TD 02 | O1 - **Autour des lois de Snell-Descartes**

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Appliquer les lois de Snell-Descartes	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Gerer des calculs		✓		✓	✓	✓	✓
Démontrer un résultat						✓	
Faire preuve de sens physique					✓		✓
Analyser un schéma				✓		✓	✓
Etudier une déviation totale			✓				
Detecter une reflexion totale	✓				✓		✓
Réaliser un schéma	✓	✓	✓				✓

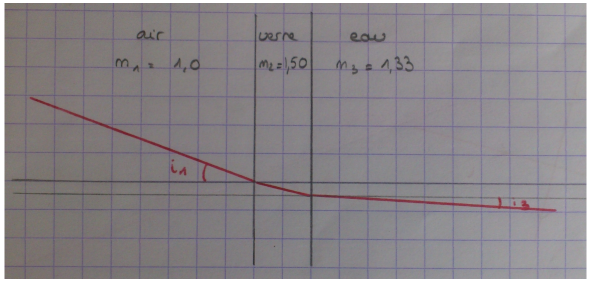
I Aquarium ($\star$)

La paroi d'un aquarium est constituée d'une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur 5,0 mm. L'indice optique de l'air est $n_1 = 1{,}00$, celui du verre est $n_2 = 1{,}50$ et celui de l'eau est $n_3 = 1{,}33$.

Un rayon lumineux arrive sur la paroi (côté air) sous un angle d'incidence i_1 et ressort de la paroi (côté eau) sous un angle d'incidence i_3. On appelle i_2 l'angle d'incidence du rayon lumineux dans la lame de verre.

1. Réaliser le schéma correspondant en faisant bien apparaître les angles i_1, i_2 et i_3 ainsi que les différents dioptres.

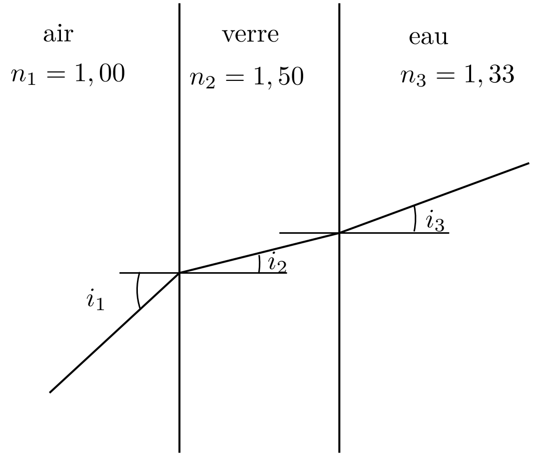
Réponse :



---

2. Sachant que $i_1 = 46$ °, calculer i_2 et i_3.

Réponse :
On considère dans toute la suite des angles orientés positivement.
Comme $n_2 > n_1$, on a $i_2 < i_1$. Comme $n_3 < n_2$, on a $i_3 > i_2$.



D'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i_1)\right)}$$

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\sin(46\ °)\right) = \boxed{28{,}7\ °}.$$

Idem entre 2 et 3 :

$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3}\sin(i_2)\right)}$$

$$i_3 = \arcsin\left(\frac{1,5}{1,33}\sin(28{,}7\ °)\right) = \boxed{32{,}8\ °}.$$

Ces valeurs numériques sont bien en accord avec les inégalités proposées.

---

3. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons pénétrant dans l'aquarium ?

Réponse :
Comme $n_1 < n_2$, il n'existe pas de phénomène de réflexion totale entre les milieux 1 et 2. En effet, l'indice augmente donc l'angle diminue et ne risque pas de "dépasser" $\pi/2$.

---

4. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons sortant de l'aquarium ?

