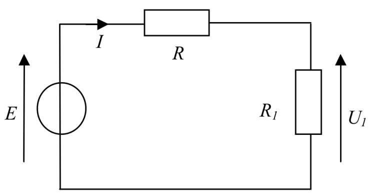
TD 05- **Electrocinétique en régime stationnaire**

	I	II	III	IV	V	VI
Effectuer un calcul d'incertitude					✓	
Combiner plusieurs éléments	✓	✓				✓
Gerer des calculs	✓			✓		✓
Démontrer un résultat						✓
Faire preuve de sens physique			✓	✓		
Analyser un schéma	✓	✓			✓	✓
Appliquer un pont diviseur	✓			✓	✓	✓
Exprimer un rendement			✓	✓		
Réaliser un schéma				✓		

I Diviseur de tension ($\star$)

On considère le circuit suivant alimenté par un générateur de tension continue $E = 5{,}0\,\text{V}$ de résistance négligeable et constitué de deux résistances $R = 10\,\Omega$ et $R_1 = 40\,\Omega$.



1. Exprimer la tension U_1 aux bornes de la résistance R_1 en fonction de E, R et R_1 puis calculer sa valeur.

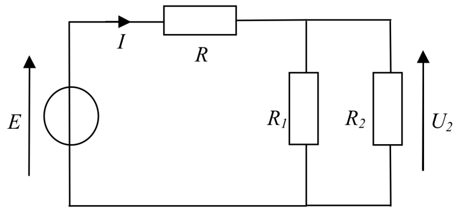
   Réponse :
   On obtient à l'aide d'un pont diviseur de tension $U_1 = \frac{R_1}{R+R_1}E \approx 4\,\text{V}$

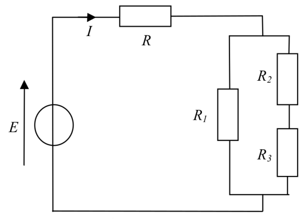
   ---

2. Exprimer l'intensité I en fonction de E, R et R_1 puis calculer sa valeur.

   Réponse :
   On a simplement $I = U_1/R_1 = \frac{E}{R+R_1} =\approx 100\,\text{mA}$

On place une résistance $R_2 = 40\,\Omega$ en parallèle avec la résistance R_1 (schéma de gauche).





3. Exprimer la résistance équivalente R_{eq} des deux résistances en parallèle en fonction de R_1 et R_2, puis calculer sa valeur.

   Réponse :
   On a $1/R_{\text{eq}} = 1/R_1 + 1/R_2 \Rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \approx 20\,\Omega$

   ---

4. Exprimer la tension U_2 aux bornes de la résistance R_2 en fonction de E, R et R_{eq} puis calculer sa valeur.

   Réponse :
   On reprend le résultat du pont diviseur de tension précédent en remplaçant R_1 par R_{eq} d'où

   $$U_E = \frac{R_{\text{eq}}}{R+R_{\text{eq}}}E \approx 3{,}3\,\text{V}$$

   ---

5. Exprimer l'intensité I en fonction de E, R et R_{eq} puis calculer sa valeur.

   Réponse :
   On a $I = E/(R + R_{\text{eq}}) \approx 166\,\text{mA}$

On considère ensuite le dernier circuit (droite) avec $R_3 = 20\,\Omega$.

6. Exprimer l'intensité I en fonction de E, R, R_1, R_2 et R_3 puis calculer sa valeur.

   Réponse :
   Il convient de chercher la résistance équivalente globale du montage :

   $$R'_{eq} = R + \left(\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1} \approx 25\,\Omega$$

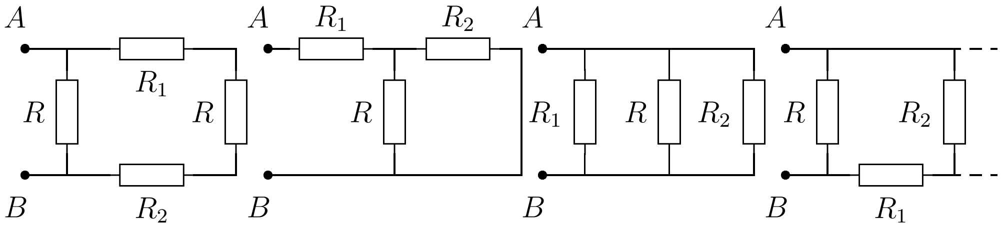
   On en déduit après simplification du schéma $I = E/R'_{eq} = 200\,\text{mA}$

   Pour aller plus loin :
   En electrocinétique, il faut toujours chercher à simplifier au maximum un circuit, en utilisant des dipôles équivalents, avant de chercher à écrire des équations. En effet, écrire N lois des mailles et P lois des noeuds, est aussi possible, mais en pratique, très compliqué !!!
   A l'inverse, avant de simplifier un schéma en regroupant des dipôles, il faut être certain que ces derniers soient bien soit en série ou soit en parallèle.

