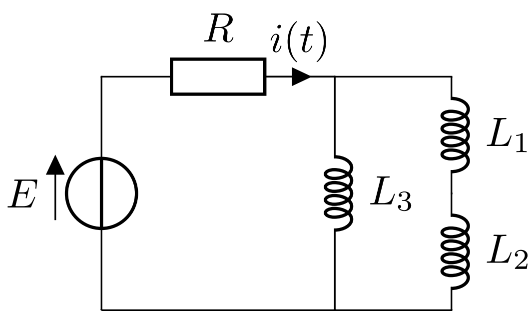
TD 06 |E2- **Régimes transitoires du 1er ordre**

	I	II	III	IV	V
Etudier un régime permanent			✓		✓
Combiner plusieurs éléments	✓				
Gerer des calculs	✓			✓	
Exprimer des puissances			✓		
Tracer un régime transitoire			✓	✓	
Faire preuve de sens physique					✓
Maitriser plusieurs mailles	✓			✓	
Analyser un schéma					✓
Etudier des conditions initiales			✓	✓	✓
Résoudre une équation différentielle		✓	✓	✓	✓
Réaliser un schéma		✓			
Obtenir une équation différentielle	✓	✓	✓	✓	✓

I Circuit avec plusieurs bobines (⋆)

Soit le circuit suivant alimenté par un générateur idéal de f.e.m. E.



1. Établissez l'équation différentielle dont i est solution.

Réponse :
$E = Ri + L_{eq}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

2. Que vaudra le courant i en régime stationnaire ?

Réponse :
E/R (schéma équivalent ou solution particulière de l'ED)

3. (⋆⋆)Reprendre les questions précédentes si on utilise 3 bobines réelles identiques d'inductance L et de résistance interne r

Réponse :
On applique deux fois la loi des mailles et une fois la loi des noeuds et on combine :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2r+3R}{2L}i = \frac{3E}{2L}$$

II Charges et décharges (⋆)

L'objectif de cet exercice consiste à étudier les circuits classiques du premier ordre en électrocinétique.

1. Dessiner le schema du montage comportant un générateur de f.e.m. E, un interrupteur K initialement ouvert puis fermé à $t = 0$, une résistance R et un condensateur de capacité C branchés en série.

Réponse :
Schéma dans le cours !

2. On considère que le condensateur est initialement déchargé. Obtenir l'équation différentielle dont u_C est solution (tension aux bornes du condensateur) puis la résoudre complètement.

Réponse :

On applique la loi des mailles pour $t > 0$: $E = Ri + u_C \Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E}$.

On en déduit que $u_C = Ae^{-t/\tau} + E$ avec $\tau = RC$ et A, une constante à determiner à l'aide de la condition initiale :

$$u_C(0^+) = 0 \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

et au final

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

3. Une fois le régime permanent atteint, on remplace le générateur par un fil. Écrire la nouvelle équation différentielle pour u_c puis la résoudre. (on prendra comme nouvelle origine des temps $t = 0$ lors du remplacement.)

Réponse :
Il convient de remplacer E par 0 (on court-circuite le générateur) dans l'E.D. précédente. On obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

La nouvelle C.I. indique $u_C(0^+) = E$, en effet, cela correspond à la solution particulière (égale au régime permanent) de l'équation précédente. On en déduit :

$$u_C = Be^{-t/\tau} + 0 \quad \text{avec} \quad B + 0 = E \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = Ee^{-t/\tau}}$$

4. Dessiner le schema du montage comportant un générateur de f.e.m. E, un interrupteur K initialement ouvert puis fermé à $t = 0$, une résistance R et une bobine d'inductance L branchés en série.

Réponse :
Schéma aussi vu en cours.

5. Obtenir l'équation différentielle dont i est solution (courant dans le circuit) puis la résoudre complètement.

Réponse :
La loi des mailles indique $E = Ri + u_L$ or $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donc sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$$

avec la constante de temps $\tau' = L/R$. On en déduit que $i(t) = De^{-t\tau'} + E/R$. Or avant basculement, le courant était nul : $i(0^-) = 0$ et par continuité du courant à travers la bobine, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$. On en déduit que

$$D + \frac{E}{R} = 0 \quad \text{donc} \quad D = -\frac{E}{R} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)}$$

On observe alors que $i \to E/R$ à la fin du transitoire (régime permanent).

