TD 1- **Analyse dimensionnelle et homogénéité**

I Quelques dimensions et unités ($\star$)

1. Reliez les grandeurs suivantes aux sept grandeurs du système international puis associez leurs unités aux sept unités de base du système international :
   — la pression, notée P (en pascal Pa)
   — énergie, notée E (en joules J)
   — la puissance, notée $\mathcal{P}$ (en watt W)

   Réponse :
   On peut relier la pression à une force divisée par une surface (c.f. cours de thermo en fin d'année) d'où $P = F/S$. De plus, la dimension d'une force peut être obtenue à l'aide du principe fondamental de la dynamique $m \times a = F$ avec la dimension de l'accélération donnée par $[a] = L.T^{-2}$. On en déduit au final $[P] = M.L^{-1}.T^{-2}$. De plus, l'unité de base est le kg/m/s^2.

   La dimension de l'énergie peut être obtenue à l'aide de la formule donnant l'énergie cinétique d'un solide soit $[E] = [E_c] = [(1/2)mv^2] = M.L^2.T^{-2}$. L'unité correspondante est le kg m^2/s^{-2}. On remarque qu'il y a un volume d'écart entre une pression et une énergie.

   Pour conclure, la puissance est le rapport entre une énergie et un temps d'où $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3}$. L'unité correspondante est le kg m^2/s^{-3}

---

2. En utilisant une expression électrique de la puissance, déterminez grâce au résultat de la question précédente la dimension d'une résistance et d'une tension.

   Réponse :
   On sait que $\mathcal{P} = Ri^2$ (puissance dissipée par un résistor de résistance R et traversé par un courant i) d'où l'on déduit

$$[R] = \frac{[\mathcal{P}]}{[i]^2} = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$$

   De même, on a aussi $u = Ri$ (loi d'Ohm) d'où $[u] = [R]/[i] = M.L^2.T^{-3}.I^{-3}$. Ces deux dimensions, assez subtiles, ne doivent surtout pas être apprises par cœur. Il faut plutôt savoir les retrouver rapidement.

II Homogénéité ($\star$)

Vérifier si les expressions suivantes sont homogènes ou non. Proposer une correction de la formule lorsqu'elle est fausse :

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ où T est la période des petites oscillations d'un pendule de longueur ℓ et g l'accélération de la pesanteur.

   Réponse :
   On a : • $[T] = T$ • $[g] = L.T^{-2}$ • $[\ell] = L$
   Donc $2\pi\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 1.\left(\frac{L.T^{-2}}{L}\right)^{1/2} = T^{-1}$. On obtient l'inverse d'un temps. La bonne formule est $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, qui est bien homogène à un temps.

---

2. $\lambda = \frac{c}{\nu^2}$ où λ est la longueur d'onde (en m) pour une fréquence ν et une vitesse c.

   Réponse :
   On a : • $[\lambda] = L$ • $[c] = L.T^{-1}$ • $[\nu] = T^{-1}$
   Donc $\sqrt{\frac{c}{\nu^2}} = \frac{L.T^{-1}}{T^{-2}} = L.T$ qui n'est pas homogène à une longueur. La bonne formule est $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

---

3. $\tau = RC$ où τ est la constante de temps d'un circuit composé d'une résistance R et d'une capacité C (on donne : $q = C \times U$ et $\Delta q = I \times \Delta t$ avec I l'intensité du courant et Δt une durée).

   Réponse :
   On a :
   - $[\tau] = T$
   - Pour R, on utilise $U = RI \Leftrightarrow R = \frac{U}{I} \Rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]}$
   - Pour C, on utilise les équations fournies dans l'énoncé :
     — $q = CU \Leftrightarrow C = \frac{q}{U} \Rightarrow [C] = \frac{[q]}{[U]}$
     — $\Delta q = I\Delta t \Rightarrow [q] = [I]\,[t]$

On a donc : $[C] = \dfrac{[I]\,[t]}{[U]}$ et finalement $[RC] = [t] = T$. τ et RC sont bien homogènes.