Réponse :
Comme $n_2 > n_3$, il existe un angle de réflexion totale, noté $i_{2,\text{lim}}$, entre les milieux 2 et 3.

$$i_{2,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_2}\right) = 62{,}5\ ^\circ.$$

Cependant, il convient de vérifier si l'angle i_2 peut dépasser ou non l'angle limite ainsi obtenu. L'étude du premier dioptre indique, via la 3ième loi de Snell-Descartes $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. L'angle maximal pour le rayon 2 est obtenu lorsque le rayon incident (1) arrive en incidence rasante, c'est à dire avec un angle de $\pi/2$ d'ou

$$i_{2,\text{max}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\pi/2)\right) \approx 41{,}8\ ^\circ$$

Ainsi, peu importe l'angle du rayon incident, on aura toujours $i_2 < i_{2,\text{lim}}$ et **il n'y aura alors jamais de réfléxion totale**.

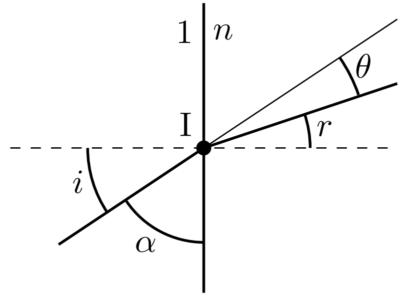
Pour aller plus loin :
Cette question est donc plus subtile qu'il n'y parrait ! Il faut donc proceder avec méthode. Dans un premier temps, on regarde à quel condition il peut y avoir reflexion totale. On vérifie ensuite si cette considion est réalisable. On remarque ici que c'est impossible. En effet, $n_3 > n_1$ donc en combinant les 3ièmes lois de SD sur les deux dioptres, on peut montrer que $i_3 < i_1 < \pi/2$ et donc qu'il n'y aura jamais de reflexion totale.

II Mesure de l'indice optique d'un liquide ($\star$)

Un rayon lumineux dans l'air tombe sur la surface libre d'un liquide ; il fait un angle $\alpha = 56\ ^\circ$ avec le plan horizontal. La déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté est $\theta = 13,5°$.

1. Quel est l'indice n du liquide ?

Réponse :
Il convient dans un premier temps de réaliser un schéma pertinent de la situation. L'indice augmentant lors du passage du dioptre, il est primordial de dessiner un rayon réfracté plus proche de la normale au dioptre.



L'angle d'incidence est alors :

$$i = \pi/2 - \alpha = 34\ ^\circ$$

L'angle de réfraction est alors :

$$r = 34 - 13,5 = 20,5\ ^\circ$$

D'après la loi de Snell-Descartes de la réfraction :

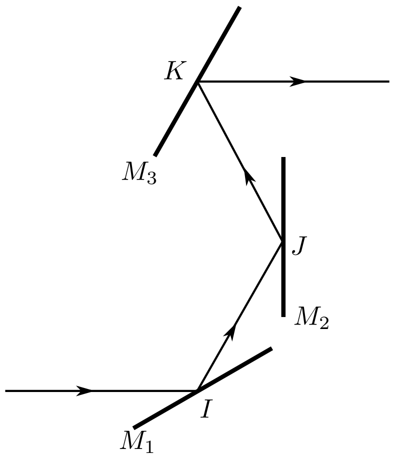
$$\sin(i) = n\sin(r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\sin i}{\sin r} = 1,59}$$

Pour aller plus loin :
Il faut être très précis lors de la réalisation de votre schéma. Si votre rayon réfracté n'est pas dévié vers la normale au dioptre, le résultat obtenu ne sera pas le bon (indice optique inférieur à l'unité !)

III Déviation par trois miroirs ($\star$)

Un rayon lumineux se propageant dans l'air est réfléchi par trois miroirs M_1, M_2 et M_3. Ces miroirs sont perpendiculaires à un plan choisi comme plan de la figure.
On note I, J, K les points d'incidence du rayon lumineux sur les miroirs M_1, M_2 et M_3. On sait que les angles d'incidence sur les miroirs M_1 et M_2 valent tout deux 60 °.

