TD 07 | E3- **Régimes transitoires du 2^{nd} ordre**

	I	II	III	IV	V	VI
Etudier un régime permanent				✓	✓	✓
Gerer des calculs	✓				✓	✓
Tracer un régime transitoire		✓		✓		
Faire preuve de sens physique			✓			
Maitriser plusieurs mailles					✓	✓
Etudier des conditions initiales				✓	✓	✓
Réaliser un bilan d'énergie			✓	✓		
Résoudre une équation différentielle	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Obtenir une équation différentielle		✓	✓	✓	✓	✓

I Résolution d'équation différentielles harmoniques ($\star$)

On cherche à résoudre les équations différentielles suivantes. Pour chaque cas, il faut établir la solution générale de l'équation homogène, trouver une solution particulière (en présence d'un second membre) puis enfin appliquer les conditions initiales.

Pensez à reformuler les EDs sous la forme canonique avant de les résoudre et a vérifier que vos solutions sont bien homogènes.

1. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$

   Réponse :
   La solution de l'équation homogène peut se mettre sous la forme $z_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. De plus, le second membre étant nul, la solution particulière est triviale : $z_p = 0$. On peut donc appliquer les CIs à l'ensemble $z(t) = z_H(t) + z_p(t)$: $A = z_0$ et $B\omega_0 = 0$ soit au final $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$

---

2. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0$

   Réponse :
   Il s'agit de la même équation qu'à la question précédente, seules les CIs changent. Leurs prise en compte donne $A = 0$ et $B\omega_0 = v_0$ soit au final $z(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

---

3. $m\ddot{y} + k(y - l_0) = mg$ avec $y(0) = l_0$ et $\dot{y}(0) = 0$

   Réponse :
   On ré-écrit premièrement cette équation sous sa forme canonique $\ddot{y} + \omega_0^2 y = (\omega_0^2 l_0 + g)$ avec $\omega_0^2 = k/m$. On retrouve la même solution de l'équation homogène que dans les exemples précédents puis $y_p = l_0 + g/\omega_0^2$. L'application des CIs donne $A + l_0 + g/\omega_0^2 = l_0$ soit $A = -g/\omega_0^2$ puis $\omega_0 B = 0$ soit au final $y(t) = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t))$

---

4. $m\ddot{x} + kx = kl_0$ avec $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

   Réponse :
   Pour ce dernier exemple, on obtient comme solution générale $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0$. Par application des CIs, on obtient $A + l_0 = l_0 \Rightarrow A = 0$ et $B\omega_0 = v_0$ soit au final $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0$

II Autour du cours ($\star$)

1. Établire l'équation de l'oscillateur mécanique amorti (horizontal) en considérant un ressort de raideur k et longueur à vide l_0, une force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ et un mobile de masse m

   Réponse :
   $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$

---

2. Mettre cette équation sous forme canonique. Commenter l'allure des solutions selon les différents cas possibles.

   Réponse :
   $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$. On obtient par identification $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ puis $Q = \omega_0 m/\lambda = \sqrt{mk}/\lambda$. Pour $Q > 1/2$, on obtient un régime pseudo périodique ; pour $Q = 1/2$, un régime critique et pour $Q < 1/2$, un régime apériodique.

---

3. On suppose que l'on se trouve dans le régime apériodique. Résoudre cette équation sachant que le mobile est initialement à sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $v(0) = v_0$.

   Réponse :
   On a $Q < 1/2$ donc

$$x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} + l_0 \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On a $x(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$ puis $\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow \frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2} = -v_0 \Rightarrow A = v_0 \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$
On en déduit finalement

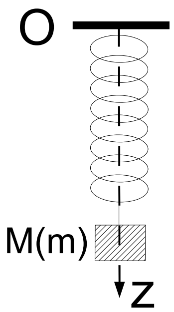
$$x(t) = v_0 \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t\tau_2}\right)$$

---

4. Tracer la solution correspondante

Réponse :
On doit obtenir une courbe compatible avec les CIs à savoir : $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = v_0 \neq 0$, un régime stationnaire (asymptote horizontale) nul, des valeurs non nulles au milieu et pas d'oscillations. A vous d'essayer !