6. Une fois le régime permanent atteint, on remplace le générateur par un fil. Écrire la nouvelle équation différentielle pour i puis la résoudre. (on prendre comme nouvelle origine des temps $t = 0$ lors du remplacement).

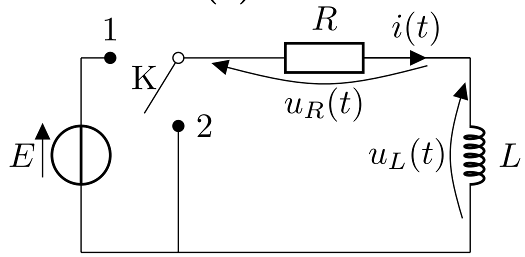
Réponse :
Encore une fois, il convient de remplacer dans le schéma le générateur par un fil, et donc en terme d'équation, de remplacer E par 0. On obtient alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau'}i = 0}$$

La condition initiale est aussi modifiée. Par continuité du courant à travers la bobine (i), on a $i(0^+) = i(0^-) = E/R$ (courant à la fin du dernier régime transitoire). On en déduit :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau'}}$$

III Régime libre du circuit RL série ($\star$)



On suppose qu'initialement l'interrupteur K est en position 1 depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. A $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.

On souhaite étudier l'allure de l'intensité $i(t)$ pendant ce régime transitoire.

1. Prévoir l'état final du circuit en précisant les valeurs de $i(+\infty)$, $u_L(+\infty)$ et $u_R(+\infty)$.

Réponse :
En régime permanent, la bobine équivaut à un fil, on a donc $u_L(+\infty) = 0$ Avec la loi des mailles $u_R(+\infty) + u_L(+\infty) = 0$ et on en déduit : $u_R(+\infty) = 0$ Or, on a $u_R(+\infty) = Ri(+\infty)$ d'où $i(+\infty) = 0$

2. Établissez l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ pour $t > 0$.

Réponse :
La loi des mailles donne $u_L + u_R = u = 0$. Or, on a

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

et $u_R = Ri$
Ainsi, il vient :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0$$

---

3. Exprimez le temps de relaxation τ du circuit en fonction de R et de L puis vérifiez que τ est homogène à un temps.

Réponse :
On a

$$\left[\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{I}{T} = \left[\frac{R}{L}i\right] = \frac{I}{[\frac{L}{R}]}$$

Ainsi, $\frac{L}{R}$ est homogène à un temps. On peut donc poser $\tau = \frac{L}{R}$. L'équation d'évolution s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$$

$\tau = \frac{L}{R}$ est donc bien le temps caractéristique du circuit.

---

4. Quelle est la condition initiale sur i ?

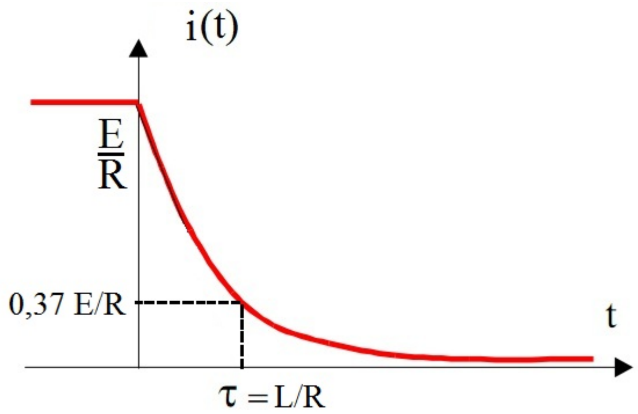
Réponse :
Pour $t = 0 < 0$, le régime permanent est établi. La bobine équivaut donc à un fil. Ainsi, $u_L(0^-) = 0$, d'où avec la loi d'additivité des tensions en $t = 0^-$: $u(0^-) = u_R(0^-) + u_L(0^-) = E$, il vient $u_R(0^-) = E$
soit $i(0^-) = E/R$
Comme on sait que la bobine assure la continuité du courant qui la traverse, on en déduit donc la condition initiale $i(0^+) = E/R$

---

5. Résolvez l'équation différentielle sur i à l'aide de la condition initiale puis tracez son évolution.

Réponse :
L'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ est une équation différentielle du premier ordre, linéaire et à coefficients constant, sans second membre. La solution de cette équation est donc $i(t) = i_0(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.
On déterminer A avec la condition initiale : à $t = 0^+$, on a $i(0^+) = E/R$ d'une part, et $i(0^+) = A$ d'autre part. On en déduit $A = E/R$ et finalement :

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



---

6. Réalisez un bilan d'énergie sur le régime transitoire.

- Calculez l'énergie W_L reçue par la bobine pendant le régime transitoire.
- Déduisez en l'énergie W_R reçue par le résistor à l'aide d'un bilan d'énergie.