7. Si ce n'est déjà fait, reprendre tous les résultats et vérifier qu'ils sont bien homogènes.

   Réponse :
   TODO

II Simplification de circuit ($\star$)



1. Les résistors R, R_1 et R_2 sont-ils en série, en parallèle ou ni l'un ni l'autre ? Déterminez, si possible, la résistance équivalente comprise entre les points A et B

   Réponse :

   — On considère les deux branches en parallèle : $R_{eq,1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R_1+R_2}\right)^{-1}$.

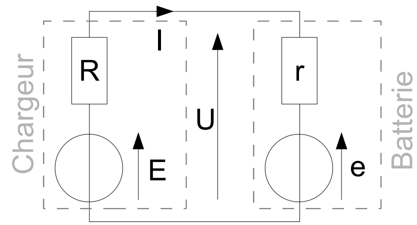
   — R et R_2 en parallèle puis mise en série avec R_1 : $R_{eq,2} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}\right)^{-1}$.

   — Trois résistance en parallèle : $R_{eq,3} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$.

   — Le circuit se prolonge, on ne peut donc le simplifier

III Charge d'une batterie ($\star$)

Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, de f.e.m $e = 12$ V et de résistance interne $r = 0{,}2\,\Omega$, on la branche sur un chargeur de f.e.m E et de résistance interne $R = 0{,}3\,\Omega$.
On lit sur la batterie qu'elle a une "capacité" de 10 A.h (ampères-heures).



Dans toute la suite, on suppose que la tension à vide E du chargeur est supérieur à la f.e.m de la batterie e.

1. Déterminez le courant I circulant dans la batterie lors de la charge en fonction des données du problème.

   Réponse :
   D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm, on a

$$E - RI + rI - e = 0 \Leftrightarrow I = \frac{E-e}{R+r}$$

2. Déterminez la puissance délivrée par la source E, la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit et la puissance reçue par la batterie (cette énergie est en fait stockée sous forme chimique).

   Réponse :
   Comme la source E est en convention générateur, la puissance qu'elle délivre est $P_f = Ei$. La puissance dissipée par effet Joule est la puissance reçue par les 2 résistances, soit $P_J = rI^2 + RI^2 = (r+R)I^2$
   La puissance reçue et stockée par la batterie est $P_{\text{batt}} = eI$ car elle est en convention récepteur.

3. Que vaut le rendement η de la charge (rapport de la puissance reçue par la batterie par la puissance fournie par la source E).

   Réponse :
   Pour le rendement, retenez $\eta = \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance consommee}}$:

$$\eta = \frac{P_{\text{batt}}}{P_f} = \frac{eI}{EI} = \frac{e}{E}$$

4. Réalisez l'application numérique pour les deux cas suivants : $E_1 = 13\,\mathrm{V}$ et $E_2 = 15\,\mathrm{V}$

Réponse :
A.N. : $\eta_1 = 92\ \%$ et $\eta_2 = 80\ \%$.

5. Initialement, la batterie est déchargée, avec seulement 10 % de sa capacité. Déterminer la temps de charge pour la recharger complètement en fonction de E. Réalisez ensuite l'application numériques pour les deux valeurs de E précédentes.

Réponse :
Initialement, on a $Q_i = 10\ \%$ soit $Q = 1\ A.h$. On doit donc apporter à la batterie une charge $Q_f = 9\ A.h$. Or, comme l'intensité est constante on a

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_f}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{Q}{I}$$

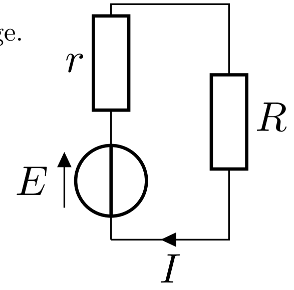
L'application numérique donne $\Delta t = 4{,}5\,\mathrm{h}$ dans le premier cas et $\Delta t = 1{,}5\,\mathrm{h}$ dans le second. Il faut donc trouver un compromis entre rendement et temps de charge.

