TD 07 | E3- **Régimes transitoires du 2^{nd} ordre**

	I	II	III	IV	V	VI
Etudier un régime permanent				✓	✓	✓
Gerer des calculs	✓				✓	✓
Tracer un régime transitoire		✓		✓		
Faire preuve de sens physique			✓			
Maitriser plusieurs mailles					✓	✓
Etudier des conditions initiales				✓	✓	✓
Réaliser un bilan d'énergie			✓	✓		
Résoudre une équation différentielle	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Obtenir une équation différentielle		✓	✓	✓	✓	✓

I Résolution d'équation différentielles harmoniques ($\star$)

On cherche à résoudre les équations différentielles suivantes. Pour chaque cas, il faut établir la solution générale de l'équation homogène, trouver une solution particulière (en présence d'un second membre) puis enfin appliquer les conditions initiales.

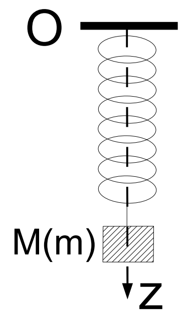
Pensez à reformuler les EDs sous la forme canonique avant de les résoudre et a vérifier que vos solutions sont bien homogènes.

1. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$
2. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$
3. $m\ddot{y} + k(y - l_0) = mg$ avec $y(0) = l_0$ et $\dot{y}(0) = 0$
4. $m\ddot{x} + kx = kl_0$ avec $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

II Autour du cours ($\star$)

1. Établir l'équation de l'oscillateur mécanique amorti (horizontal) en considérant un ressort de raideur k et longueur à vide l_0, une force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ et un mobile de masse m
2. Mettre cette équation sous forme canonique. Commenter l'allure des solutions selon les différents cas possibles.
3. On suppose que l'on se trouve dans le régime apériodique. Résoudre cette équation sachant que le mobile est initialement à sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $v(0) = v_0$.
4. Tracer la solution correspondante

III Oscillations verticales ($\star\star$)

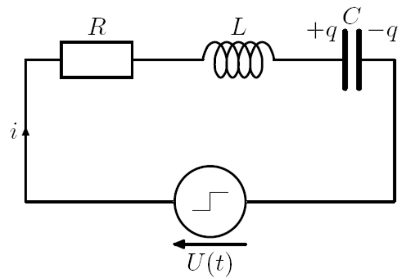


Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé au plafond en un point O. A son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z. L'axe (Oz) est dirigé vers le bas.
De plus, les frottements seront négligés dans le cadre du modèle étudié.

1. Déterminez l'équation du mouvement du point M.
2. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} ? Commentez en faisant appel à votre sens physique.
3. Quelle est la période des oscillations ?
4. Résolvez l'équation sachant qu'initialement, le point M est étiré de la distance a par rapport à z_{eq} (vers le bas) et lâché sans vitesse initiale.
5. En déduire l'expression de la vitesse $\dot{z}(t)$ du mobile en fonction du temps.
6. ($\star\star\star$)Vérifiez que l'énergie mécanique se conserve. On rappelle que l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_{p,p} = -mgz$ si l'axe Oz est vers le bas et que l'énergie potentielle elastique s'exprime selon $E_{p,l} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec l, sa longueur instantanée.
7. *Facultatif, mais important* : On note $u(t) = z(t) - z_{eq}$, c'est-à-dire l'écart par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ à partir de l'équation obtenue à la question 1

IV Réponse d'un circuit RLC série ($\star$)

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension $U(t)$ de hauteur E tel que :



$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour} t < 0 \\ E \text{ pour} t \geq 0 \end{cases}$$

On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1. Déterminez les valeurs de i et q à $t = 0^-$.
2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$.

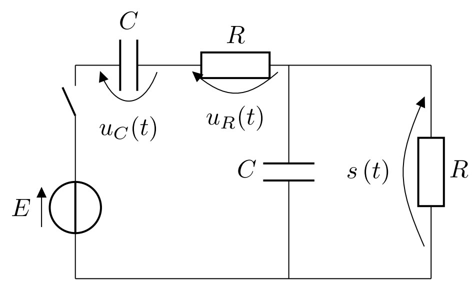
3. Précisez, en les justifiant soigneusement, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée. $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+)$.
4. Prévoyez l'état final du circuit en précisant les valeurs de $q(+\infty)$ et $i(+\infty)$.
Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose, dans la suite, la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.
5. Montrez que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\gamma t} + D$$

où on déterminera ω, A, B et D en fonction de C, E, ω_0 et γ.
6. Exprimez le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.
7. Donnez l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$ en y indiquant précisément les points particuliers, tangentes et asymptotes.
8. Déterminez les énergies E_L et E_C respectivement emmagasinées dans la bobine et le condensateur ainsi que l'énergie totale E_G fournie par le générateur pendant le régime transitoire en fonction de C et E.
9. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ?

V Pont de Wien (⋆⋆)

On considère le circuit ci-contre. Au départ, les condensateurs sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On pose $\tau = RC$.



1. Déterminez $s(0^+)$.
2. En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds à $t = 0^+$, montrer que :

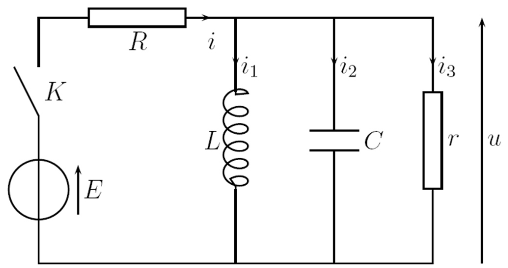
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau}$$

3. Que vaut $s(+\infty)$?
4. Montrez que l'équation différentielle régissant l'évolution de s s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$$

Que vaut alors le facteur de qualité ?
5. Résolvez l'équation différentielle pour $t > 0$.

VI Circuit RLC parallèle (⋆ ⋆ ⋆)



La figure ci-contre donne le schéma du montage étudié ; le générateur de tension est idéal, de f.e.m. E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes. Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant.

A $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du circuit électrique.

1. Déterminez, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_1, i_2 et i_3 dans les quatre branches :
   (a) Juste avant la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^-$)
   (b) Juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$)
   (c) Au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).
2. Établissez l'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées par rapport au temps t. Montrer en particulier que l'on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \lambda = \frac{R+r}{2RrC}$$

3. Quelle relation doit-il exister entre R, r, C et L pour que la solution de l'équation différentielle de la question précédente corresponde à un régime pseudo-périodique ? Par la suite, on prendra : $R = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}$; $r = 1{,}25\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$; $L = 20\,\mathrm{mH}$. Vérifiez qu'on est bien dans le cas précédent.
4. Que caractérise λ ?
5. Définissez la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.
6. Déterminez en fonction du temps t, le courant $i_3(t)$ (on pourra utiliser ω_0 et λ, notamment pour alléger l'écriture littérale).

Astuces :

E1 Q4 : on doit obtenir $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0$

E4 Q9 : $E_L = 0$ et $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ puis $E_R = \frac{1}{2}CE^2$