Réponse :
La loi des mailles donne pour $t > 0$: $u_L + u_R = 0$
On multiplie par i : $u_Li + u_Ri = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_R$

où $\mathcal{P}_L$ et $\mathcal{P}_R$ désignent respectivement les puissances reçues par la bobine et le résistor.

On intègre entre $t = 0$ et $t = +\infty$ et il vient :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_L dt + \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_R dt = 0 \Rightarrow W_L + W_R = 0$$

où W_L et W_c désignent respectivement les énergies reçues par le condenstateur et le résistor pendant le régime transitoire.
On a donc

$$W_L = \int_0^{+\infty} u_L i dt = \int_0^{+\infty} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}dt$$

On fait un changement de variable et on intègre maintenant sur i entre $i(0^+) = \frac{E}{L}$ et $i(+\infty) = 0$ d'où

$$W_L = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Lo^2\right) = \left[\frac{Li^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{L}{2}(0^2 - \frac{E^2}{R^2}) \Rightarrow W_L = -\frac{LE^2}{2R^2} < 0$$

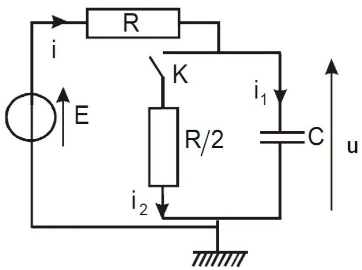
L'énergie reçue par la bobine est négative, elle fournit donc de l'énergie au circuit. En régime libre, la **bobine se comporte en générateur**.
Avec $W_L + W_R = 0$, on en déduit

$$W_R = \frac{LE^2}{2R^2} > 0$$

Le **résistor se comporte effectivement en récepteur**.
Au cours du régime transitoire, la bobine a fourni à la résistance toute l'énergie qu'elle avait stockée initialement. Cette énergie a été dissipée par effet Joule.

IV Régime transitoire ($\star\star$)

Considérons le circuit ci-contre. On note i l'intensité dans le résistor de résistance R, i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C, i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $R/2$ et $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.
On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps.



1. Précisez les valeurs de i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^-$ juste avant la fermeture de l'interrupteur.

   Réponse :
   A $t = 0^-$, l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour considérer que l'on a un régime permanent continu. Ainsi, $i_1(0^-) = 0$. (le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert)
   Comme de plus K est ouvert : $i_2(0^-) = 0$
   D'après la loi des nœuds, on en déduit que $i(0^-) = 0$ et d'après la loi d'additivité des tensions, on a alors $E = u_R(0^-) + u(0^-) = Ri(0^-) + u(0^-)$ soit $u(0^-) = E$

---

2. Préciser les valeurs de i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.

   Réponse :
   La tension aux bornes d'un condensateur est continue, on a donc $u(0^+) = u(0^-) = E$
   D'après la loi d' Ohm appliquée à la résistance $R/2$, on a $u(0^+) = R/2 i_2(0^+) \Leftrightarrow i_2(0^+) = 2E/R$
   D'après la loi d'additivité des tensions, on a $E = u_R(0^+) + u(0^+) = Ri(0^+) + E$ d'où $i(0^+) = 0$
   Enfin, d'après la loi des nœuds $i_1(0^+) = i(0^+) - i_2(0^+) \Leftrightarrow i_1(0^+) = -\frac{2E}{R}$

---

3. Même question quand t tend vers l'infini.

   Réponse :
   Quand t tend vers $+\infty$ le régime permanent continu est établi. On a donc $i_1(+\infty) = 0$
   Le circuit est équivalent à une résistance $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$ car les deux résistances sont alors en série. On a donc

   $$i(+\infty) = i_2(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{2E}{3R}$$

   On en déduit avec la loi d' Ohm

   $$u(+\infty) = \frac{R}{2} \times \frac{2E}{3R} = \frac{E}{3}$$

---

4. En utilisant la loi des nœuds, exprimez l'intensité i en fonction de u.

Réponse :
on a $i = i_1 + i_2$ or $i_2 = 2u/R$ (loi d' Ohm) et $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ On obtient finalement :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

---

5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. Montrez qu'elle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{3u}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Faîtes apparaitre le temps caractéristique τ dans l'équation différentielle.