IV Adaptation de puissance (⋆⋆)

On considère une résistance variable R alimentée par un générateur de tension caractérisé par sa f.e.m. E et de résistance interne r. On cherche à maximiser la puissance reçue par la résistance R.

1. Faîtes un schéma du montage.

Réponse :



2. Déterminez l'expression de la puissance P reçue par la résistance R en fonction de R, r et E.

Réponse :
On a par définition $P = u_R \times I = RI^2$. On peut alors regrouper les résistors en série pour obtenir ensuite, via la loi des mailles, $E = (R + r)I$. On en déduit finalement :

$$\boxed{P = \frac{R}{(r+R)^2} \times E^2}$$

3. Montrez que P est maximale pour une valeur particulière de R à déterminer. Lorsque R prend cette valeur, on dit que le montage est adapté.

Réponse :
On observe que P est nulle lorsque R est nulle, ou bien lors que $R \to +\infty$. De plus, la fonction $E : R \mapsto E(R)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors dériver cette dernière afin de chercher pour quelle valeur de R il y a un extremum (dérivée nulle) :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}R} = E^2 \frac{(r+R)^2 - 2(r+R)R}{(r+R)^4} = 0 \Rightarrow r + R = 2R \Rightarrow \boxed{R = r}$$

L'extremum correspond bien à maximum d'après ce qui précède.

On définit le rendement du transfert par $\eta = \frac{P}{P_f}$ où P_f est la puissance fournie par la force électromotrice E du générateur.

4. Que vaut ce rendement dans le cas général.

Réponse :
La puissance fournie par le générateur s'exprime selon $P_f = E \times I$. On en déduit :

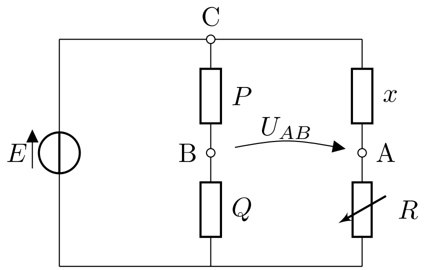
$$\boxed{\eta = \frac{RI^2}{EI} = \frac{RI}{E} = \frac{R}{R+r}}$$

5. Que devient-il lorsque le montage est adapté ?

Réponse :
On obtient un rendement de 50 %. Ainsi, la moitié de la puissance fournie par le générateur est reçue par R, l'autre moitié par r.

V Pont de Wheatstone (⋆⋆)

L'objectif de ce montage est de déterminer la valeur de la résistance x.
Les résistances de précision P et Q sont choisies avec des valeurs fixées à $P = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $Q = 1\,\mathrm{k\Omega}$. La valeur de la résistance R peut être modifiée (Boite à décade) et son incertitude est supposé nulle. Les incertitudes à 95 % sur les valeurs de P et Q sont $s\Delta_P = 50\,\Omega$ et $\Delta_Q = 10\,\Omega$.



1. Exprimez les tensions U_{AC} et U_{BC} et fonction de E, P, Q, x et R.

Réponse :
On utilise deux fois la formule du pont diviseur de tension (attention aux signes des tensions) :

$$U_{AC} = -\frac{x}{R+x}E$$
$$U_{BC} = -\frac{P}{Q+P}E$$

---

2. En déduire la valeur de la tension U_{AB}.

Réponse :
La tension U_{AB} se déduit facilement par combinaison : $U_{AB} = U_{AC} - U_{BC}$ soit :

$$U_{AB} = E\left(\frac{P}{Q+P} - \frac{x}{R+x}\right)$$

---

3. Le pont de Wheatstone est dit **équilibré** lorsque la tension U_{AB} est nulle (on le vérifie à l'aide d'un Voltmètre). En déduire alors la relation entre R, x, P, Q

Réponse :
En cas de tension nulle, on obtient :

$$\frac{x}{R+x} = \frac{P}{Q+P}$$
$$\Rightarrow x = \frac{RP}{Q}$$

---

4. Le pont étant équilibré pour $R = 657\,\Omega$, en déduire la valeur de x et son incertitude associée.

Réponse :
L'A.N. donne $x = 6,57\ k\Omega$ et pour son incertitude :

$$\frac{s_x}{x} = \sqrt{\left(\frac{s_P}{P}\right)^2 + \left(\frac{-s_Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{s_R}{R}\right)^2}$$

soit finalement $s_x = 0.08\ k\Omega$

VI Réseau infini de résistances (⋆ ⋆ ⋆)

