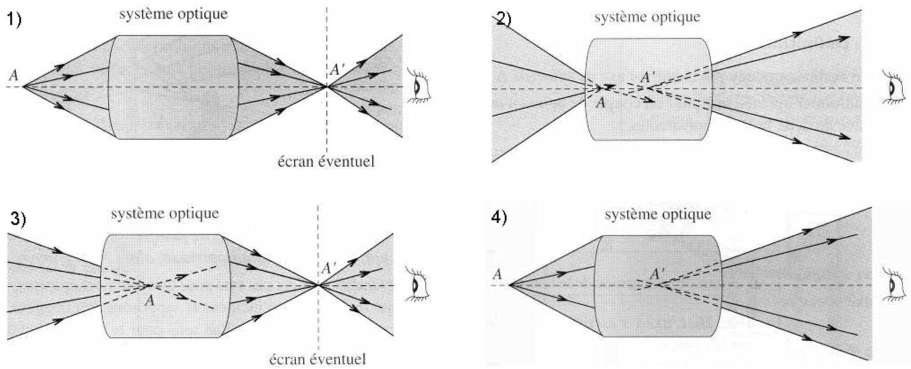
TD 03 | O2- **Formation d’une image**

	I	II	III	IV
Démontrer un résultat			✓	✓
Gerer des calculs			✓	
Faire preuve de sens physique				✓
Analyser un schéma	✓			
Appliquer une relation de conjugaison			✓	
Réaliser un schéma		✓	✓	✓

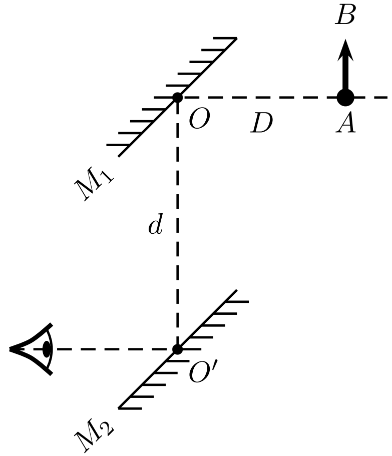
I Objets et images (⋆)

1. Préciser la nature (réelle ou virtuelle) des objets et des images notés A et A'.



Réponse :
1) RR ; 2) VV ; 3) VR ; 4) RV

II Périscope (⋆⋆)



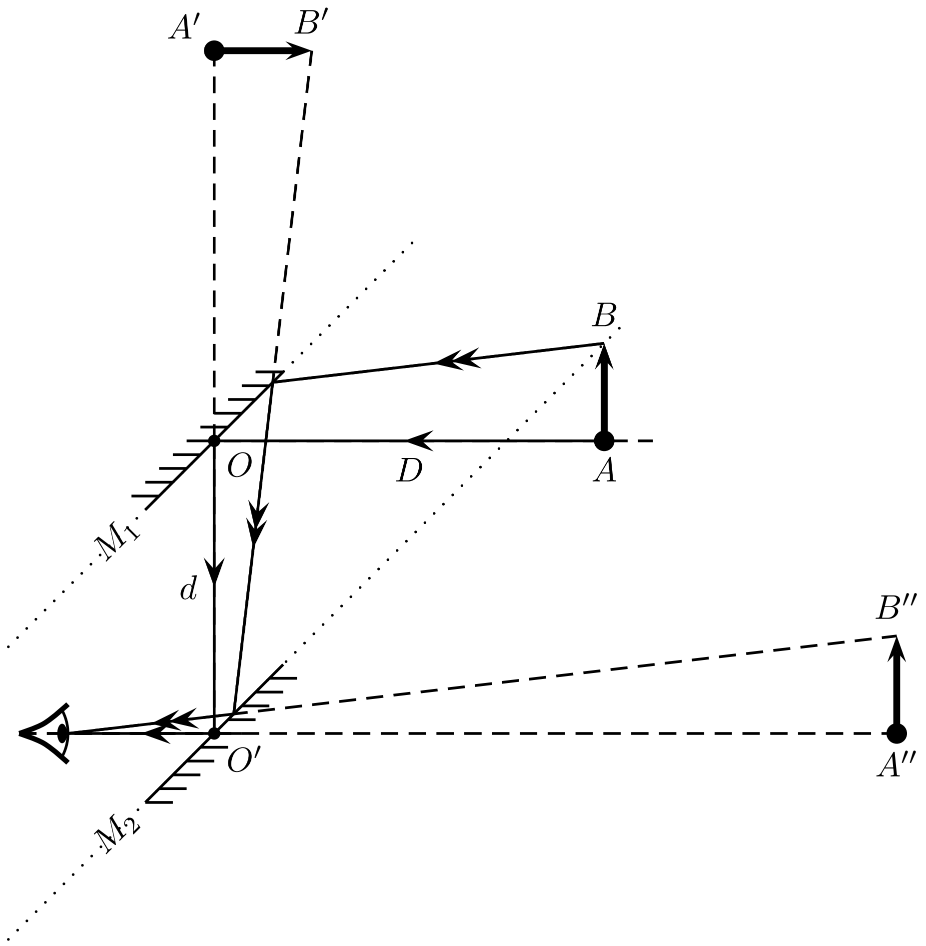
Un périscope simple est un système optique formé de deux miroirs plans qui permet par exemple d’observer un défilé par dessus une foule. Les périscopes de sous-marins sont des systèmes optiques plus compliqués.
On suppose que les plans des miroirs font un angle de 45° avec la verticale.

