TD 08 | M1- **Cinématique du point**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Ecrire des vecteurs dans une base	✓		✓		✓	✓	
Analyser la cinématique	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Gerer des calculs	✓				✓	✓	
Faire preuve de sens physique		✓				✓	✓
Analyser un schéma			✓	✓	✓		
Réaliser un schéma				✓			✓
Mettre en équations un problème abstrait							✓

I Mouvement dans différentes bases ($\star$)

La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cartésiennes : $x(t) = R\cos(\omega t)$, $y(t) = R\sin(\omega t)$ et $z(t) = p\omega t$ où p, R et ω sont des constantes positives.

1. Déterminez les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire les expressions de $\theta(t)$, $r(t)$ et $z(t)$.

   Réponse :
   Lorsque $x > 0$, on a $\tan(\theta) = y/x = \tan(\omega t)$ soit par identification, $\theta = \omega t$. Lorsque $x < 0$, on obtient le même résultat.

   ---

2. De quel type de mouvement s'agit-il ?

   Réponse :
   Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

   ---

3. Déterminez les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans la base cylindrique. Calculez leurs normes.

   Réponse :
   On a $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + p\vec{e}_z = \vec{v}R\omega\vec{e}_\theta + p\omega\vec{e}_z$ puis $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$. On obtient alors pour les normes $v = \omega\sqrt{R^2+p^2}$ et $a = R\omega^2$.

   ---

4. Même question mais dans la base cartésienne.

   Réponse :
   On a $\vec{v} = -R\omega\sin(\theta)\vec{e}_x + R\omega\cos(\theta)\vec{e}_y + p\vec{e}_z$ puis $\vec{a} = -R\omega^2\cos(\theta)\vec{e}_x - R\omega^2\sin(\theta)\vec{e}_y$.
   On obtient pour les normes $v = \sqrt{(p\omega)^2 + (R\omega)^2} = \omega\sqrt{R^2+p^2}$

   ---

5. Laquelle de ces deux bases vous paraît-elle être la plus appropriée ?

   Réponse :
   La description est plus rapide en cylindrique (mais attention aux dérivées).

II Freinage et conditions climatiques ($\star$)

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$, sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a_1 = 5{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1. Calculez la durée T_1 et la distance L_1 de freinage.

   Réponse :
   On a $v(t) = v_0 - a_1 t$. On en déduit que le véhicule est à l'arrêt lorsque $v(T_1) = 0 \Rightarrow T_1 = v_0/a_1 \approx 6{,}6\,\mathrm{s}$
   De plus, on a $x(t) = v_0 t - a_1(t^2)/2 \Rightarrow x(T_1) = v_0^2/a_1 - v_0^2/(2a_1) = v_0^2/(2a_1) \approx 111\,\mathrm{m}$

   ---

2. Lors d'un averse, le véhicule ne peut freiner avec une accélération supérieure (en norme) à $2{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Calculez la durée T_2 et la distance L_2 de freinage dans cette nouvelle situation.

   Réponse :
   Il suffit de reprendre les A.N.s (d'où l'intérêt de travailler uniquement avec des expressions littérales). On en déduit $T_2 \approx 13{,}3\,\mathrm{s}$ puis $x(T_2) \approx 222\,\mathrm{m}$.

   ---

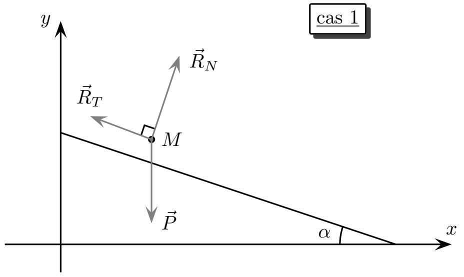
3. Que vaut L_2/L_1 ? Commentez ce résultat.

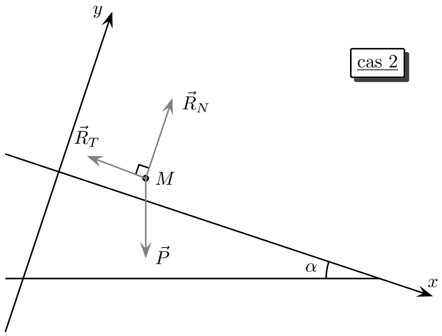
   Réponse :
   On trouve $L_2/L_1 \approx 2$. La distance de freinage est donc considérablement augmentée.

