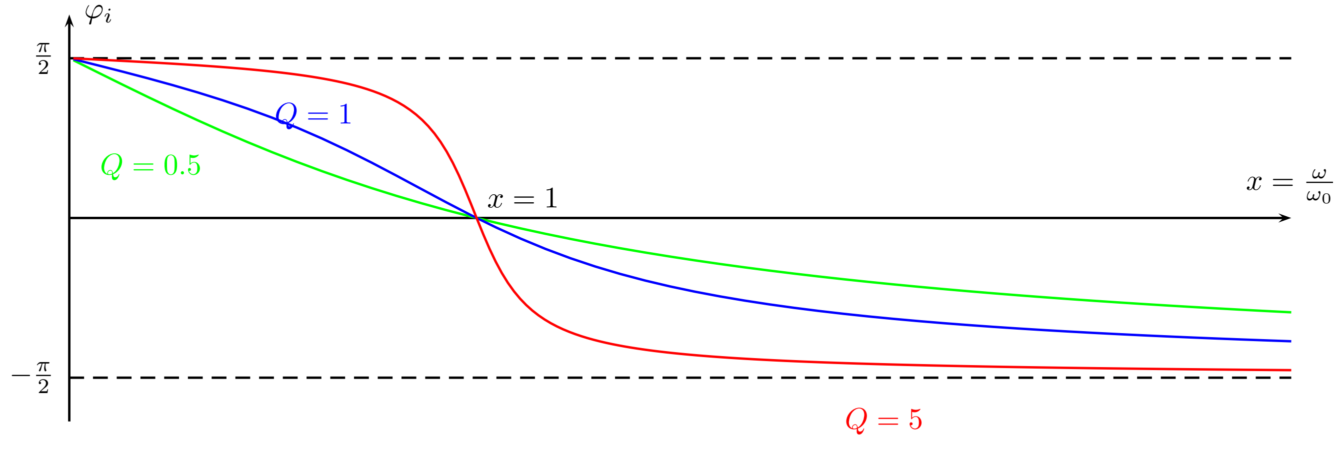
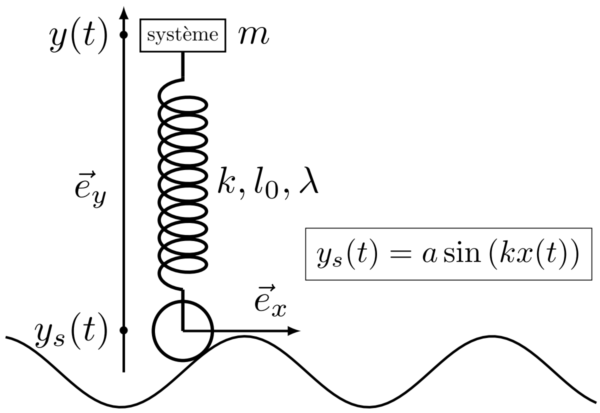


Lorsque $x = 1$, $\underline{I}_c \simeq \frac{E}{R} \Rightarrow \varphi_i = 0$, $e(t)$ et $i(t)$ sont en phase ($Z = R$ réelle). Cette dernière propriété permet de mesurer précisément la pulsation de résonance en TP.

II.7 Mise en équation du cas mécanique

On considère le cas d'un système de masse m, fixé à l'extrémité haute d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Les frottements fluides exercés par l'air sur le système seront modélisé par la force $\vec{f} = -\lambda \dot{y} \vec{e}_y$.
De plus, l'extrémité basse du ressort (roue) est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale $y_s(t) = a\sin(k(x(t)) = a\sin(\omega t)$ avec $\omega = kv_0$ en notant v_0 la vitesse horizontale de la roue.

On souhaite alors établir l'équation donc y est solution puis en déduire l'amplitude de cette grandeur en fonction de la pulsation ω.



Le système de masse m et d'ordonnée y est étudié dans un repère cartésien, par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$
- La force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y$
- La force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_y$ avec $l = y(t) - y_s(t)$.

On applique alors le principe fondamental de la dynamique au système et en projection selon l'axe $\vec{e}_y$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ky + ky_s + kl_0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}y_s + \left(kl_0 - g\right)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients constants et dont le second membre contient un terme harmonique et un terme constant.

En régime permanent, on aura $y(t) \approx y_h + y_c$ avec y_h, la solution particulière associée à la partie harmonique du second membre et y_c, la solution particulière associée à la partie constante de second membre.

On peut obtenir y_h en "passant en complexe" l'équation différentielle, privée de la partie constante

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{y}_h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}\underline{y}_h}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\underline{y}_h = \frac{k}{m}\underline{y}_s \Rightarrow (j\omega)^2\underline{y}_h + \frac{\lambda}{m}(j\omega)\underline{y}_h + \frac{k}{m}\underline{y}_h = \frac{k}{m}\underline{y}_s$$

d'où l'on déduit

$$\underline{y}_h = \frac{\frac{k}{m}}{(j\omega)^2 + \frac{\lambda}{m}(j\omega) + \frac{k}{m}} \times \underline{y}_s = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{k} j\omega - \frac{m}{k}\omega^2} \times \underline{y}_s$$

On peut alors exprimer l'amplitude du mouvement harmonique Y_h à l'aide du module $Y_h = |\underline{y}_h|$. La suite de l'étude de ce type de résonance sera réalisée en TD.