L’objet AB observé est lui aussi vertical et à la distance D du centre O du miroir supérieur.

La distance OO' entre les deux centres des miroirs est notée d.

1. Par construction graphique, déterminez la position de $A''B''$, l’image de AB par le système optique. Préciser la nature de $A''B''$.

   Réponse :



On place $A'B'$ l'image de AB par le premier miroir (c'est son symétrique par rapport au plan du miroir M_1) puis $A''B''$ celle de $A'B'$ par rapport au second miroir ($A''B''$ est le symétrique de $A'B'$ par rapport au plan du miroir M_2).
On a ainsi montré que $A''B''$ est verticale droite et que $O'A'' = d + D$

---

2. Quelle est la valeur du grandissement ?

Réponse :

On observe graphiquement que le grandissement est $\boxed{\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = +1}$.

Ce résultat était attendu. En effet, on a bien $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1 \times 1 = 1$.

---

3. Le système optique est-il stigmatique ?

Réponse :
Les deux miroirs plans étant stigmatiques, le système est lui même rigoureusement stigmatique. En effet, pour A ponctuel, A' est ponctuelle (miroir 1) et puis A'' est aussi ponctuelle (miroir 2) d'où le résultat.

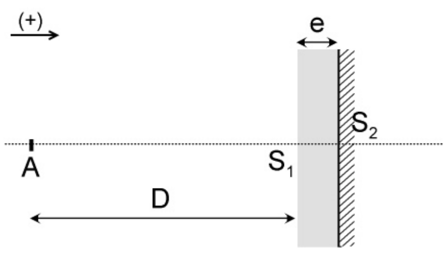
---

4. Tracez deux rayons, l'un issu de A puis l'autre de B qui traversent le système optique et parviennent à l'œil. (⋆⋆)

Réponse :
On trace deux rayons issus de B et qui traversent le système optique.
Pour le premier, on peut prendre un rayon issu de A et passant par O et O'.
Pour le second, issu de B, on utilise le fait qu'après réflexion sur M_1, il semble provenir de B', puis de B'' après réflexion sur M_2. Pour faciliter la construction, on a intérêt à partir de l'œil et remonter le sens de la lumière (utilisation du principe de retour inverse de la lumière).
On remarque sur la figure que les rayons parvenant finalement à l'œil "semblent provenir" de $A''B''$, c'est donc une image virtuelle.
Remarque : pour l'œil qui l'observe, il s'agit d'un objet virtuel dont il fait une image réelle sur la rétine.

