TD 04 | O3- **Lentilles minces dans les conditions de Gauss**

	I	II	III	IV	V	VI
Combiner plusieurs éléments		✓	✓			✓
Gerer des calculs		✓		✓		✓
Faire preuve de sens physique			✓		✓	
Analyser un schéma					✓	
Appliquer une relation de conjugaison	✓	✓	✓	✓		✓
Réaliser un schéma	✓	✓	✓	✓		✓
Etudier un instrument d'optique			✓			

I Construction d'images ($\star$)

On considère les 7 configurations suivantes :

(a) Lentille convergente de centre optique O, $\overline{OA} = -0.5f'$,
(b) Lentille divergente, AB situé dans le plan focal objet de la lentille,
(c) Lentille convergente de centre optique O, $\overline{OA} = -3f'$,
(d) Lentille divergente de centre optique O, $\overline{OA} = f'$,
(e) Lentille convergente, $\overline{OA} = 2f'$,
(f) Lentille divergente de centre optique O, $\overline{OA} = -3f'$,
(g) Lentille divergente de centre optique O, $\overline{OA} = -0.5f'$.

Pour chacune de ces configurations et en utilisant le site suivant : `https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/optiqueGeo/lentilles/lentille_mince.php`,

1. Trouver graphiquement, dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'image $A'B'$ d'un objet AB étendu, perpendiculaire à l'axe.

   Réponse :

   (a) L'image est au foyer objet.
   (b) Image à l'infini.
   (c) $\overline{OA'} = 1.5f'$
   (d) $\overline{OA'} = 0.5f'$.
   (e) $\overline{OA'} = 0.66f'$.
   (f) $\overline{OA'} = 0.75f'$.
   (g) $\overline{OA'} = -f'$.

---

2. Pour chacun des cas, vérifier le résultat en utilisant les relations de conjugaison de Descartes.

   Réponse :

---

3. Pour chaque cas, préciser si l'objet et l'image sont réels ou virtuels.

   Réponse :

II Correction d'un Oeil myope ($\star$)

Un individu *myope* a son ponctum remotum P_R à $p = 11\,\text{cm}$ de son œil (Il est placé à l'infini pour un œil non myope). La distance cristallin-rétine de cet œil vaut $d = 2{,}5\,\text{cm}$. Le point au centre du cristallin est noté O.

1. Quel est la distance focale f' de son cristallin lorsqu'il est au repos ? Comparer avec la distance focale d'un oeil emmétrope (sans défaut visuel) au repos.

   Réponse :
   La distance focale est telle que le ponctum remotum est conjugué avec la rétine. On en déduit par appliquation de la relation de conjuguaison de Descartes que :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{-p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{dp}{d+p} \approx 2{,}0\,\text{cm}$$

   pour un oeil emmétrope, l'infini est conjugué avec la rétine et il faut une distance focale image égale à $d = 2{,}5\,\text{cm}$. Il y a donc un écart de $0{,}5\,\text{mm}$ entre les deux types d'yeux.

---

2. ($\star\star$)Cet individu consulte son opticien qui lui propose des lunettes qui seront portées à $e = 1\,\text{cm}$ de son cristallin, au point L. Quelle doit être leurs focale f'' ?

   Réponse :
   Le foyer focal image du système complet **doit** être situé sur la rétine. D'après l'énoncé, que la rétine est confondu avec le PR.

Il suffit donc d'utiliser des lentilles dont le foyer image est confondu avec le PR. On en déduit que

$$\frac{1}{\overline{LP_R}} - \frac{1}{-\infty} = \frac{1}{f''} \Rightarrow f'' = \overline{LP_R} = \overline{LO} + \overline{OP_R} \approx -10\,\text{cm}$$

Pour aller plus loin :
La correction obtenue est négative et correspond donc à une lentille divergente. En effet, en cas de myopie, le cristallin est trop convergent (focale plus courte que la distance cristallin / rétine) et cela doit être compensé par l'ajout d'une lentille divergente.

