TD 08 | M1- **Cinématique du point**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Ecrire des vecteurs dans une base	✓		✓		✓	✓	
Analyser la cinématique	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Gerer des calculs	✓				✓	✓	
Faire preuve de sens physique		✓				✓	✓
Analyser un schéma			✓	✓	✓		
Réaliser un schéma				✓			✓
Mettre en équations un problème abstrait							✓

I Mouvement dans différentes bases ($\star$)

La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cartésiennes : $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ et $z(t) = p\omega t$ où p, R et ω sont des constantes positives.

1. Déterminez les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire les expressions de $\theta(t)$, $r(t)$ et $z(t)$.
2. De quel type de mouvement s'agit-il ?
3. Déterminez les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans la base cylindrique. Calculez leurs normes.
4. Même question mais dans la base cartésienne.
5. Laquelle de ces deux bases vous paraît-elle être la plus appropriée ?

II Freinage et conditions climatiques ($\star$)

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$, sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a_1 = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

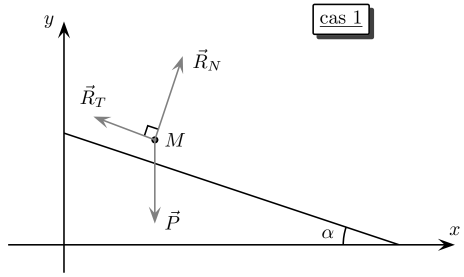
1. Calculez la durée T_1 et la distance L_1 de freinage.
2. Lors d'un averse, le véhicule ne peut freiner avec une accélération supérieure (en norme) à $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calculez la durée T_2 et la distance L_2 de freinage dans cette nouvelle situation.
3. Que vaut L_2/L_1 ? Commentez ce résultat.

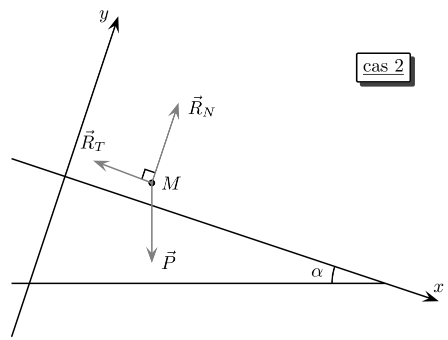
III Manipulation de vecteurs coordonnés ($\star$)

Dans les questions suivantes, projetez les forces selon les directions des différentes bases choisie (cartésiennes : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; cylindro-polaires : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$) en fonction de l'angle présent sur la figure.

On appellera A la norme du vecteur $\vec{A}$, A_x sa composante selon x ($A_x = \vec{e}_x \cdot \vec{A}$ et idem pour les autres composantes.). Pensez à vérifier vos résultats dans les cas limites où l'angle vaut 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

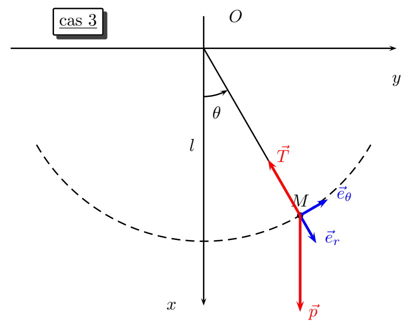
1. Les deux cas suivant sont très similaires, mais le choix de la base cartésienne est différent.





2. Dans le ci-contre suivant, projetez les forces sur la base polaire et ensuite sur la base cartésienne

   Pour résoudre les équations de la dynamique, quel système de coordonnées vaut-il mieux privilégier.

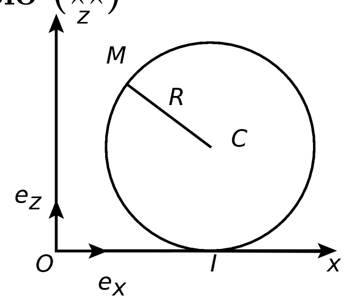


IV Mobile autoporteur ($\star$)

En se déplaçant sur du papier, un mobile autoporteur laisse une marque tout les $\tau = 100$ms. Ces points sont notés M_i. On mesure sur la feuille la distance $M_1M_2 = 1$cm.