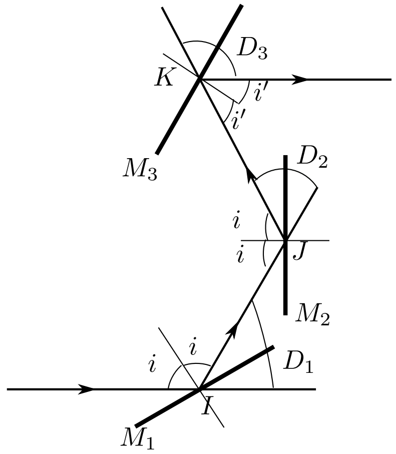
On souhaite déterminer l'orientation du miroir M_3 pour que, après les trois réflexions, le rayon réfléchi définitif ait la même direction et le même sens que le rayon incident.



On rappelle que la déviation d'un rayon est l'angle partant durayon incident, s'il avait continué sans rencontrer d'obstacle et le rayon transmi ou réfléchi.

1. Refaire le schéma et placer les différents angles d'incidence, ainsi que les déviations successives D_1, D_2 et D_3 subies par le rayon lumineux sur chaque miroir.
   On notera i l'angle d'incidence au niveau des miroirs M_1 et M_2 et i' l'angle d'incidence au niveau du miroir M_3. Les angles i et i' sont des angles géométriques, donc positifs. Les déviations D_1, D_2 et D_3 sont définies dans l'intervalle $]0, \pi[$.

   Réponse :



2. Exprimer la déviation totale D en fonction de i et i'.

   Réponse :
   On exprime chaque déviation :

$$D_1 = D_2 = \pi - 2i \quad \text{et} \quad D_3 = -\pi + 2i'$$

   En effet, le dernier miroir est à l'envers et il faut faire attention aux signes !
   On en déduit la déviation D en sommant toutes les déviations d'où

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 + D_3 \\ &= \pi - 4i + 2i' \end{aligned}$$

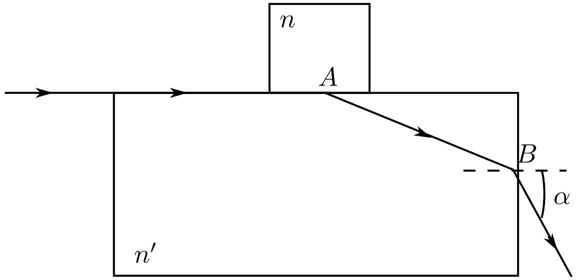
3. En déduire l'expression de i' pour que le rayon émergent ait même direction et même sens que le rayon incident. Donner sa valeur.

   Réponse :

   On veut que $D = 0$, on en déduit $\boxed{i' = 2i - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}}$

IV Réfractomètre (⋆)

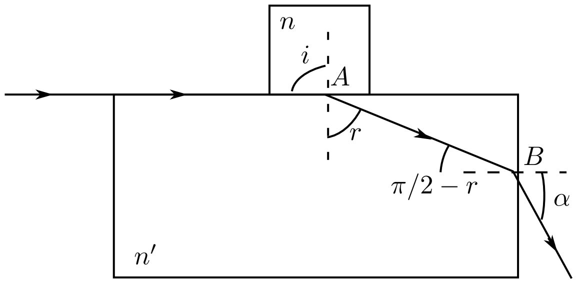
Pour mesurer l'indice n d'un milieu solide transparent, on taille dans ce matériau un cube que l'on place sur un autre cube en verre d'indice n' connu. On envoie un pinceau de lumière monochromatique sous une incidence rasante sur la surface de séparation des deux cubes en A, et on mesure l'angle d'émergence α dans l'air en B. On prendra $n_0 = 1$ comme indice optique de l'air.



Données : $n' = 1,7321$; $\alpha = 60\ °$

1. Écrire les lois de Descartes pour la réfraction en A et B.