III Oscillations verticales ($\star\star$)



Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé au plafond en un point O. A son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z. L'axe (Oz) est dirigé vers le bas.
De plus, les frottements seront négligés dans le cadre du modèle étudié.

1. Déterminez l'équation du mouvement du point M.

Réponse :
On obtient après calculs

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_0$$

---

2. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} ? Commentez en faisant appel à votre sens physique.

Réponse :
A l'équilibre, l'accélération est nulle et on obtient $z_{eq} = l_0 + g/\omega_0^2 = l_0 + mg/k$ Ainsi, lorsque la masse augmente, la longueur d'équilibre du ressort augmente ce qui semble convainquant.

---

3. Quelle est la période des oscillations ?

Réponse :
On obtient simplement $T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

---

4. Résolvez l'équation sachant qu'initialement, le point M est étiré de la distance a par rapport à z_{eq} (vers le bas) et lâché sans vitesse initiale.

Réponse :
La solution de l'équation obtenue à la question 1 est de la forme

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_{eq}$$

avec A et B, deux constantes à determiner à l'aide des conditions initiales. A $t = 0$, on a $z(0) = a + z_e q = A + z_{eq}$ d'où l'on déduit $A = a$. De plus on a aussi $v_z(0) = 0 = B\omega_0$. On obtient au final

$$z(t) = z_{eq} + a\cos(\omega_0 t)$$

---

5. En déduire l'expression de la vitesse $\dot{z}(t)$ du mobile en fonction du temps.

Réponse :
On a $\dot{z} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

---

6. ($\star\star\star$)Vérifiez que l'énergie mécanique se conserve. On rappelle que l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit $E_{p,p} = -mgz$ si l'axe Oz est vers le bas et que l'énergie potentielle elastique s'exprime selon $E_{p,l} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec l, sa longueur instantanée.

Réponse :
Après de longs calculs, on peut montrer que

$$E_m = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}k\frac{g^2}{\omega_0^4} - mgl_0$$

L'énergie mécanique est donc bien constante

---

7. *Facultatif, mais important* : On note $u(t) = z(t) - z_{eq}$, c'est-à-dire l'écart par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ à partir de l'équation obtenue à la question 1

Réponse :
On obtient l'équation suivante

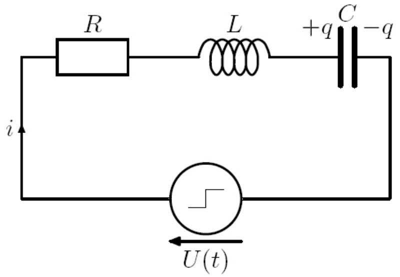
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

après un changement de variable.

IV Réponse d'un circuit RLC série ($\star$)

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension $U(t)$ de hauteur E tel que :

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour} t < 0 \\ E \text{ pour} t \geq 0 \end{cases}$$



On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1. Déterminez les valeurs de i et q à $t = 0^-$.

Réponse :
$i(0^-) = 0$ et $q(0^-) = 0$

---

2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$.

Réponse :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 CE$$

---

3. Précisez, en les justifiant soigneusement, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée. $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Réponse :
$q(t = 0^+) = q(t = 0^-) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$

---

4. Prévoyez l'état final du circuit en précisant les valeurs de $q(+\infty)$ et $i(+\infty)$.
Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose, dans la suite, la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

Réponse :
On remplace la bobine et le condensateur par leur modèles équivalent et on obtient $i(+\infty) = 0$ et $q(+\infty) = CE$.

---

5. Montrez que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\gamma t} + D$$

où on déterminera ω, A, B et D en fonction de C, E, ω_0 et γ.