III Etude d'une lunette astronomique ($\star$)

On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif (L_1) de distance focale $f'_1 = 80\,\text{cm}$, et l'oculaire (L_2) de distance focale $f'_2 = 6{,}0\,\text{mm}$. La lunette est réglée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

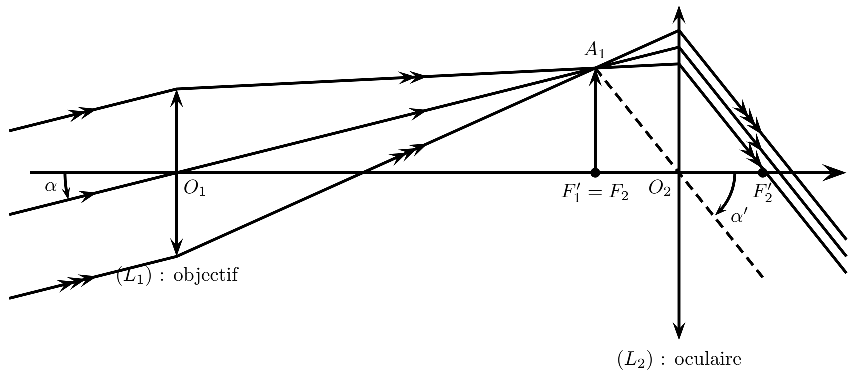
1. Déterminez la distance h entre (L_1) et (L_2). Quel est l'intérêt de cette lunette pour l'utilisateur ?

Réponse :
On a alors $F'_1 = F_2$ d'où $\boxed{h = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2 = 80{,}6\,\text{cm}.}$ Le système est afocal et l'œil voit les objets lointains sans accommoder c'est à dire $\boxed{\text{sans fatigue.}}$
$A_\infty - (L_1) \to A_1 - (L_2) \to A'_\infty$.

---

2. Représentez sur un schéma (sans respecter l'échelle) la trajectoire d'un rayon arrivant sur l'objectif avec un angle α par rapport à l'axe optique. On note α' l'angle sous lequel il émerge du système.

Réponse :
Figure 1 : les trois rayons, provenant d'un point A situé à l'infini convergent en A_1 (image intermédiaire) qui appartient au plan focal image de (L_1). Comme A_1 est dans le plan focal objet de (L_2), les trois rayons, issus de A_1 sortent parallèlement de (L_2).



---

3. Déterminez le grossissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f'_1 et f'_2.

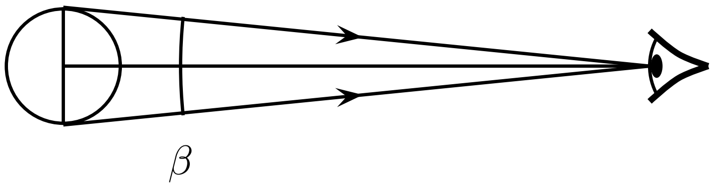
Réponse :
Sur la figure, on lit $\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\overline{F'_1A_1}}{\overline{O_1F'_1}} > 0$ et $\alpha' \simeq \frac{\overline{F'_1A_1}}{\overline{O_2F_2}} < 0$ d'où

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -133,3.}$$

---

4. On estime à 30° l'angle maximal sous lequel l'observateur peut voir l'image. L'observateur peut-il voir Mars en entier dans la lunette ? Même question pour la Lune.
Données : distance Terre-Mars $D_{TM} = 7{,}0 \times 10^7\,\text{km}$, *diamètre de Mars* $d_M = 6800\,\text{km}$; *distance Terre-Lune* $D_{TL} = 3{,}8 \times 10^5\,\text{km}$, *diamètre de la Lune* $d_L = 3400\,\text{km}$.

Réponse :
Soit β l'angle sous lequel l'observateur voit l'astre sans la lunette (diamètre angulaire). $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{d_A}{2L_{AT}}$ où d_A est le diamètre de l'astre et L_{AT} la distance qui le sépare de l'observateur terrestre. À travers la lunette, l'observateur observera l'astre sous un diamètre angulaire $\beta' = |G|\beta = 2|G|\arctan\frac{d_A}{2L_{AT}}$. Il faut que β' reste inférieur à 30°.



	L_{TA} (km)	d_A (km)	β (rad)	β' (rad)	β (deg)
Mars	$7,0.10^7$	6800	$9,7.10^{-5}$	$1,29.10^{-2}$	$0,74$
Lune	$3,8.10^5$	3400	$8,9.10^{-3}$	$1,19$	$68,3$

Conclusion : $\boxed{\text{on observe Mars en entier mais qu'une partie de la Lune.}}$

Tous les rayons incidents qui pénètrent dans l'objectif de la lunette donnent des rayons émergents passant à l'intérieur d'un cercle appelé **cercle oculaire**. Le cercle oculaire est donc l'image par l'oculaire de la monture de l'objectif.

