement, et en notant α_1 et α_2 les constantes d'intégration :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$$

Soit, avec les conditions initiales $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$,

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

On cherche à déterminer h qui est solution du système de deux équations :

$$z(t_1) = h \quad \text{et} \quad z(t_2) = h$$

Soit encore $z(t_1) = z(t_2)$. Ainsi, il vient

$$-\frac{1}{2}g{t_1}^2 + v_0 t_1 = -\frac{1}{2}g{t_2}^2 + v_0 t_2$$

D'où $v_0 = \frac{g({t_1}^2 - {t_2}^2)}{2(t_1 - t_2)} = 60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Il ne reste qu'à déterminer h, par exemple en $= t_1$:

$$h = -\frac{1}{2}g{t_1}^2 + v_0 t_1 = 100\,\mathrm{m}$$

---

2. *Tous les êtres humains vivant sur la Terre se regroupent au même endroit et sautent au même moment. Déterminer le déplacement subit par la Terre durant le saut. On suppose l'ensemble immobile (pas d'action du Soleil ou de la Lune notamment).*

Réponse :
Le système {Terre+humain} est isolé (aucune force extérieure ne s'exerce sur le système). Il est donc possible d'appliquer le PFD sur la Terre puis sur les humains (pris comme un unique point matériel) dans un référentiel supposé galiléen (le référentiel lié au barycentre du système serait adapté, mais sa maîtrise n'est pas au programme). Il vient, en notant H pour humains et T pour Terre :

$$m_T \overrightarrow{a_T} + m_H \overrightarrow{a_H} = \overrightarrow{0}$$

On intègre une première fois, la vitesse initiale étant nulle :

$$\overrightarrow{v_T} = -\frac{m_H}{m_T}\overrightarrow{v_H}$$

On intègre une seconde fois, la position initiale des deux corps étant supposée nulle (en les assimilant à des points matériels initialement confondus. En pratique, c'est inexact mais ça ne changerait rien au résultat final puisque seul le déplacement nous intéresse et pas la position.) :

$$\overrightarrow{OM_T} = -\frac{m_H}{m_T}\overrightarrow{OM_H}$$

En sautant, les humains modifient leur position de $\left\|\overrightarrow{OM_H}\right\| = 1\,\mathrm{m}$ (hauteur d'un saut). La population humaine est de 7 milliards avec une masse estimée à $70\,\mathrm{kg}$, il vient

$$m_H = 5 \times 10^{11}\,\mathrm{kg}$$

Si la masse de la Terre n'est pas connue, on peut l'estimer à partir de sa masse volumique (qui est typiquement celle d'un métal). En prenant $R_T = 6300\,\mathrm{km}$ et $\rho_T = 5000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, il vient

$$m_T = \rho_T \times \frac{4}{3}\pi {R_T}^3 = 5{,}2 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$$

Ce qui est, au passage une très bonne estimation de la masse réelle de la Terre. Finalement, on trouve :

$$\left\|\overrightarrow{OM_T}\right\| = \frac{m_H}{m_T}\left\|\overrightarrow{OM_H}\right\| = 9{,}5 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

C'est une distance inférieure à la taille d'un atome ! Il est bien difficile de déplacer la Terre !

---

3. *Le champ de gravitation à la surface de la Lune est de $\overrightarrow{g_L} = 1{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Déterminer la hauteur maximale à laquelle vous seriez capable de sauter sur la Lune.*

Réponse :
Une fois que nos pieds ont quitté le sol, la seule force qui s'exerce sur nous (en supposant les frottements absents) est la force de l'interaction gravitationnelle de la Terre ou de la Lune. Appliquons dans chacun des deux cas le PFD sur un humain dans un référentiel galiléen adapté (référentiel terrestre ou lunaire selon). On obtient, après intégration en supposant une vitesse initiale v_0 dirigée vers le haut :

$$v_z(t) = -gt + v_0 \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

Soit t_m l'instant auquel la hauteur maximale est atteinte. On a alors $v(t_m) = 0$ (rebroussement), soit $t_m = v_0/g$. En réinjectant l'expression de t_m dans $z(t)$, on obtient la hauteur maximale atteinte $z_{\max}$.

$$z_{\max} = z(t_m) = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

$z_{\max}$ est donc inversement proportionnel à g. Toutes choses égales par ailleurs, $g_T \approx 6 g_L$. On pourra donc sauter à une altitude six fois supérieure sur la Lune (ce qui facilitait fortement les déplacements des astronautes en mission lunaire malgré la lourdeur de leurs équipements).

Astuces :

E2 Q4 : on trouve $v_{A,\mathrm{frottsol}} = \sqrt{2gH(1 - \frac{f}{tan\alpha})}$
E3 Q3 : $v_l \approx 1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *et* $\tau \approx 1{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$
E4 Q1 : On trouve $q \approx 1{,}31 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$
E5 Q3 : Numériquement, on trouve $\theta_{\mathrm{max}} = 0{,}419\,\mathrm{rad}$
E6 Q1 : $\alpha = acos(g/(l\omega^2))$
E7 Q1 : $h \approx 100\,\mathrm{m}$