III Miroir réel (⋆⋆⋆)

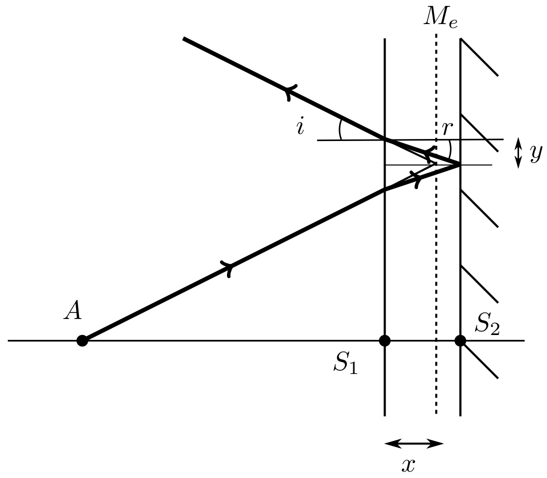
Un miroir réel est constitué d'une fine couche métallique, appelée tain, considérée comme un miroir plan parfait, recouverte (pour la protéger) d'une lame de verre d'épaisseur e et d'indice n. Soit un point objet A, soient S_1 et S_2 les points d'intersection de la normale au miroir passant par A avec les deux faces de la lame de verre. On note D la distance entre A et S_1.



On supposera dans cet exercice que les conditions de Gauss sont réalisées et pourra utiliser la formule de conjugaison du dioptre plan vue en cours dans cette approximation.

1. **Miroir équivalent - Méthode 1**
   (a) On considère un rayon lumineux issu de A et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence i. Tracer la trajectoire complète de ce rayon.

   Réponse :



   (b) Montrer par une construction géométrique soignée que ce miroir se comporte comme un miroir plan parfait équivalent (M_e) sur lequel il n'y aurait qu'une simple réflexion. Représenter ce miroir sur la figure.

   Réponse :
   Tout se passe comme si le rayon se réfléchit au niveau du miroir fictif représenté par des tirets sur la figure précédente.

   (c) Sachant que l'on est toujours dans les conditions de Gauss, déterminer la distance x entre le dioptre air/verre et le miroir équivalent.

   Réponse :
   En considérant les triangles formés par les rayons et leurs prolongation, on a

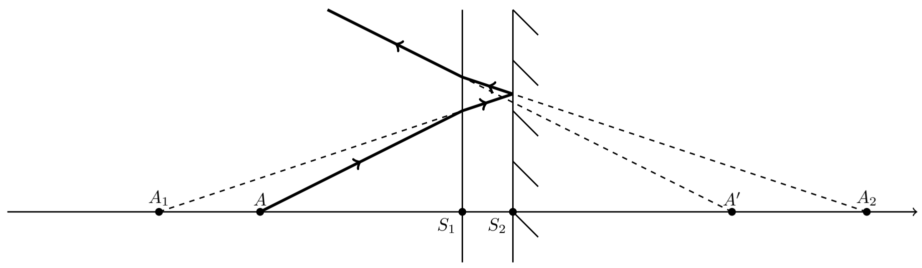
$$\tan i = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \tan r = \frac{y}{e} \quad \text{donc} \quad \boxed{e \tan r = x \tan i}$$

   D'après la relation de Descartes, $\sin i = n \sin r$.
   En se plaçant dans les conditions de Gauss, on suppose les angles i et r faibles, donc

$$i \approx nr \quad \text{et} \quad er \approx xi \quad \text{donc} \quad \boxed{x = \frac{e}{n}}$$

2. **Miroir équivalent - Méthode 2**
   (a) On note A_1 l'image de A par le dioptre air/verre, A_2 l'image de A_1 par le miroir plan, et A' l'image de A_2 par le dioptre verre/air. Placez ces points sur la droite (AS_2) en vous aidant du tracé réalisé à la question 1.