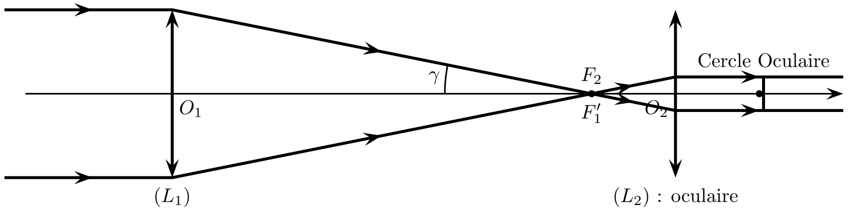
5. ($\star\star$)Quelle est la position x du cercle oculaire par rapport à l'oculaire ?

Réponse :
Le cercle oculaire est l'image de (L_1) par (L_2). Or (L_1) est à la distance h de (L_2) avec $h \gg f_2'$, le cercle oculaire est donc $\boxed{\text{juste derrière le plan focal image de de } (L_2).}$

---

6. ($\star\star$)Déterminez la relation entre le diamètre d du cercle oculaire et le diamètre D de l'objectif.

Réponse :
Figure 2 : on lit directement $\tan\gamma = \frac{D/2}{f_1'} = \frac{d/2}{f_2'}$ d'où $\boxed{d = -\frac{D}{G} \simeq 4{,}5\,\text{mm}.}$



---

7. ($\star\star$)Où faut-il placer l'œil pour avoir une observation optimale ?

Réponse :
Pour une observation optimale, il faut que toute la lumière qui traverse la lunette pénètre dans lœil. On le place donc $\boxed{\text{au cercle oculaire}}$ ($\simeq$ dans le plan focal image de l'oculaire) et il faut que son diamètre reste inférieur à celui de la pupille soit quelques mm.

IV Focométrie par les méthodes de Bessel et Silberman ($\star\star$)

Un objet lumineux AB est placé à une distance D fixe d'un écran. On intercale entre les deux une lentille convergente de distance focale f' à la position $x = \overline{AO}$.

1. Montrez que selon la valeur de D il existe une, deux ou aucune position de la lentille pour laquelle l'image de l'objet se trouve sur l'écran.

Réponse :
$x^2 - xD + Df' = 0$

---

2. On se place dans le cas de Bessel, pour lequel il existe deux positions $x_1 = \overline{AO_1}$ et $x_2 = \overline{AO_2}$ de la lentille pour que l'image de l'objet se trouve sur l'écran. Exprimez x_1 et x_2 en fonction de D et f'.

Réponse :
$x_{12} = \frac{D}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{f'}{D}}\right)$

---

3. Déduisez en la relation entre la distance focale f' et la distance a entre les deux positions x_1 et x_2.

Réponse :
$f' = \frac{D}{4}\left(1 - \frac{a^2}{D^2}\right)$

---

4. Déterminez le grandissement γ_1 pour la position x_1 et le grandissement γ_2 pour la position x_2. Commenter.

   Réponse :
   $\gamma_1\gamma_2 = 1$

---

5. Déterminez, dans le cas de Silberman pour lequel il n'existe qu'une seule position possible pour la lentille, la relation entre f' et D.

   Réponse :
   $D = 4f'$

---

6. Que vaut alors le grandissement γ ?

   Réponse :
   $\gamma = -1$.

---

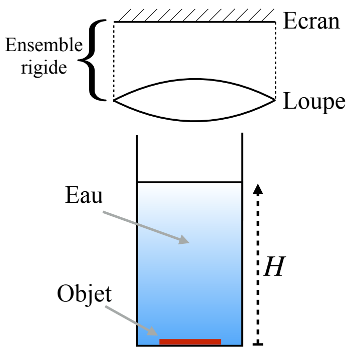
7. On peut appliquer ces deux cas à la détermination de la distance focale d'une lentille convergente. Est-ce possible pour une lentille divergente ?

   Réponse :
   Non, car dans ce cas, on ne peut tout simplement pas projeter l'image d'un objet réel sur un écran. Il n'est alors pas possible de mesurer facilement toute les distances qui interviennent dans cet exercice.