4.
$$E = \frac{h^2 k^2}{8\pi^2 m},$$

Où E est une énergie, la constante de Planck h est une énergie fois une unité de temps, k un nombre d'onde dont la dimension est l'inverse d'une longueur et m une masse.

Réponse :
Avec la formule de l'énergie cinétique $E = mv^2/2$ (ou avec la formule d'Einstein $E = mc^2$), on montre que :
$$\dim(E) = ML^2/T^2$$

$$\dim(E) = \frac{\dim(h)^2 \times \dim(k)^2}{\dim(m)} = \frac{M^2L^4/T^4 \times T^2 \times 1/L^2}{M} = \frac{ML^2}{T^2}$$

Pour aller plus loin :
La notation dim est parfois employée à la place des crochets pour représenter la dimension d'une grandeur physique.

---

5. Les grandeurs U et E_i sont des tensions électriques, la grandeur I est un courant et que les grandeurs R_i sont des résistances :

$$\text{a) } U = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}, \quad \text{b) } U = \frac{R_1E_1 + R_1(R_1+R_2)E_2}{R_1+R_2}, \quad \text{c) } U = \frac{R_1R_2I}{R_1+R_2}, \quad \text{d) } U = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}.$$

Indice : On pourra utiliser la loi d'Ohm $U = RI$.

Réponse :
D'après la loi d'Ohm :
$$U = Ri \qquad \Rightarrow \qquad \dim(U) = \dim(R) \times \dim(i)$$

a) non homogène
$$\dim(U) = \dim(R)^2 = \dim(R) = \dim(R)$$

b) non homogène au numérateur :
$$\dim(R_1E_1) = \dim(R) \times \dim(U) \neq \dim(R)^2 \times \dim(U)$$

c) homogène
$$\frac{\dim(R_1R_2I)}{\dim(R_1+R_2)} = \frac{\dim(R_1R_2I)}{\dim(R_1)} = \dim(R_2I)$$

d) homogène
$$\frac{\dim(E_1/R_1 + E_2/R_2)}{\dim(1/R_1 + 1/R_2)} = \frac{\dim(U/R)}{\dim(1/R)} = \dim(U)$$

---

6. Un solide de masse m assimilable à un point matériel glisse sans frottement sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné. Il est abandonné sans vitesse initiale à la hauteur h. On rappelle que g est l'accélération de la pesanteur (en $\mathrm{m\,s^{-2}}$) :

$$\text{a)} v = \sqrt{\frac{2g}{h}}, \qquad \text{b)} v = \sqrt{2gh}, \qquad \text{c)} v = \sqrt{2mgh}.$$

Réponse :
réponse b)

$$\dim(h) = L \quad \& \quad \dim(g) = \frac{L}{T^2} \quad \& \quad \dim(v) = \frac{L}{T} \quad \Rightarrow \quad v \propto \sqrt{gh}.$$

---

7. On considère un gaz parfait dont l'équation d'état (reliant sa pression p, son volume V, sa température T et sa quantité de matière n) est $pV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits. Avec k une constante sans dimension, M la masse molaire du gaz et ρ sa masse volumique. La grandeur c est la vitesse de propagation du son dans ce gaz :

$$\text{a)} c = \frac{kRT}{M}, \qquad \text{b)} c = k\sqrt{\frac{RT}{M}}, \qquad \text{c)} c = k\sqrt{\frac{RT}{\rho}}.$$

Indice. On rappelle qu'une pression est homogène à une force divisée par une surface.

Réponse :
réponse b)

$$p = \frac{F}{S} \quad \& \quad F = ma \quad \Rightarrow \quad \dim(p) = \frac{\dim(F)}{\dim(S)} = \frac{\dim(ma)}{\dim(S)} = \frac{ML/T^2}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$\dim(RT) = \frac{\dim(pV)}{\dim(n)} = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{n} = \frac{MT^{-2}L^2}{n}$$

or

$$\dim(M) = \frac{M}{n} \quad \& \quad \dim(\rho) = \frac{M}{L^3}$$

III La balance de Kibble (⋆⋆)

La balance de Kibble est un dispositif permettant de mesurer une masse avec une grande précision. Elle est utilisée notamment pour définir le kilogramme en fixant la constante de Planck à $h = 6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s. Elle comprend notamment une bobine – couplée à l'échantillon dont on veut mesurer la masse – plongée dans un champ magnétique B. Deux mesures sont réalisées :

— **weighting mode** : la bobine est parcourue par un courant d'intensité I tel que la force de la Laplace compense le poids. On mesure en même temps l'intensité du champ de pesanteur g.