Réponse :
L'équation vérifiée par $q(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre. La forme générale de la solution est donc $q(t) = q_0(t) + q_p(t)$ (particulière + homogène)
On commence par résoudre l'équation homogène ayant pour équation caractéristique : $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$ avec $\Delta = 4\left(\gamma^2 - \omega_0^2\right) < 0$. Les racines sont donc complexes :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm j\omega$$

où l'on a posé $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.
On en déduit la forme de $q_0(t)$:

$$q_0(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

On cherche ensuite une solution particulière. Comme le second membre est une constante, on cherche $q_p(t) = D$ constante. On constate alors que $D = CE$ convient.
La solution générale est donc :

$$q(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + CE$$

Finalement, A et B sont déterminées à l'aide des C.I.s
A $t=0^+$, $q(0^+)=CE$ d'où $A+CE=0 \Leftrightarrow A=-CE$. D'autre part,

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\gamma e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + e^{-\gamma t}\left(-\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right)$$

D'où $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \Rightarrow -\gamma A + B\omega = 0 \Rightarrow B = \frac{\gamma A}{\omega}$ et finalement : $B=-CE\gamma/\omega$
On obtient donc :

$$q(t) = CE\left[1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$$

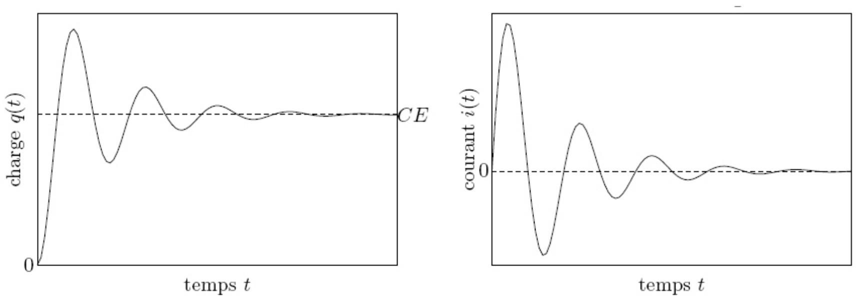
6. Exprimez le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t>0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

Réponse :
Le courant est la dérivée de la charge :

$$i(t) = CE\frac{\omega_0^2}{\omega}e^{-\gamma t}\sin\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

7. Donnez l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$ en y indiquant précisément les points particuliers, tangentes et asymptotes.

Réponse :



8. Déterminez les énergies E_L et E_C respectivement emmagasinées dans la bobine et le condensateur ainsi que l'énergie totale E_G fournie par le générateur pendant le régime transitoire en fonction de C et E.

Réponse :
L'énergie fournie E_G par le générateur s'obtient en intégrant la puissance **fournie** $p_{G_f} = Ei(t)$ par le générateur entre $t=0$ et $t=\infty$:

$$E_G = \int_0^{+\infty} Ei(t)dt$$

Comme on ne peut pas calculer directement cette intégrale, on fait un changement de variable : $i(t)dt = dq$ et on intègre de $q(0^+)=0$ à $q(+\infty)=CE$ d'où

$$E_G = \int_0^{CE} Edq = E\left[q\right]_0^{CE} = CE^2$$

Pour l'énergie emmagasinée par l'inductance et la capacité, il suffit de faire les différences des énergies respectivement électrique et magnétique stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial :

$$E_L = \Delta\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

Comme l'intensité est nulle au départ et à la fin, on a $E_L = 0$

$$E_C = \Delta\frac{1}{2C}q^2$$
$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}CE^2$$

9. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ?

Réponse :
En partant de la loi des mailles, on peut montrer que le bilan d'énergie dans le circuit s'écrit :

$$E_G(\text{fournie}) = E_L + E_C + E_R$$

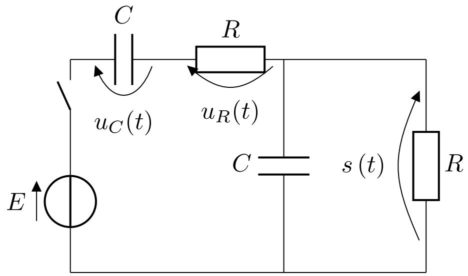
On en déduit facilement l'énergie dissipée par effet Joule

$$E_R = E_G - E_C - E_L = \frac{1}{2}CE^2$$

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit (en effet, les états initiaux et finaux sont les mêmes).