V Mesure d'un indice de réfraction (⋆⋆)

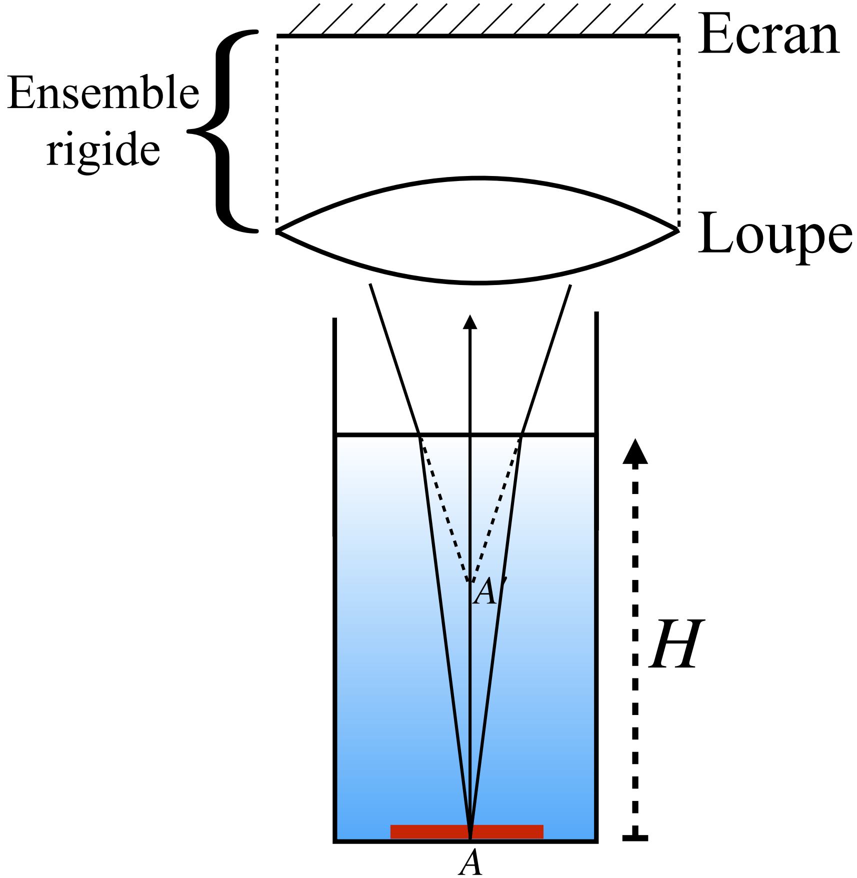
Au moyen d'une loupe, on forme sur un écran l'image réelle d'un objet réel plan déposé au fond d'une éprouvette graduée, initialement vide de tout liquide.

On remplit ensuite l'éprouvette d'une hauteur H de liquide : l'image apparaît alors floue. La loupe et l'écran étant solidaires, on rétablit une image nette en effectuant un déplacement de l'ensemble d'une distance h.



1. On considère un point objet A au centre de la pièce. Identifier à l'aide d'une construction graphique la position de son image A' pour le dioptre plan eau/air.

   Réponse :
   Lors du passage eau/air, l'indice de réfraction diminue donc les angles augmentent (en valeur absolue).



L'image A' se trouve alors au dessus de l'objet A.

---

2. Pourquoi faut-il déplacer alors la loupe pour retrouver une image nette ? Dans quel sens faut-il la déplacer ?

Réponse :
Le système loupe + écran réalise une image nette d'un objet situé à une distance fixe. Lorsque l'on rajoute de l'eau, A' qui devient l'objet pour le système loupe + écran se décale et il faut donc déplacer simultanément et vers le haut cet ensemble pour conserver une image nette.

---

3. De combien faut-il déplacer la loupe si on remplit l'éprouvette d'une hauteur $H = 20\,\text{cm}$ d'eau, sachant que l'indice de l'eau vaut $n = 1{,}33$?

Réponse :
On cherche d'abord la position de l'image de la pièce par le dioptre plan. Soit P le projeté de la pièce sur le dioptre, on a alors $n_{eau}PA' = n_{air}PA \Rightarrow PA' = \frac{PA}{n} = \frac{H}{n}$ d'après les notations de l'exercice. Il y a donc un décalage de $h = H - \frac{H}{n} \approx 5\,\text{cm}$.