Réponse :
D'après la loi des mailles, on a $E = u_R + u = Ri + u \Leftrightarrow i = \frac{E-u}{R}$. Ainsi,

$$\frac{E}{RC} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{3u}{RC}$$

On pose $\tau = \frac{RC}{3}$ et il vient :

$$\frac{E}{3\tau} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau}$$

---

6. Résolvez cette équation puis tracez l'allure de $u(t)$. Vérifiez qu'elle est cohérente avec les valeurs initiales et finales déterminées précédemment.

Réponse :
La solution de cette équation différentielle s'écrit

$$u(t) = u_h(t) + u_p$$

avec $u_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ et $u_p = \text{cte} = \frac{E}{3}$ d'où

$$u(t) = \frac{E}{3} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

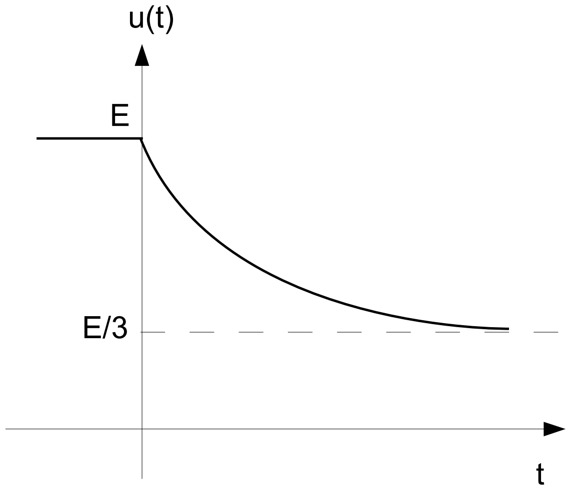
D'après l'étude des conditions initiales faite précédemment, on a $u(0^+) = E$ d'où

$$\frac{E}{3} + K = E \Leftrightarrow K = \frac{2E}{3}$$

Finalement, on a

$$u(t) = \frac{E}{3}(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}})$$

L'allure de $u(t)$ est la suivante :



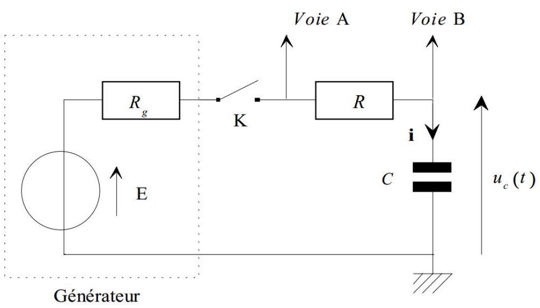
Attention : à la valeur en $t = 0^-$, à la continuité en 0, à l'asymptote et à l'allure exponentielle décroissante.

V Étude d'un régime transitoire ($\star\star$)

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série.

On le place aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_g en série avec un interrupteur K.

Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit, u_c la tension aux bornes du condensateur. A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur K.



1. Déterminez, en les justifiant $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$.

Réponse :
A $t = 0^-$, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$ De plus, à $t = 0^+$, la loi des mailles s'écrit :

$$E + i(0^+)R_g + i(0^+)R + u_c(0^+) = 0 \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R + R_g}$$

2. Établissez l'équation différentielle à laquelle obéit $u_c(t)$ puis déterminez la constante de temps τ du circuit et donner son interprétation physique.

Réponse :
D'après la loi des mailles : $E = u_c + u_R + u_{R_g} = u_c + Ri + R_g i$
Or, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ d'où

$$E = u_c + (R+R_g)C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{C(R+R_g)} = \frac{E}{R+R_g}$$

On obtient alors par identification avec la forme canonique $\tau = C(R+R_g)$.

3. Établissez l'expression de $u_c(t)$.

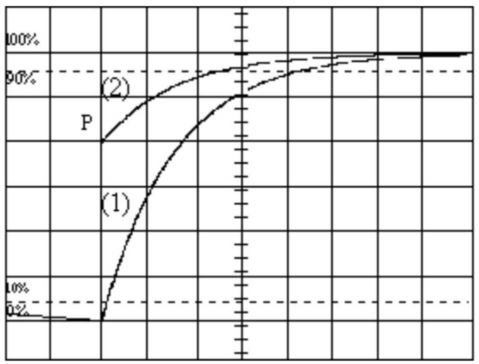
Réponse :
On a $u_c(t) = u_h t + u_p(t)$ On cherche une solution particulière constante, il vient $u_p = E$. Par ailleurs, la solution de l'équation homogène s'écrit $u_h(t) = Ke^{-t/\tau}$
Ainsi :

$$u_c(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

A $t = 0^+$, on a d'une part $u_c(0^+) = 0$ et d'autre part $u_c(0^+) = K + E$ d'où $K = -E$ et finalement

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On obtient le régime transitoire suivant à l'aide d'un oscilloscope.



