TD 1- **Analyse dimensionnelle et homogénéité**

I Quelques dimensions et unités ($\star$)

1. Reliez les grandeurs suivantes aux sept grandeurs du système international puis associez leurs unités aux sept unités de base du système international :
   — la pression, notée P (en pascal Pa)
   — énergie, notée E (en joules J)
   — la puissance, notée $\mathcal{P}$ (en watt W)
2. En utilisant une expression électrique de la puissance, déterminez grâce au résultat de la question précédente la dimension d'une résistance et d'une tension.

II Homogénéité ($\star$)

Vérifier si les expressions suivantes sont homogènes ou non. Proposer une correction de la formule lorsqu'elle est fausse :

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ où T est la période des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ et g l'accélération de la pesanteur.
2. $\lambda = \dfrac{c}{\nu^2}$ où λ est la longueur d'onde (en m) pour une fréquence ν et une vitesse c.
3. $\tau = RC$ où τ est la constante de temps d'un circuit composé d'une résistance R et d'une capacité C (on donne : $q = C \times U$ et $\Delta q = I \times \Delta t$ avec I l'intensité du courant et Δt une durée).
4. $$E = \frac{h^2k^2}{8\pi^2 m},$$
   Où E est une énergie, la constante de Planck h est une énergie fois une unité de temps, k un nombre d'onde dont la dimension est l'inverse d'une longueur et m une masse.
5. Les grandeurs U et E_i sont des tensions électriques, la grandeur I est un courant et que les grandeurs R_i sont des résistances :
   $$\text{a) } U = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}, \quad \text{b) } U = \frac{R_1E_1 + R_1(R_1+R_2)E_2}{R_1+R_2}, \quad \text{c) } U = \frac{R_1R_2I}{R_1+R_2}, \quad \text{d) } U = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}.$$
   Indice : On pourra utiliser la loi d'Ohm $U = RI$.
6. Un solide de masse m assimilable à un point matériel glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné. Il est abandonné sans vitesse initiale à la hauteur h. On rappelle que g est l'accélération de la pesanteur (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) :
   $$\text{a)} v = \sqrt{\frac{2g}{h}}, \qquad \text{b)} v = \sqrt{2gh}, \qquad \text{c)} v = \sqrt{2mgh}.$$
7. On considère un gaz parfait dont l'équation d'état (reliant sa pression p, son volume V, sa température T et sa quantité de matière n) est $pV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits. Avec k une constante sans dimension, M la masse molaire du gaz et ρ sa masse volumique. La grandeur c est la vitesse de propagation du son dans ce gaz :
   $$\text{a)} c = \frac{kRT}{M}, \qquad \text{b)} c = k\sqrt{\frac{RT}{M}}, \qquad \text{c)} c = k\sqrt{\frac{RT}{\rho}}.$$
   Indice. On rappelle qu'une pression est homogène à une force divisée par une surface.

III La balance de Kibble ($\star\star$)

La balance de Kibble est un dispositif permettant de mesurer une masse avec une grande précision. Elle est utilisée notamment pour définir le kilogramme en fixant la constante de Planck à $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. Elle comprend notamment une bobine − couplée à l'échantillon dont on veut mesurer la masse − plongée dans un champ magnétique B. Deux mesures sont réalisées :

— **weighting mode** : la bobine est parcourue par un courant d'intensité I tel que la force de la Laplace compense le poids. On mesure en même temps l'intensité du champ de pesanteur g.
— **moving mode** : la masse et la bobine chute dans le vide à vitesse constante v mesurée par interférométrie. Il résulte de la chute de la bobine une tension U à ses bornes qu'on mesure également.

On note m la masse de l'ensemble bobine + échantillon.

1. Donner la dimension de la constante de Planck h.
2. L'intensité de la force de Laplace vaut IBl avec l un paramètre ayant la dimension d'une longueur. Déduire des différents modes de fonctionnement une relation impliquant m.
3. On montre d'autre part que $U = vBl$. En déduire que :
   $$mgv = UI \tag{1}$$
   On dit que cette équation porte sur des "puissances virtuelles". Expliquer le sens de cette expression.

4. Les mesures de U et I sont opérées via des dispositifs quantifiés permettant de réécrire la relation (1) en faisant intervenir la constante de Planck h :

$$m = r\frac{f_1 f_2}{vg}h \tag{2}$$

Où f_1 et f_2 sont deux fréquences et r est un paramètre sans dimension caractérisant la balance de Kibble utilisée. Vérifier que le terme de droite de l'équation (2) est bien homogène à une masse.

5. Expliquer pourquoi fixer la valeur de la constante de Planck définit le kilogramme.

IV Vitesse d'un satellite (⋆⋆)

La vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre est :

$$V(z) = \frac{R^\alpha g^\beta}{\sqrt{R+z}}$$

avec $R = 6380\,\mathrm{km}$; $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et z, l'altitude au-dessus du niveau de la mer.

1. Trouvez les coefficients α et β par analyse dimensionnelle.
2. Déterminez la vitesse V pour $z = 200\,\mathrm{km}$

V Constante gravitationnelle (⋆⋆)

L'interaction gravitationnelle se manifeste par l'apparition d'une force F entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance d. L'expression scalaire de cette force est :

$$F = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation universelle.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?
2. Vérifier l'homogénéité de la loi suivante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathcal{S}},$$

où T est la période de rotation d'une planète autour du soleil, a le demi-grand axe de l'ellipse (à peu près le rayon dans le cas général) et M_S est la masse du soleil.

3. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, retrouver la relation liant l'accélération de pesanteur g_0 à la masse de la terre M_t, la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ ainsi qu'au rayon de la terre R_t.
4. Cette expression est-elle cohérente avec l'expression générale de la force de gravité exercée entre deux masses ?

VI Oscillations d'une masse (⋆ ⋆ ⋆)

Un système ponctuel de masse m est attachée à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. À l'instant initial, on écarte légèrement la masse de sa position d'équilibre et on observe quelques oscillations.

1. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, donnez une expression valide pour la fréquence des oscillations de la masse.
2. On mesure 20 oscillations en 31 secondes pour une masse de $300\,\mathrm{g}$. En déduire la valeur de la constante multiplicative

Astuces :

E1 Q2 : On trouve $[\mathcal{P}] = \mathrm{M.L^2T^{-3}}$

E4 Q1 : $V(z) = \frac{R\sqrt{g}}{\sqrt{R+z}}$

E6 Q2 : on trouve $f \approx 0.158\sqrt{k/m}$.