   Réponse :



   (b) Déterminez par le calcul la position de A_1 en utilisant la relation de conjugaison du dioptre plan. On exprimera en particulier $\overline{S_1A_1}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.

   Réponse :
   La relation de conjugaison du dioptre plan donne, puisque l'objet est dans l'air d'indice 1 et l'image dans le verre d'indice n

$$\frac{1}{\overline{S_1A}} = \frac{n}{\overline{S_1A_1}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{S_1A_1} = n\,\overline{S_1A}}$$

   (c) En déduire la position de A_2. On exprimera en particulier $\overline{S_2A_2}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.

Réponse :
Le miroir envoie l'objet A_1 sur son symétrique, de sorte que

$$\overline{S_2A_2} = -\overline{S_2A_1} = -\overline{S_2S_1} - \overline{S_1A_1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{S_2A_2} = +e - n\,\overline{S_1A}}$$

car $\overline{S_2S_1} = -e$.

(d) En déduire finalement la position de A'. On exprimera en particulier $\overline{S_1A'}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.

Réponse :
Après réflexion sur le miroir, A_2 va servir d'objet au dioptre (plongé dans le verre) et A' sera l'image finale, vue de l'air. On peut donc écrire

$$\frac{n}{\overline{S_1A_2}} = \frac{1}{\overline{S_1A'}} \quad \text{d'où} \quad \overline{S_1A'} = \frac{\overline{S_1A_2}}{n} = \frac{\overline{S_1S_2} + \overline{S_2A_2}}{n}$$

$$\overline{S_1A'} = \frac{e + (e - n\,\overline{S_1A})}{n} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{S_1A'} = \frac{2e}{n} - \overline{S_1A}}$$

On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison.

(e) Montrer que ce miroir réel est équivalent à un miroir plan parfait (M_e) placé de telle sorte que $\overline{S_1S_e} = \frac{e}{n}$.

Réponse :
Posons $\overline{S_1S_e} = \frac{e}{n}$ et introduisons S_e dans la relation précédente. On a

$$\overline{S_1A'} + \overline{S_1A} = \frac{2e}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{S_1S_e} + \overline{S_eA'} + \overline{S_1S_e} + \overline{S_eA} = \frac{2e}{n}$$

Donc $\boxed{\overline{S_eA'} + \overline{S_eA} = 0}$.
On reconnaît bien la relation de conjugaison d'un miroir plan placé en S_e.

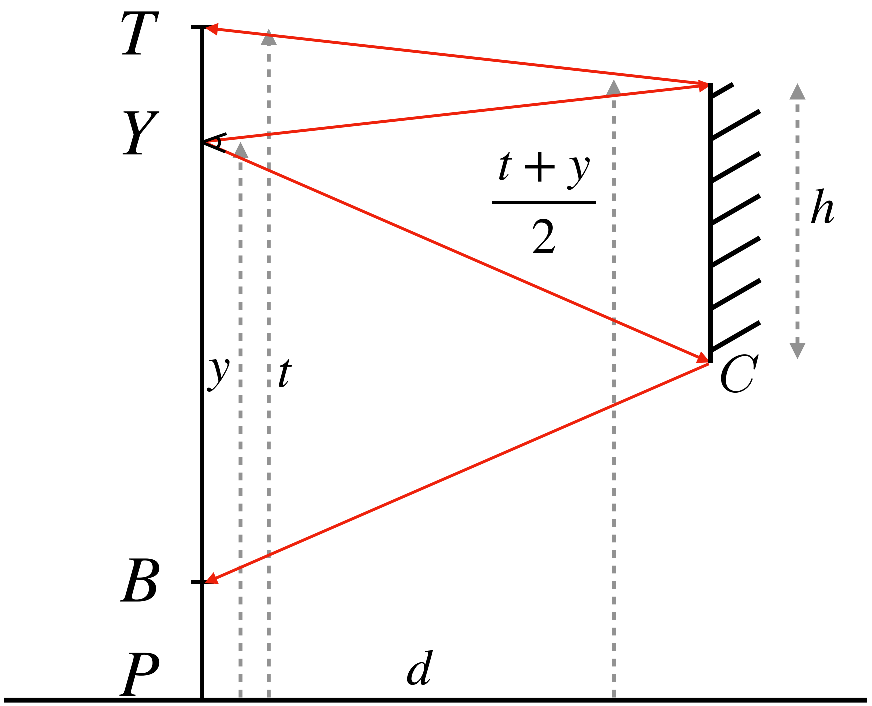
Pour aller plus loin :
À noter qu'il y a en fait stigmatisme rigoureux comme l'a montré la première méthode, même si pour arriver au résultat précédent, on a utilisé deux relations du dioptre plan dont le stigmatisme n'est qu'approché, on ne peut donc plus être sûr du stigmatisme rigoureux de notre nouveau miroir, même si c'est effectivement le cas. $\overline{A_1S_1} = nD$; $\overline{A_2S_2} = -nD - e$; $\overline{A'S_1} = -D - \frac{2e}{n}$; $\overline{AA'} = 2D + \frac{2e}{n}$
Le miroir équivalent se situe à mi chemin entre A et A' donc $AS_e = D + e/n$.