4. Déterminez l'expression de t_1 pour que $u_c = 0,9E$.
Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme (page suivante) en utilisant un générateur délivrant des signaux créneaux. Les sensibilités sont : 1V/div et 0,1 ms/div.

Réponse :
On a $u_c(t_1) = 0,9E = E(1 - e^{-t_1/\tau}) \Rightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = 0,9$ soit :

$$1 - 0,9 = e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Rightarrow 0,1 = e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$
$$\Rightarrow \ln 0,1 = -\frac{t_1}{\tau} \Rightarrow \ln 10 = \frac{t_1}{\tau}$$
$$\Rightarrow t_1 = \tau \ln 10$$

5. Identifiez les courbes 1 et 2 aux voies A et B en justifiant votre choix puis déterminez la valeur de E.

Réponse :
La courbe (1) est continue, elle représente donc la tension aux bornes du condensateur, soit la voie B, tandis que la courbe (2) est discontinue : elle représente donc la voie A, c'est-à-dire la tension $u_c + u_R$, discontinue à cause de la tension u_R (elle-même discontinue à cause de l'intensité i).
La voie B passe de 0 à E, donc ici E est représentée par 6 divisions soit $E = 6\,\mathrm{V}$.

6. Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC ?

Réponse :
On doit impérativement se placer en couplage continu (DC) (sinon, les portions constantes des signaux seraient filtrées).

7. Précisez l'expression théorique de la tension au point P. Sachant que $R = 100\ \Omega$, déterminez R_g.

Réponse :
Au point P, on a la tension $u_P = u_R(0^+) + u_c(0^+) = u_R(0^+) = Ri(0^+)$ soit

$$u_P = \frac{RE}{R+R_g}$$
$$\Rightarrow R + R_g = \frac{RE}{u_P} \Rightarrow R_g = R\left(\frac{E}{u_P} - 1\right)$$

L'application numérique avec $E = 6\,\mathrm{V}$, $u_P = 4\,\mathrm{V}$ et $R = 100\,\Omega$ donne $R_g = 50\,\Omega$.

---

8. En déduire la valeur de τ puis de C.

Réponse :
Sur le graphe, on lit le temps t_1 pour atteindre 0,9 E : $t_1 = 0{,}42\,\text{ms}$.
Or, on sait que $t_1 = \ln 10\tau \Rightarrow \tau = \frac{t_1}{\ln 10}$. L'application numérique donne $\tau = 0{,}18\,\text{ms}$.
On sait de plus que $\tau = C(R+R_g) \Rightarrow C = C/(R+R_g)$ et l'application numérique donne $C = 1{,}2\,\mu\text{F}$.

---

9. Donner une majoration de la fréquence du signal créneau à utiliser pour pouvoir observer l'intégralité du régime transitoire ?

Réponse :
Pour observer tout le régime transitoire, il faut que la demie-période du signal créneau soit supérieure à 5τ (bonne ordre de grandeur de la durée du régime transitoire), soit $\frac{T}{2} > 5\tau$, d'où $f < \frac{1}{10\tau}$
Avec $\tau = 0{,}18\,\text{ms}$, il vient $\underline{f < 0{,}6\,\text{kHz}}$.

---

10. Comment pourrait-on observer l'évolution de l'intensité dans le circuit ?

Réponse :
Pour observer l'évolution de l'intensité, il faudrait pouvoir observer la tension u_R seule puisque $u_R = Ri$ est proportionnelle à i. Cependant, il faut pour cela changer l'ordre des composants pour éviter les problèmes de masse.

Astuces :

E1 Q3 : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2r+3R}{2L} i = \dfrac{3E}{2L}$
E3 Q6 : $W_R = \frac{LE^2}{2R^2}$ et $W_L = -W_R$
E5 Q8 : $\tau = 0{,}18\,\text{ms}$ d'où $C = 1{,}2\,\mu\text{F}$