V Pont de Wien (⋆⋆)

On considère le circuit ci-contre. Au départ, les condensateurs sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On pose $\tau = RC$.



1. Déterminez $s(0^+)$.

Réponse :
La tension s est continue car il s'agit de la tension aux bornes d'un condensateur. Au départ, les condensateurs sont déchargés donc $0 = s(0^-) = s(0^+)$.

2. En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds à $t = 0^+$, montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau}$$

Réponse :
La loi des nœuds indique $i(0^+) = i_C + i_R = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) + s(0^+)/R$.
De plus, la loi des mailles donne pour $t = 0^+$, $E = \underbrace{u_C}_{=0} + u_R + \underbrace{s}_{=0} \Rightarrow$. On peut alors combiner ces résultats pour obtenir $i(0^+) = E/R$ puis $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}$ d'où le résultat avec $\tau = RC$.

3. Que vaut $s(+\infty)$?

Réponse :
On se place en régime stationnaire et les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. La loi des n œuds indique que le courant dans le résistor de droite est nul, il en va de même pour sa tension donc $s(+\infty) = 0$.

4. Montrez que l'équation différentielle régissant l'évolution de s s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$$

Que vaut alors le facteur de qualité ?

Réponse :
On se place à $t > 0$. La loi des noeuds indique $i = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{R}$. De plus, la loi des mailles donne

$$E = Ri + u_C + s$$

On dérive cette dernière :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

et on substitue l'expression de i deux fois :

$$RC\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$$

soit sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$$

5. Résolvez l'équation différentielle pour $t > 0$.

Réponse :
On obtient par identification $\omega_0 = 1/\tau$ et $\omega_0/Q = 3/\tau$ d'où $Q = \frac{1}{3}$. On est donc en présence d'un régime apériodique de solution générale :

$$s(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}\ , t > 0$$

De plus, la résolution de l'équation caractéristique (non détaillée ici) mène à

$$r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

La première condition initiale indique ensuite :

$$s(0^+) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A \quad \text{et} \quad s(t) = A\left(e^{r_+t} - e^{r_-t}\right)$$

La deuxième condition initiale mène à :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau} = A(r_+ - r_-) = A\frac{\sqrt{5}}{\tau} \Rightarrow A = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

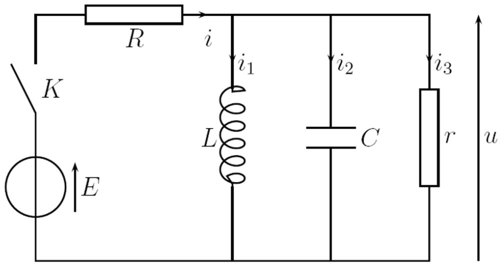
Au final, on peut ré-écrire la tension s, pour $t > 0$:

$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \left(e^{r_+ t} - e^{r_- t}\right)$$

Pour aller plus loin :
Il est parfois plus simple de garder les grandeurs r_+ et r_-, homogènes à des inverse de temps, pour mener à bout les calculs. Cependant, toute réponse correcte donnée avec les temps τ_+ et τ_- sera aussi compté juste.

Sans l'expression exacte de ces constantes, il n'est pas possible de retrouver le terme $E/\sqrt{5}$, mais ce n'est pas grave !

VI Circuit RLC parallèle ($\star\star\star$)



La figure ci-contre donne le schéma du montage étudié ; le générateur de tension est idéal, de f.e.m. E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes. Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant.

A $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du circuit électrique.