---

4. On remplit maintenant l'éprouvette avec de l'éthanol pur, toujours sur une hauteur $H = 20$ cm. Sachant que l'on doit déplacer la loupe de $h = 53{,}0\,\text{mm}$, déterminez l'indice optique de l'éthanol.

Réponse :
On peut réutiliser le résultat précédant : $h = H - \dfrac{H}{n} \Rightarrow n = \dfrac{1}{1 - h/H}$. On en déduit $\boxed{n \approx 1{,}36}$

VI Réalisation d'un achromat ($\star\star\star$)

Les verres utilisés pour la réalisation sont sujet au phénomène de dispersion (l'indice du milieu dépend de la longueur d'onde dans le vide de la radiation). Cela conduit à l'apparition d'aberrations chromatiques lorsque le système optique est éclairé en lumière polychromatique.

On dispose alors de deux lentilles minces réalisés dans des matériaux dont les indices de réfraction n sont donnés dans le tableau suivant :

Radiation	λ_0 (nm)	Crown B. 1884	Flint C. 8132
a	656,3	1,5155	1,6748
b	587,6	1,5180	1,6810
c	486,1	1,5236	1,6961

Dans le Crown B. 1884, on réalise une lentille biconvexe de diamètre $D = 8{,}0\,\text{cm}$ dont les rayons de courbures sont $R_{1,g} = 0{,}30\,\text{m}$ pour la face de gauche et $R_{1,d} = 2{,}02\,\text{m}$ pour la face de droite. La vergence d'une lentille en fonction des rayons est donnée par la relation suivante :

$$V = (n-1)\left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_d}\right)$$

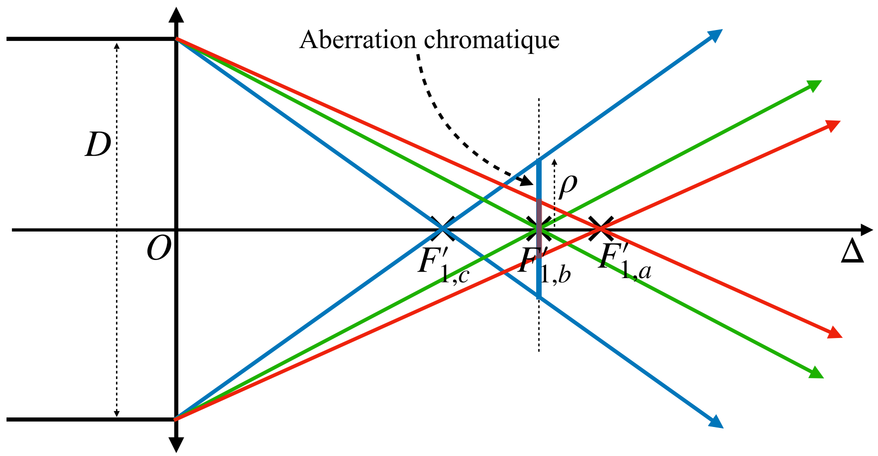
1. Quelle est la distance focale de cette lentille pour les trois longueurs d'ondes proposées ? On notera en particulier $f'_{1,b}$ la distance focale obtenue pour $\lambda_0 = 587{,}6\,\text{nm}$.

Réponse :
On obtient après calcul $f'_{1,a} = 0{,}506\,706\,\text{m}$, $f'_{1,b} = 0{,}504\,260\,\text{m}$ et $f'_{1,c} = 0{,}498\,873\,\text{m}$

---

2. Un faisceau de lumière blanche, cylindrique, parallèle à l'axe optique de la lentille, recouvre toute la face d'entrée de cette dernière. L'intersection par un plan perpendiculaire à l'axe optique du faisceau émergent est, au voisinage du foyer image $f'_{1,b}$, un cercle irisé. Évaluer la valeur ρ du rayon de ce cercle (ρ est l'aberration chromatique principale transversale).