— **moving mode** : la masse et la bobine chute dans le vide à vitesse constante v mesurée par interférométrie. Il résulte de la chute de la bobine une tension U à ses bornes qu'on mesure également.

On note m la masse de l'ensemble bobine + échantillon.

1. Donner la dimension de la constante de Planck h.

Réponse :
La constante de Planck a pour unité J s. Donc sa dimension est celle d'une énergie multipliée par un temps :

$$[h] = [E]\,T = ML^2T^{-1}$$

---

2. L'intensité de la force de Laplace vaut IBl avec l un paramètre ayant la dimension d'une longueur. Déduire des différents modes de fonctionnement une relation impliquant m.

Réponse :
La force de Laplace compense le poids de la balance, donc à l'équilibre :

$$IBl = mg \tag{1}$$

---

3. On montre d'autre part que $U = vBl$. En déduire que :

$$mgv = UI \tag{2}$$

On dit que cette équation porte sur des "puissances virtuelles". Expliquer le sens de cette expression.

Réponse :
Il suffit de multiplier l'équation (1) par v pour obtenir :

$$mgv = IBlv = IU$$

Cette équation met en jeu deux quantités homogènes à une puissance (électrique par exemple pour le terme UI)

---

4. Les mesures de U et I sont opérées via des dispositifs quantifiés permettant de réécrire la relation (2) en faisant intervenir la constante de Planck h :

$$m = r\frac{f_1 f_2}{vg}h \tag{3}$$

Où f_1 et f_2 sont deux fréquences et r est un paramètre sans dimension caractérisant la balance de Kibble utilisée. Vérifier que le terme de droite de l'équation (3) est bien homogène à une masse.

Réponse :
Le terme de droite de l'équation (3) met en jeu des fréquences ($[f_i] = T^{-1}$), une vitesse ($[v] = LT^{-1}$), une accélération ($[g] = LT^{-2}$) et la constante de Planck ($[h] = ML^2T^{-1}$). Donc la dimension de ce terme est :

$$\left[r\frac{f_1 f_2}{vg}h\right] = \frac{T^{-2}ML^2T^{-1}}{LT^{-1}LT^{-2}} = M$$

Ce qui confirme l'homogénéité de l'équation.

---

5. Expliquer pourquoi fixer la valeur de la constante de Planck définit le kilogramme.

Réponse :
L'équation (3) ne fait intervenir que des grandeurs homogènes à un temps (La seconde étant fixée par la fréquence d'oscillation d'atomes de Césium) et à une distance (le mètre étant fixé par la vitesse de la lumière et par la seconde) ainsi que la constante de Planck h. Celle-ci permet donc de fixer l'unité de la masse dans le système international : le kilogramme.

IV Vitesse d'un satellite (⋆⋆)

La vitesse d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre est :

$$V(z) = \frac{R^\alpha g^\beta}{\sqrt{R+z}}$$

avec $R = 6380\,\mathrm{km}$; $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et z, l'altitude au-dessus du niveau de la mer.

1. Trouvez les coefficients α et β par analyse dimensionnelle.

Réponse :
En passant aux dimensions, on remarque que

$$L.T^{-1} = L^\alpha.(L.T^{-2})^\beta.L^{-1/2}$$

d'où les deux équations suivantes pour les exposants : $1 = \alpha + \beta - 1/2$ et $-1 = -2\beta$. La deuxième équation permet d'obtenir $\boxed{\beta = 1/2}$ puis en injectant dans la première, on trouve $\boxed{\alpha = 1}$ d'où au final :

$$V(z) = \frac{R\sqrt{g}}{\sqrt{R+z}}$$

---

2. Déterminez la vitesse V pour $z = 200\,\mathrm{km}$

Réponse :
On trouve, en faisant attention aux unités $\boxed{V = 7800\,\mathrm{m/s}}$

V Constante gravitationnelle (⋆⋆)

L'interaction gravitationnelle se manifeste par l'apparition d'une force F entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance d. L'expression scalaire de cette force est :

$$F = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation universelle.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?