1. Déterminez, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_1, i_2 et i_3 dans les quatre branches :

   (a) Juste avant la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^-$)

   Réponse :
   On se trouve en régime stationnaire car l'interrupteur est ouvert depuis longtemps.
   - La tension aux bornes de la bobine est nulle (fil) donc $u(0^-) = 0$.
   - Le courant dans le condensateur est nul donc $i_2(0^-) = 0$.
   - Comme $u(0^-)$, on en déduit que le courant dans la résistance est nul $i_3(0^-) = u(0^-)/r = 0$.
   - L'interrupteur est ouvert donc $i(0^-) = 0$, et donc $u_R(0^-) = 0$.
   - $i = i_1 + i_2 + i_3 = 0$ donc finalement $i_1(0^-) = 0$.

   (b) Juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$)

   Réponse :
   On remarque que u et i_1 sont continus (condensateur pour la tension et bobine pour le courant). On en déduit :
   - Tension aux bornes du condensateur : $u(0^-) = 0 = u(0^+) = 0$.
   - Le courant dans la résistance r est nul : $i_3(0^+) = u(0^+)/r = 0$.
   - Courant traversant la bobine : $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$.
   - Dès que l'on ferme l'interrupteur, $i(0^+) = \frac{u_R(0^+)}{R}$. Or, la tension u_R aux bornes de R est donnée par la loi des mailles à $t = 0^+$: $E = u(0^+) + u_R(0^+)$ donc $u_R(0^+) = E$. On en déduit : $i(0^+) = \frac{E}{R}$.
   - Le courant $i(0^+)$ s'écrit également avec la loi des noeuds : $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) + i_3(0^+)$ donc $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$

   (c) Au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

   Réponse :
   On considère maintenant le régime permanent (stationnaire ici), avec l'interrupteur fermé :
   - Tension aux bornes de la bobine : $u(+\infty) = 0$.
   - On en déduit que le courant dans la résistance r est nul : $i_3(+\infty)/r = 0$.
   - Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : $i_2(+\infty) = 0$
   - Le courant i est égal à $i = E/R$ (même raison que pour la question a) : loi des mailles $\Rightarrow E + Ri(+\infty) + u(+\infty) = 0$)
   - D'après la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2 + i_3$ donc $i_1(+\infty) = i + \infty = E/R$

   ---

2. Établissez l'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées par rapport au temps t. Montrer en particulier que l'on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \lambda = \frac{R+r}{2RrC}$$

   Réponse :
   On cherche à obtenir l'équation pour i_3 une fois l'interrupteur K fermé ($t > 0$) :

Pour aller plus loin :
On va utiliser la même technique que pour la résolution de pont de Wien. En pratique, il faut s'assurer d'avoir au moins écrit une fois la relation constitutive de chacun des composant puis combiner ces relations avec la loi des nœuds et les diverses lois des mailles.

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 && \text{(Loi des nœuds)} \\ u &= L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} && \text{(Relation pour la bobine)} \\ i_2 &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} && \text{(Relation pour le condensateur)} \\ u &= ri_3 && \text{(Relation pour la résistance } r\text{)} \\ E &= Ri + u && \text{(Loi des mailles)} \end{aligned}$$

Ici, on a implicitement écrite les lois des deux petites mailles de droite en posant que la tension aux bornes de r, L et C est égale à u. Toutes les équations nécessaires à la résolution de ce problème sont donc écrite et il ne reste plus qu'à résoudre ; on peut par exemples remplacer les courants i_k en fonction de u puis terminer en sachant de $i_3 = u/r$

On commence par dériver la loi des nœuds pour faire apparaître la dérivée de i_1 qui apparait dans la relation constitutive de la bobine :

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow & -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}u + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow & -\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{L}i_3 + rC\frac{\mathrm{d}^2i_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow & \frac{r}{L}i_3 + rC\frac{\mathrm{d}^2i_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}(1 + \frac{r}{R}) = 0 \end{aligned}$$

soit au final :

$$\frac{\mathrm{d}^2i_3}{\mathrm{d}2^2} + 2\frac{r+R}{2RrC}\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_3 = 0$$

---

3. Quelle relation doit-il exister entre R, r, C et L pour que la solution de l'équation différentielle de la question précédente corresponde à un régime pseudo-périodique ? Par la suite, on prendra : $R = 2{,}5\,\mathrm{k}\Omega$; $r = 1{,}25\,\mathrm{k}\Omega$; $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$; $L = 20\,\mathrm{mH}$. Vérifiez qu'on est bien dans le cas précédent.