IV Hauteur d'un miroir ($\star\star\star$)

On considère un miroir plan de hauteur h accroché à un mur vertical. Une personne de taille t a ses yeux à une hauteur y du sol et se trouve à une distance d du miroir. On suppose que le bord supérieur du miroir est à la hauteur $\frac{t+y}{2}$ c'est-à-dire à la mi-hauteur entre les yeux et le sommet de la tête de la personne.

1. Faîtes un schéma en indiquant les hauteurs introduites dans l'énoncé. *On pourra placer les points T, Y et P aux hauteurs respectives de la tête, des yeux et des pieds du personnage.*

   Réponse :



---

2. Déterminez graphiquement la partie de son corps que la personne peut voir dans le miroir. *On appellera B le point le plus bas qu'elle peut voir.*

   Réponse :
   On considère les rayons issus des yeux et qui vont se réfléchir le plus haut (et le plus bas). Ces rayons vont donc atteindre les extrémités du miroir comme indiqué sur le schéma ci-contre. La personne pourra donc se voir entre les points T et B.

---

3. Montrez que la partie visible du corps ne dépend pas de la distance d.

   Réponse :
   On remarque graphiquement que peut-importe la distance d, la personne pourra toujours observer le sommet de sa tête. Il reste donc à établir la position du point B en fonction des données du problème :

   On observe que $z_Y - z_C = y - \left(\frac{t+y}{2} - h\right) = \frac{y-t}{2} + h$. De plus, le triangle BCY est isocèle donc $z_Y - z_B = 2(z_Y - z_C)$ et finalement :

   $$z_B = y - 2(z_Y - z_C) = y - (y - t) + 2h = t - 2h$$

   On observe que cette expression ne dépend pas de d d'où le résultat. *Remarque : une construction graphique avec une autre valeur de d aurait pu aussi permettre de répondre à la question.*

---

4. Déterminez la hauteur minimale que doit avoir le miroir pour permettre à la personne de se voir entièrement.

   Réponse :
   La personne pourra se voir entièrement lorsque $z_B = 0$ soit lorsque $h = t/2$

---

5. A votre avis, Pourquoi a-t-on accroché le miroir à la hauteur $\frac{t+y}{2}$?

   Réponse :
   Cela permet de s'assurer que la personne verra toujours le sommet de sa tête sans avoir à utiliser un miroir trop grand, et donc de limiter la taille du miroir

---

Astuces :

E2 Q4 : Tracé simple pour A, pour B, pensez à utiliser B'' !
E3 Q3 : $x = \frac{e}{n}$
E3 Q4 : $\overline{S_1A'} = \frac{2e}{n} - \overline{S_1A}$
E4 Q4 : On doit trouver $h = \frac{t}{2}$