III Manipulation de vecteurs coordonnés ($\star$)

Dans les questions suivantes, projetez les forces selon les directions des différentes bases choisie (cartésiennes : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$; cylindro-polaires : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$) en fonction de l'angle présent sur la figure.
On appellera A la norme du vecteur $\vec{A}$, A_x sa composante selon x ($A_x = \vec{e}_x \cdot \vec{A}$ et idem pour les autres composantes.). Pensez à vérifier vos résultats dans les cas limites où l'angle vaut 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

1. Les deux cas suivant sont très similaires, mais le choix de la base cartésienne est différent.





Réponse :
cas 1

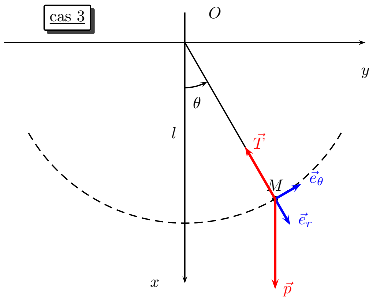
$$\begin{array}{ccc} P_x = 0 & ; & P_y = -P \\ R_{N_x} = +R_N \sin\alpha & ; & R_{N_y} = R_N \cos\alpha \\ R_{T_x} = -R_T \cos\alpha & ; & R_{T_y} = R_T \sin\alpha \end{array}$$

cas 2

$$\begin{array}{ccc} P_x = P\sin\alpha & ; & P_y = -P\cos\alpha \\ R_{N_x} = 0 & ; & R_{N_y} = R_N \\ R_{T_x} == -R_T & ; & R_{T_y} = 0 \end{array}$$

2. Dans le ci-contre suivant, projetez les forces sur la base polaire et ensuite sur la base cartésienne

Pour résoudre les équations de la dynamique, quel système de coordonnées vaut-il mieux privilégier.



Réponse :
cas 3

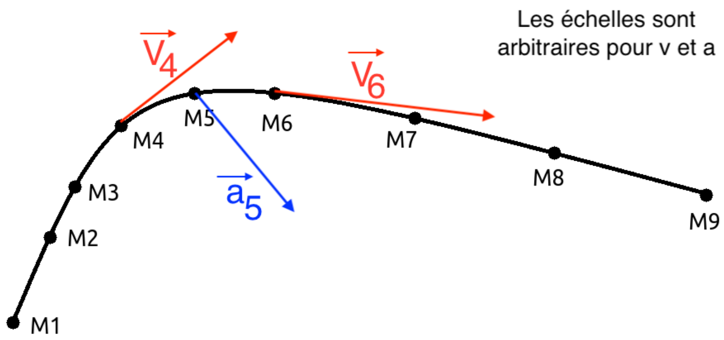
En cartésien (attention à l'orientation des axes) :

$$\begin{array}{ccc} P_x = P & ; & P_y = 0 \\ T_x = -T\cos\theta & ; & T_y = -T\sin\theta \end{array}$$

En polaire : $$\begin{array}{ccc} T_r = -T & ; & T_\theta = 0 \\ P_r = P\cos\theta & ; & P_\theta = -P\sin\theta \end{array}$$

IV Mobile autoporteur ($\star$)

En se déplaçant sur du papier, un mobile autoporteur laisse une marque tout les $\tau = 100$ms. Ces points sont notés M_i. On mesure sur la feuille la distance $M_1M_2 = 1$cm.



1. Calculer la norme de la vitesse du mobile au points M_4 et M_6.

Réponse :
Les distances sont $M_4M_5 \approx 0,9$cm et $M_6M_7 \approx 1,2$cm. Donc

$$v_4 \approx \frac{0,9 \times 10^{-2}}{0,1} = 0,9 \times 10^{-1} = 0,09\text{m/s}$$

$$v_6 \approx \frac{1,2 \times 10^{-2}}{0,1} = 1,2 \times 10^{-1} = 0,12\text{m/s}$$

---

2. Tracer sur graphique la vitesse du mobile au point M_4 et M_6.

Réponse :
Ces dernières ont pour normes les valeurs obtenues à la question précédente, et sont tangente à la trajectoire en M_4 et M_6. De manière approchée, elles sont aussi quasi-colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{M_3M_5}$ et $\overrightarrow{M_5M_7}$. Le résultat est en rouge sur le schéma de l'énoncé, avec une échelle arbitraire.

---

3. Exprimer l'accélération du mobile en M_5

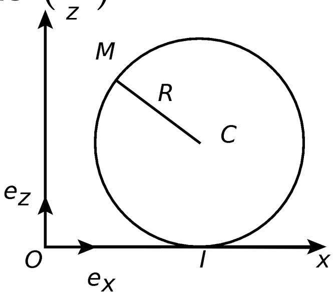
Réponse :
$\vec{a}_5 = (\vec{v}_6 - \vec{v}_4)/2\tau$. On en déduit la norme de l'accélération : $a \approx 0{,}45\,\text{m/s}^2$ à l'aide d'une lecture graphique pour $||\vec{v}_6 - \vec{v}_4|| \approx 0{,}09\,\text{m/s}$.