1. Calculer la norme de la vitesse du mobile au points M_4 et M_6.
2. Tracer sur graphique la vitesse du mobile au point M_4 et M_6.
3. Exprimer l'accélération du mobile en M_5
4. Tracer sur le graphique l'accélération du mobile en M_5.

V Cinématique d'une valve de vélo (⋆⋆)



On considère une roue de rayon R et de centre C, comportant une valve M à sa périphérie. On se place dans le référentiel terrestre R_T, lié au sol et on utilise un repère cartésien (O, x, z), l'axe Oz étant vertical et dirigé vers le haut. On notera θ l'angle $(-\vec{e}_z, \overrightarrow{CM})$. On considère le mouvement circulaire comme uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$.

La roue roule sans glisser sur le sol de manière à ce que le point C suive une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_C = v_C \vec{e}_x$. Le mouvement est donc dans le plan (Oxz). À $t = 0$, le point C a pour coordonnées cartésiennes $(0, R)$ et la valve est en O.

1. Donner en fonction du temps les coordonnées du point C : $(x_C(t); z_C(t))$.
2. Exprimer en fonction des données la distance parcourue par le point C en un tour de la roue.

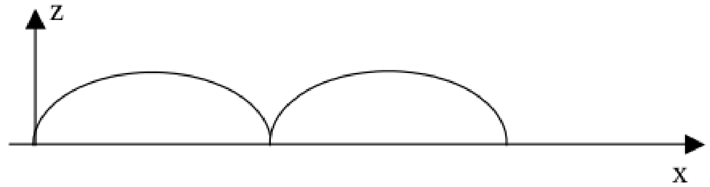
La roue roule sans glisser sur son support ; le point M, lorsqu'il est au sol, a donc une vitesse nulle. On considère de plus le repère d'origine C associé au référentiel R_R lié à la roue.

3. Exprimer la vitesse v_M du point M en fonction de $\vec{v}_C$, R, Ω et un vecteur de la base polaire puis démontrer que $v_C = -R\omega$.
4. Exprimer les vecteurs unitaires de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de θ.
5. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel R_R lié à la roue.

On étudie le mouvement du point M dans le référentiel R_T terrestre.

6. Exprimer à tout instant les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel terrestre. Commenter ces résultats.

La trajectoire du point M, $z = f(x)$, est une cycloïde représentée ci dessous pour $\omega < 0$ (rotation dans le sens horaire) :



7. Préciser les coordonnées des points de vitesse nulle.

VI Bretelle d'autoroute (⋆ ⋆ ⋆)

Un conducteur, au volant de son automobile, que l'on assimilera a un point matériel, se déplace sur l'autoroute à la vitesse $V_0 = 110\,\mathrm{km/h}$. Il souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50\,\mathrm{m}$.

Pour éviter de déraper dans la bretelle, **la norme de l'accélération** du véhicule doit rester inférieur à $a_m = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ à tout instant.

1. Montrez que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse V_0 sans risquer de quitter la route.
2. Montrez que si l'on entre dans la bretelle à la vitesse V_0 et qu'on freine dans le virage, alors cela augmente le risque de sortir de la route.
3. Calculez la vitesse maximale à laquelle la voiture peut décrire le virage sans risque de dérapage.

VII Le pigeon voyageur (⋆ ⋆ ⋆)

1. Sur une route longue de 50 km, deux cyclistes partent de chaque extrémité et roulent l'un vers l'autre. L'un roule à la vitesse constante de 15 km/h, l'autre à la vitesse constante de 25 km/h. Un oiseau qui vole à 50 km/h va sans arrêt de l'un à l'autre. Quelle distance aura-t-il parcouru quand les deux cyclistes se croiseront ?

Astuces :

E1 Q3 : $v = \omega\sqrt{R^2 + p^2}$.
E2 Q3 : $L_2/L_1 = 2 \Rightarrow$ Danger !
E3 Q1 : $R_{N_x} = +R_N \sin\alpha$ et $R_{N_y} = R_N \cos\alpha$ pour le cas 1.
E3 Q2 : $P_r = P\cos\theta$ et $P_\theta = -P\sin\theta$
E5 Q3 : $v_M = \vec{v}_C + R\omega\vec{e}_\theta$
E7 Q1 : L'oiseau doit parcourir 62,5 km