Réponse :
En A, l'angle d'incidence i vaut 90 °, donc $n = n' \sin r$.
En B, l'angle d'incidence vaut $\pi/2 - r$: $n' \cos r = \sin\alpha$



2. Exprimer n^2 en fonction de n' et α.

Réponse :
On élève au carré les deux expressions précédentes et on les additionne :

$$n'^2(\sin^2 r + \cos^2 r) = n^2 + \sin^2\alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{n^2 = n'^2 - \sin^2\alpha}$$

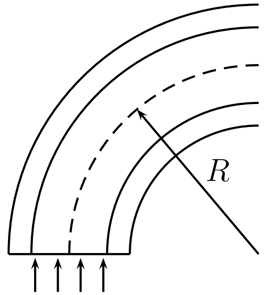
3. Calculer n.

Réponse :
$n = 1,5000$

V Fibre courbée (⋆⋆)

On considère une fibre à saut d'indice, constituée d'un coeur en verre d'indice $n_1 = 1,66$ et de diamètre $d = 0{,}05\,\text{mm}$ entourée d'une gaine en verre d'indice $n_2 = 1,52$. On courbe la fibre comme sur la figure ci-contre : elle forme une portion d'anneau de rayon de courbure R. (Ici, le rayon de courbure correspond au rayon du cercle formé par les pointillés).

La fibre est éclairée par un faisceau parallèle avec un angle d'incidence nul.

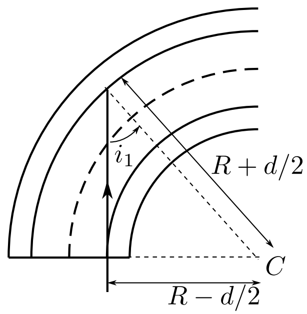


1. Une fois dans la fibre, quel est le rayon lumineux qui arrive sur l'interface coeur-gaine avec le plus petit angle d'incidence ?

Réponse :
Celui le plus à droite sur la figure. En effet, c'est celui qui est le mieux aligné avec le rayon du cercle.

2. Quel doit être le rayon de courbure R minimal pour que l'ensemble du faisceau lumineux soit guidé dans la fibre optique (c'est-à-dire pour qu'il y ait réflexion totale pour chacun des rayons) ? Conclusion ?

Réponse :



Rappel : la normale à un cercle en A est le rayon du cercle en A. Le rayon qui a le plus de risque de ne pas être totalement réfléchi est celui de la question 1. En effet, si ce dernier est totalement réfléchi, les autres, d'angles d'incidence plus élevés, seront aussi totalement réfléchis.

On veut avoir réflexion totale pour ce rayon (on note i_1 son angle d'incidence), soit $n_1 \sin(i_1) \geq n_2$.

Or $\sin(i_1) = \dfrac{R - d/2}{R + d/2}$, on en déduit alors $\boxed{R \geq \dfrac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} \times \dfrac{d}{2}}$

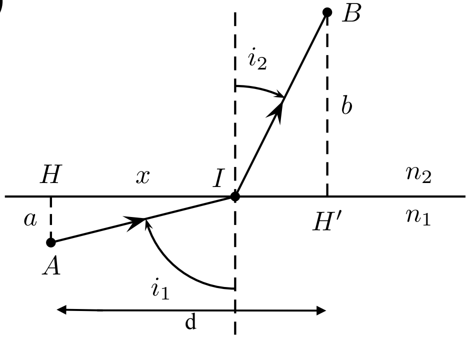
AN : $\boxed{R > 0{,}568\,\text{mm}}$

Ce rayon de courbure est faible, donc le guidage dans la fibre optique par réflexion totale reste valable même en pliant la fibre.

VI Principe de Fermat ($\star\star\star$)

On peut démontrer les lois de Snell-Descartes à partir du principe de Fermat. Ici nous allons retrouver la 3ieme loi portant sur la réfraction.

La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement minimale



1. Exprimez le temps de parcours d'un rayon lumineux sur le trajet $A \to I \to B$ en fonction de c, n_1, n_2, a, b, d et x. Ce dernier paramètre étant le seul qui ne soit pas fixé dans cette étude.