---

4. Tracer sur le graphique l'accélération du mobile en M_5.

Réponse :
Il suffit d'appliquer la formule précédente, de manière graphique (en bleu sur le schéma)

V Cinématique d'une valve de vélo ($\star\star$)



On considère une roue de rayon R et de centre C, comportant une valve M à sa périphérie. On se place dans le référentiel terrestre R_T, lié au sol et on utilise un repère cartésien (O, x, z), l'axe Oz étant vertical et dirigé vers le haut. On notera θ l'angle $(-\vec{e}_z, \overrightarrow{CM})$. On considère le mouvement circulaire comme uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$.

La roue roule sans glisser sur le sol de manière à ce que le point C suive une trajectoire rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_C = v_C \vec{e}_x$. Le mouvement est donc dans le plan (Oxz). À $t = 0$, le point C a pour coordonnées cartésiennes $(0, R)$ et la valve est en O.

1. Donner en fonction du temps les coordonnées du point C : $(x_C(t); z_C(t))$.

Réponse :
On connait la vitesse du point C (constante) dans le référentiel lié au sol. Il convient alors de la primitiver, en prenant en compte les conditions initiales. On obtient alors simplement $\boxed{x_C(t) = v_c t}$ et $\boxed{z_C(t) = R}$.

---

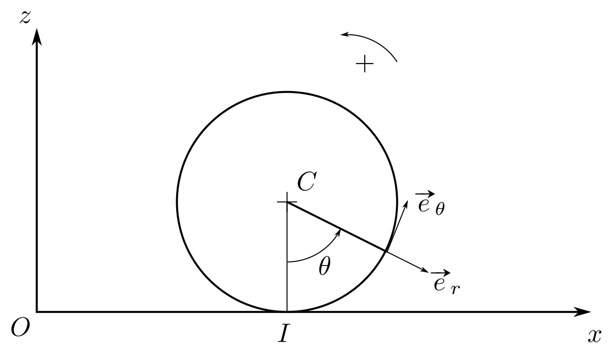
2. Exprimer en fonction des données la distance parcourue par le point C en un tour de la roue.

Réponse :
En un tour de roue, le centre parcourt une longueur $\boxed{2\pi R}$, qui corrspond au périmètre de la roue.

La roue roule sans glisser sur son support ; le point M, lorsqu'il est au sol, a donc une vitesse nulle. On considère de plus le repère d'origine C associé au référentiel R_R lié à la roue.

3. Exprimer la vitesse v_M du point M en fonction de $\vec{v}_C$, R, Ω et un vecteur de la base polaire puis démontrer que $v_C = -R\omega$.

Réponse :
On définit la base polaire d'axe $(C, -\vec{e}_y)$. Le plan est alors orienté dans le sens trigonométrique.



On constate alors le point M aura un mouvement de rotation dans le sens horaire, donc $\omega = \dot{\theta} < 0$.
On a $\overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r$ donc on peut dériver pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CM}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta$$

De plus, $v_M = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{CM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_C + R\omega\vec{e}_\theta$
L'énoncé indique ensuite qu'au sol $\vec{v}_I = \vec{0}$. En $M = I$, $\theta = 0$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_x$, on en déduit

$$0 = v_C + R\omega \Rightarrow \boxed{v_C = -R\omega}$$

---

4. Exprimer les vecteurs unitaires de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de θ.

Réponse :
Pour projeter, on s'appuie sur la figure précédente faite dans le cas où $\theta \in]0, \pi/2[$ et on a

$$\boxed{\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_z}$$

---

5. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel R_R lié à la roue.

Réponse :

$$\overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r \quad ; \quad \vec{v}_R = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On étudie le mouvement du point M dans le référentiel R_T terrestre.

6. Exprimer à tout instant les vecteurs position, vitesse et accélération de M, point de la valve dans le référentiel terrestre. Commenter ces résultats.

Réponse :
On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{OM} = v_C t\,\vec{e}_x + R\vec{e}_z + \overrightarrow{CM} \quad ; \quad \vec{v}_T = \vec{v}_C + \vec{v_R} \quad ; \quad \vec{a}_T = \vec{a}_R$$

Plus précisément :

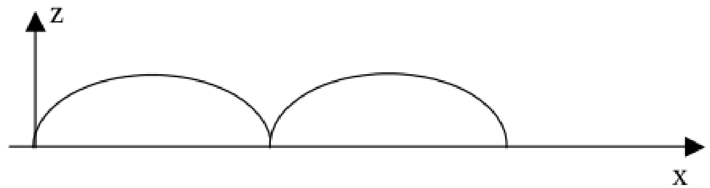
$$\overrightarrow{OM} = [-R\omega t + R\sin(\omega t)]\,\vec{e}_x + [R - R\cos(\omega t)]\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = [-R\omega + R\omega\cos(\omega t)]\,\vec{e}_x + [R\omega\sin(\omega t)]\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \left[-R\omega^2\sin(\omega t)\right]\vec{e}_x + \left[R\omega^2\cos(\omega t)\right]\vec{e}_z = -R\omega^2\vec{e}_r$$