1. Calculez les résistances équivalentes R_1 et R_2 des deux circuits (D_1) et (D_2) représentés ci-dessous.

Réponse :
Le dipôle D_1 est constitué de deux resistors en série. Il est donc équivalent à la résistance $R_1 = R + R$
Pour le dipôle D_2, on commence par associer les 2 résistances de droites en une résistance de $2R$. Cette résistance se trouve en parallèle d'une résistance R, ce qui équivaut à une résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{2}{3}R$$

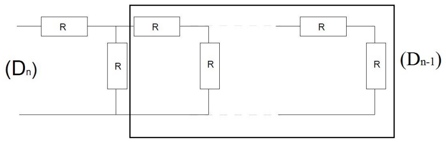
Cette résistance est alors en série avec une résistance R, d'où finalement $R_2 = 5R/3$
Pensez à faire apparaitre les schémas intermédiaires sur votre copie

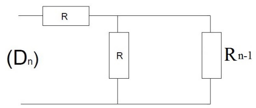
---

2. Soit (D_n) le circuit composé de n cellules (D_1) placées en parallèles. Donnez l'expression de R_n, résistance équivalente du circuit (D_n) en fonction de R_{n-1}, résistance équivalente du circuit D_{n-1}.

Réponse :
Il suffit de remarquer que le circuit D_n est basé sur le circuit D_{n-1}

On remarque que le dipôle D_n peut être vu comme l'association de résistances R avec le dipôle D_{n-1} (schéma ci-contre) On peut donc associer dans un premier temps la résistance R_{n-1} et la résistance R qui sont en parallèle pour obtenir R'_{eq} :





$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{n-1}} \Leftrightarrow R'_{eq} = \frac{RR_{n-1}}{R+R_{n-1}}$$

Que l'on associe ensuite avec la résistance R avec laquelle elle est en série :

$$R_n = R + \frac{RR_{n-1}}{R+R_{n-1}}$$

---

3. Démontrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R$. Le lecteur attentif reconnaîtra ici l'expression du nombre d'or.

Réponse :
On note l, la limite de la suite $(R)_n$. On sait alors que R_n et R_{n-1} vont tendre vers l lorsque $n \to \infty$. On peut donc ré-utiliser l'expression précédente :

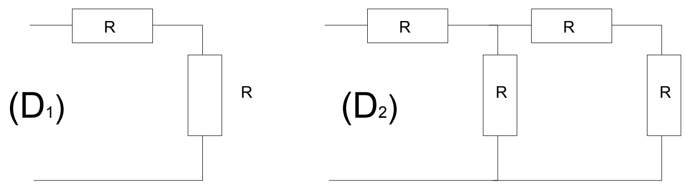
$$l = R + \frac{Rl}{R+l}$$
$$\Rightarrow \ l^2 - Rl - R^2 = 0$$

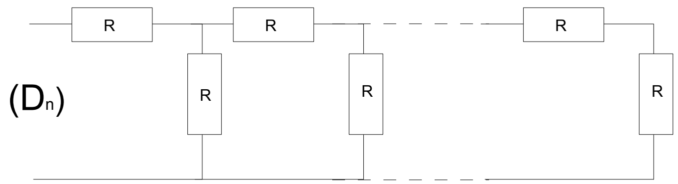
Pour résoudre cette équation, on calcule son discriminant : $\Delta = 5R > 0$: Elle admet 2 racines qui sont

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R \ \ , \ \ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}R$$

La seconde racine est négative, ce qui ne convient pas pour une résistance, on conserve uniquement la première :

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R$$





Astuces :

E1 Q6 : On obtient $I = \dfrac{E}{R + \left(\frac{1}{R_2+R_3} + \frac{1}{R_1}\right)^{-1}} \approx 200\,\mathrm{mA}$

E3 Q5 : On trouve comme rendement $\eta_1 = 92\%$ et $\eta_2 = 80\ \%$

E4 Q4 : Après simplification, on trouve $\eta = \frac{R}{R+r}$

E5 Q4 : On trouve $x = 6{,}57\,\mathrm{k}\Omega$