Réponse :
Avant de répondre à la question, il faut obtenir l'expression du facteur de qualité. En identifiant l'équations différentielle obtenue à la forme canonique, on obtient ;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r+R}{RrC} \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{RrC}{r+R} = \frac{Rr}{r+R}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Pour aller plus loin :
Si l'on prend $r = R$, on obtient $Q = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$, soit, au facteur 2 près, l'inverse du facteur de qualité pour un circuit RLC série. En général, lorsque l'on place certains dipôles en parallèles, on obtiendra toujours un facteur du qualité du même type ($R\sqrt{C/L}$), à une constante sans dimension près.

Le régime obtenu est pseudo périodique si $Q > 1/2$. De plus, avec les valeurs proposées, on a

$$\frac{Rr}{r+R}\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 5,9 > \frac{1}{2}$$

On se trouve donc bien en régime pseudo périodique.

---

4. Que caractérise λ ?

Réponse :
On remarque dans un premier temps que $2\lambda = \omega_0/Q$ en comparant l'équation différentielle à la forme canonique. De plus, l'équation caractérisque associé à l'équation différentielle s'exprime selon $r^2 + (\omega_0/Q)r + \omega_0^2 = 0$ et admet pour racines :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}i\omega_0\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La partie réelle des racines est liée au temps caractéristique τ selon

$$\tau = -\frac{1}{\Re(r_\pm)} = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{1}{\lambda}$$

On déduit que la constante lambda est reliée à l'inverse du temps caractérisque qui apparaît dans les solutions de l'équation différentielle, en cas de régime pseudo-périodique.

---

5. Définissez la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

Réponse :
De même, la pseudo pulsation ω est reliée à la valeur absolue de la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique

$$\omega = |\Im(r_\pm)| = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$$

Pour aller plus loin :
Ainsi, on remarque que pour le régime pseudo périodique de l'équation de l'oscillateur amorti, la pulsation qui va apparaître dans les cosinus et sinus n'est pas la pulsation propre : $\omega \neq \omega_0$. Cependant, pour un facteur de qualité $Q \to +\infty$ (ou pour $\lambda \to 0$), on observe que $\omega \to \omega_0$. Ainsi, dans le cas de l'équation de l'oscillateur harmonique, c'est bien la pulsation ω_0 qui intervient dans les solutions.
Il faut donc bien différencier ces deux situations.

---

6. Déterminez en fonction du temps t, le courant $i_3(t)$ (on pourra utiliser ω_0 et λ, notamment pour alléger l'écriture littérale).

Réponse :
La solution s'exprime selon :

$$i_3(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + 0$$

Or la première condition initiale indique :

$$i_3(0^+) = 0 = A \Rightarrow A = 0$$

De plus, on peut obtenir la deuxième condition initiale en remarquant que $\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = (1/r) \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (1/rC)i_2$ d'où $\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}(0^+) = i_2(0^+)/(rC) = E/(rRC)$. On en déduit :

$$B\omega = \frac{E}{rRC} \Rightarrow B = \frac{E}{rRC\omega}$$

d'où au final :

$$i_3(t) = \frac{E}{rRC\omega}e^{-t/\tau}\sin(\omega t) = \frac{E}{rRC\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}e^{-\lambda t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\times t)$$

Astuces :

E1 Q4 : on doit obtenir $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0$
E4 Q9 : $E_L = 0$ et $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ puis $E_R = \frac{1}{2}CE^2$