Réponse :
On commence par réaliser un schéma en exagérant les écarts entre les différents foyers images :



Ainsi, une tache colorée (irisée) apparaît au niveau du foyer image F'_{1b}. Sur le schéma, la tâche bleue (associée à λ_c dans la suite de l'exercice) semble plus large que la tâche

rouge (associée à λ_a), il convient tout de même de calculer leurs rayons respectifs ρ_c et ρ_a et d'en retenir le plus grand pour l'aberration chromatique.
Pour cela, on peut appliquer le théorème de Thalès deux fois :

$$\frac{F'_{1c}F'_{1b}}{OF'_{1c}} = \frac{2\rho_c}{D} \Rightarrow \rho_c = \frac{D}{2}\frac{f'_{1,b} - f'_{1,c}}{f'_{1,c}} \approx 4{,}32 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

et

$$\frac{F'_{1b}F'_{1a}}{OF'_{1a}} = \frac{2\rho_a}{D} \Rightarrow \rho_a = \frac{D}{2}\frac{f'_{1,a} - f'_{1,b}}{f'_{1,a}} \approx 2{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

On observe ainsi que $\rho = \max(\rho_c, \rho_a) = \rho_c = 4{,}32 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$

Afin de minimiser ce phénomène, on souhaite réaliser une lentille à l'aide d'un doublet constitué de deux lentilles minces L_1 (en Crown B. 1884) et L_2 (en Flint C. 8132) accolées. Pour cela, on se fixe comme objectif de faire se coïncider les foyers images du doublet pour les deux longueurs d'ondes extrémales λ_a et λ_c.

3. Calculer la distance focale $f'_{2,b}$ de L_2 (toujours à $587,6\ nm$) et la distance focale image f'_b du doublet résultant permettant de respecter les conditions précédentes. En déduire que L_2 est divergente ;

Réponse :
On souhaite que les foyers images F'_c et F'_a soient confondus donc que $V_a = V_b$.
Or, on a d'après le théorème des vergences $V_a = V_{1,a} + V_{2,a}$ et $V_c = V_{1,c} + V_{2,c}$ et on en déduit après quelques calculs :

$$(n_a - n_c)\left(\frac{1}{R_{1,g}} + \frac{1}{R_{1,d}}\right) = \frac{n'_c - n'_a}{n'_b - 1} \times \underbrace{(n'_b - 1)\left(\frac{1}{R_{g,2}} + \frac{1}{R_{d,2}}\right)}_{V_2}$$

soit au final :

$$V_2 = (n_a - n_c)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{n'_b - 1}{n'_c - n'_a} \approx -0,99\ m^{-1}$$

La vergence de la deuxième lentille est négative donc on en déduit que cette dernière est divergente. En effet, si les deux lentilles étaient convergentes, les aberrations chromatiques (déviation différente suivant la longueur d'onde) s'amplifieraient.

---

4. Les faces des lentilles en contact on le même rayon de courbure (en valeur absolue), soit $|R_{1,d}| = |R_{2,g}| = 2{,}02\,\mathrm{m}$. Calculer le rayon de courbure de l'autre face de L_2 : $R_{2,d}$. Attention, le rayon de courbure sera compté négativement pour une face concave.

Réponse :
La face de gauche de la lentille 2 doit être concave pour pouvoir être en contact de la face de droite de la lentille 1 donc $R_{2,g} = -R_{1,d} = -2{,}02\,\mathrm{m}$. De plus, on a

$$V_{2,b} = (n'_b - 1)\left(\frac{1}{R_{2,g}} + \frac{1}{R_{2,d}}\right) \Rightarrow R_{2,d} = \frac{1}{\frac{V_{2,b}}{n'_b - 1} - \frac{1}{R_{2,g}}} \approx -1{,}02\,\mathrm{m}$$

Astuces :

E2 Q1 : Pensez à réaliser un schéma puis à utiliser une relation de conjugaison.

E3 Q5 : On doit trouver $x = \frac{f'_2(f'_1+f'_2)}{f'_1}$

E5 Q3 : Cette fois ci, le système loupe + écran doit faire l'image de l'image de la pièce par rapport au dioptre air/eau, qui n'est pas à la même position que la pièce elle même. $h = H - \frac{H}{n} \approx 5\,\mathrm{cm}$

E6 Q2 : il convient de réaliser un schéma et de tracer les rayons extrémaux associés aux trois couleurs. Au niveau de $f'_{1,b}$, les radiations extrémales ne vont pas converger et former des tâches circulaires. ρ sera donc le rayon de la plus grande tache.

E6 Q3 : On trouve $f'_{2,b} \approx -1\ m$ puis $f'_b \approx 1\ m$.