Réponse :
On obtient après calcul $[\mathcal{G}] = L^3 M^{-1} T^{-2}$

---

2. Vérifier l'homogénéité de la loi suivante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\mathcal{M}_\mathcal{S}},$$

où T est la période de rotation d'une planète autour du soleil, a le demi-grand axe de l'ellipse (à peu près le rayon dans le cas général) et M_S est la masse du soleil.

Réponse :
On a d'une part $[T^2/a^3] = T^2 L^{-3}$ et d'autre part $[4\pi^2/(\mathcal{G}\mathcal{M}_s)] = L^{-3}.M.T^2.M^{-1} = L^{-3}T^2$ et la formule est bien homogène.

---

3. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, retrouver la relation liant l'accélération de pesanteur g_0 à la masse de la terre M_t, la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ ainsi qu'au rayon de la terre R_t.

Réponse :
On suppose que $g_0 = kM_t^\alpha \mathcal{G}^\beta R_t^\gamma$ et on procède par analyse dimensionnelle :

$$L.T^{-2} = M^\alpha L^{3\beta} M^{-\beta} T^{-2\beta} L^\gamma \quad (4)$$
$$\Rightarrow L.T^{-2} = M^{\alpha-\beta}.L^{3\beta+\gamma}.T^{-2\beta} \quad (5)$$

On en déduit $\beta = 1$, $\alpha = \beta = 1$ puis $\gamma = -2$ soit au final :

$$g_0 = k\frac{M_t \mathcal{G}}{R_T^2}$$

---

4. Cette expression est-elle cohérente avec l'expression générale de la force de gravité exercée entre deux masses ?

Réponse :
On a $||\overrightarrow{P}|| = mg_0 = k\mathcal{G}\frac{mM_t}{R_t^2}$ or la distance terre/objet vaut $d = R_t$. L'expression est donc cohérente si l'on pose $k = 1$.

VI Oscillations d'une masse ($\star\star\star$)

Un système ponctuel de masse m est attachée à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. À l'instant initial, on écarte légèrement la masse de sa position d'équilibre et on observe quelques oscillations.

1. À l'aide d'une analyse dimensionnelle, donnez une expression valide pour la fréquence des oscillations de la masse.

   Réponse :
   On remarque que la période dépend de la masse m et du coefficient de raideur k du ressort. Ce dernier étant horizontal, le champ de pesanteur ne doit à priori pas jouer sur le résultat. On obtient ainsi l'équation suivante :

   $$[f] = T^{-1} = [m]^{\alpha}[k]^{\beta}$$

   De plus, on sait que $[k] = [F].L^{-1} = M.T^{-2}$. On en déduit le système d'équation suivant :

   $$-1 = -2\beta \quad \text{et} \quad 0 = \alpha + \beta$$

   soit au final $\beta = 1/2$ et $\alpha = -1/2$. On en déduit que $f = c\sqrt{k/m}$ avec c une constante sans dimension.

   ---

2. On mesure 20 oscillations en 31 secondes pour une masse de 300 g. En déduire la valeur de la constante multiplicative

   Réponse :
   On déduit de l'énoncé la fréquence des oscillations : $f = 0{,}63\,\mathrm{Hz}$. On en déduit au final

   $$c = f\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}158 \approx \frac{1}{2\pi}$$

Astuces :

E1 Q2 : On trouve $[\mathcal{P}] = \mathrm{M.L^2T^{-3}}$
E4 Q1 : $V(z) = \frac{R\sqrt{g}}{\sqrt{R+z}}$
E6 Q2 : on trouve $f \approx 0.158\sqrt{k/m}$.