On obtient alors le même vecteur pour l'accélération de M dans les deux référentiels. Ce résultat était attendu car ils sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

La trajectoire du point M, $z = f(x)$, est une cycloïde représentée ci dessous pour $\omega < 0$ (rotation dans le sens horaire) :



7. Préciser les coordonnées des points de vitesse nulle.

Réponse :
D'après l'équation précédente, la vitesse est nulle quand $\sin(\omega t) = 0 = \cos(\omega t) - 1$. Ces deux équations sont compatibles et on en déduit que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega t = -2n\pi \Rightarrow t_n = -2n\pi/\omega$ (le "-" vient du fait que $t > 0$ et $\omega < 0$).
On en déduit que $\overrightarrow{OM}_n = 2nR\pi\,\vec{e}_x$. A chaque tour, on retrouve le fait que le point M (et le point C) se déplacent horizontalement de $2\pi R$.

VI Bretelle d'autoroute ($\star\star\star$)

Un conducteur, au volant de son automobile, que l'on assimilera a un point matériel, se déplace sur l'autoroute à la vitesse $V_0 = 110\,\mathrm{km/h}$. Il souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50\,\mathrm{m}$.

Pour éviter de déraper dans la bretelle, **la norme de l'accélération** du véhicule doit rester inférieur à $a_m = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ à tout instant.

1. Montrez que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse V_0 sans risquer de quitter la route.

   Réponse :
   On a d'après le cours $||a|| = \frac{V_0^2}{R} \approx 22 > 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La voiture va donc déraper puis quitter la route

   ---

2. Montrez que si l'on entre dans la bretelle à la vitesse V_0 et qu'on freine dans le virage, alors cela augmente le risque de sortir de la route.

   Réponse :
   On a ici une accélération radiale donc suivant $\vec{e}_r$, l'ajout d'une accélération orthoradiale va donc augmenter la norme du vecteur accélération et donc augmenter le risque de dérapage.

   ---

3. Calculez la vitesse maximale à laquelle la voiture peut décrire le virage sans risque de dérapage.

   Réponse :
   $\frac{V_0^2}{R} = a_m \Rightarrow V_0 = \sqrt{Ra_m} \approx 80{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

VII Le pigeon voyageur ($\star\star\star$)

1. Sur une route longue de 50 km, deux cyclistes partent de chaque extrémité et roulent l'un vers l'autre. L'un roule à la vitesse constante de 15 km/h, l'autre à la vitesse constante de 25 km/h. Un oiseau qui vole à 50 km/h va sans arrêt de l'un à l'autre. Quelle distance aura-t-il parcouru quand les deux cyclistes se croiseront ?

Réponse :
Remarque : Le problème est très simple si on fait preuve de méthode ! En particulier, il ne faut surtout pas chercher à décrire le mouvement de l'oiseau et ses différents allers-retours.

Soit d_1 la distance parcourue par le cycliste (1) et d_2 la distance parcourue par le cycliste (2). Le parcours se faisant à vitesse constante pour chacun des cyclistes, on peut évaluer le temps mis par les cyclistes pour se rencontrer. Notons t_r l'instant de la rencontre.

$$d_1 + d_2 = v_1 t_r + v_2 t_r$$

On en déduit que

$$t_r = \frac{d_1 + d_2}{v_1 + v_2} = \frac{50\,\mathrm{km}}{40\,\mathrm{km/h}} = 1{,}25\,\mathrm{h}$$

En notant d la distance parcourue par l'oiseau de l'instant $t = 0$ à l'instant $t = t_r$, il vient

$$d = v_{\mathrm{oiseau}}(t_r - 0) = 50\,\mathrm{km/h} \times 1{,}25\,\mathrm{h} = 62{,}5\,\mathrm{km}$$

Astuces :

E1 Q3 : $v = \omega\sqrt{R^2 + p^2}$.
E2 Q3 : $L_2/L_1 = 2 \Rightarrow$ Danger !
E3 Q1 : $R_{N_x} = +R_N \sin\alpha$ et $R_{N_y} = R_N \cos\alpha$ pour le cas 1.
E3 Q2 : $P_r = P\cos\theta$ et $P_\theta = -P\sin\theta$
E5 Q3 : $v_M = \vec{v}_C + R\omega\vec{e}_\theta$
E7 Q1 : L'oiseau doit parcourir 62,5 km