Réponse :
Le temps de parcourt d'un rayon lumineux passant par I est :

$$\tau = \frac{1}{c}\left(n_1||AI|| + n_2||IB||\right)$$

que l'on peut ré-exprimer en fonction de x :

$$\tau(x) = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2+a^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}\right)$$

ou d représente la distance HH'.

---

2. Retrouvez finalement la loi de la réfraction en utilisant le principe de Fermat

Réponse :
τ est minimale lorsque la dérivée par rapport à x est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow n_1\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = n_2\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

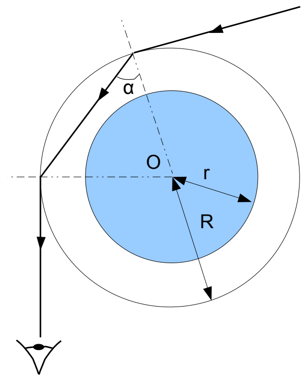
or, on a aussi $\sin(i_1) = x/\sqrt{a^2+x^2}$ et $\sin(i_2) = (d-x)/\sqrt{b^2+(d-x)^2}$. D'où le résultat :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

VII Optique dans un thermomètre ($\star\star$)

On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur R et de rayon intérieur r d'indice de réfraction n

La figure ci-dessous représente la trajectoire d'un rayon lumineux arrivant sur le thermomètre en incidence rasante et émergent en direction d'un observateur.



1. Déterminez l'expression de l'angle α de la figure en fonction de l'indice optique du verre n.

Réponse :
On applique la 3ème loi de Snell-Descartes au point d'incidence du rayon :

$$1 \sin\frac{\pi}{2} = n \sin\alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin(1/n)$$

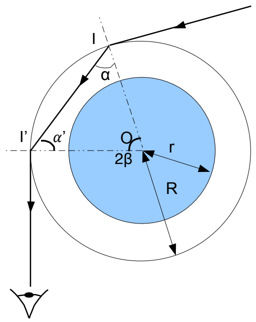
---

2. Montrez que si le rayon arrive en incidence rasante, il émerge de même.

Réponse :

Le triangle de sommet O définit par les points d'incidences I et I' est isocèle car inscrit dans un cercle. On en déduit donc que $|\alpha| = |\alpha'|$

On déduit que le rayon sort en incidence rasante (principe de retour inverse de la lumière)



---

3. A partir d'un certain rayon intérieur r, l'observateur a l'impression que le mercure remplit entièrement le cylindre (l'épaisseur du verre n'est plus visible). Faîtes le schéma correspondant et expliquez.

Réponse :
Lorsque le rayon intérieur r augmente, le rayon reliant I à I' va être intercepté et ne sera donc pas transmis. Dans ce cas, aucun rayons issus de l'extérieur ne sera transmis par le verre, qui semblera donc invisible. L'observateur observera donc uniquement le mercure (après une double réfraction mercure/verre puis verre/air)

---

4. Déterminez la valeur limite de r/R pour atteindre cette situation. Faîtes ensuite l'application numérique avec $n = 1,5$.

Réponse :
Il y a intersection lorsque la hauteur du triangle I'OI devient égale à r. Cette hauteur h vaut par ailleurs :

$$\cos(\beta) = \frac{h}{R}$$

avec $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. En combinant ces equations, on obtient finalement :

$$\frac{r}{R} = \sin(\alpha) = \frac{1}{n}$$

A.N. : $r/R = 2/3$

Astuces :

E2 Q1 : $n \approx 1,59$

E3 Q3 : $i' = 2i - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

E4 Q3 : $n = \sqrt{n'^2 - \sin^2\alpha} = 1,5000$

E5 Q2 : $R > 0{,}568\,\text{mm}$

E7 Q4 : On doit trouver à la fin de l'exercice : $r/R = 2/3$ pour $n = 1,5$