Chapitre M.1

Cinématique

Dans ce chapitre et les suivants, nous allons étudier la mécanique classique telle qu'elle a été conçue dès le XVII^{e} siècle, en particulier par Galilée et Newton. Bien qu'elle soit la bonne théorie pour décrire le mouvement des objets nous entourant au quotidien (balle de tennis, voiture sur la route, fusée...), nous connaissons désormais ses limites. La mécanique classique ne s'applique qu'aux systèmes :

- ayant de faibles vitesses devant celle de la lumière (**mécanique non relativiste**) ;
- macroscopiques, c'est-à-dire de grande échelle devant l'échelle des particules individuelles (**mécanique non quantique**).

L'objectif de ce premier chapitre est de se familiariser avec la cinématique, c'est-à-dire la description du mouvement des objets, sans s'intéresser aux causes qui lui donnent naissance. Nous y retrouverons les notions de position, vitesse et accélération, ainsi que de trajectoire. De façon à décrire le efficacement les mouvements, plusieurs systèmes de coordonnées usuels vont être détaillés.

Les chapitres suivants seront consacrés à la dynamique : étude des causes du mouvement et calcul des trajectoires associées qui en découlent.

I Référentiel

I.1 Définitions

En mécanique classique du point, on étudie le mouvement d'un point M (centre de masse d'un solide ou d'un objet ponctuel) repéré par une, deux ou trois **coordonnées** de position. Cependant, on remarque que la description d'un mouvement donné dépend de l'observateur [1].

Définitions

- Un référentiel est la donnée d'un système d'axes liés à un solide, muni d'une horloge.
- La trajectoire est l'ensemble des positions du point dans le référentiel : elle est relative à ce dernier
- Le temps s'écoule de manière similaire dans deux référentiels distincts : il est absolu.

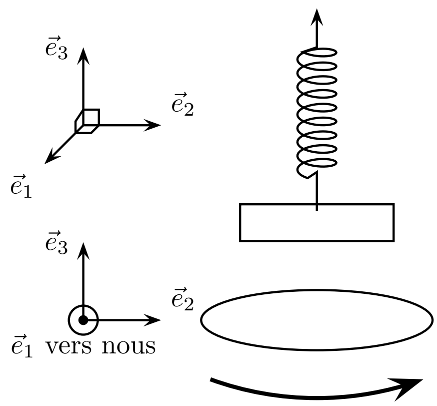
Exemples : référentiel local (lié au sol), référentiel géocentrique (origine au centre de la terre, vecteurs pointant vers des étoiles lointaines), référentiel de Copernic (origine au centre de masse du système solaire, même vecteurs).

Le système d'axe $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est constitué d'un point A, solidaire du solide et d'une base de vecteurs orthonormée directe.

I.2 Base OrthoNormée Directe (BOND)

- Les vecteurs sont sans dimensions et normés ($||\vec{e}_k|| = 1,\ \forall k$)
- Les vecteurs sont orthogonaux deux à deux ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ si $j \neq i$).
- La base est directe si $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ (produit vectoriel).

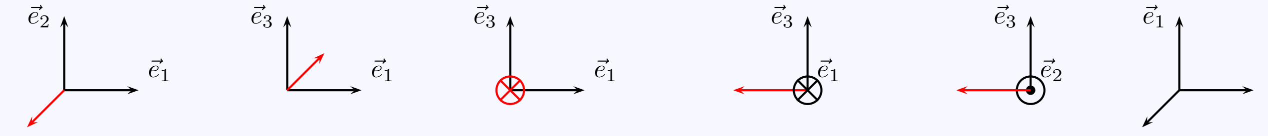
Important : Règle de la main droite : Une fois tendus : le pouce, l'index et le majeur désignent $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ respectivement.



1. pensez au mouvement d'un passager d'un train observé par un autre passager, ou bien par une personne en dehors du train

Application de cours n°1

Trouvez le(s) vecteur(s) manquants pour former une base directe dans les cas suivants :



I.3 Produit scalaire et projections

On utilise des vecteurs pour représenter la position, la vitesse et accélération d'un système. On a dans le cas général :

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3}$$

où a_1, a_2 et a_3 représentent les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On peut ensuite définir

- Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

  $$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ||\vec{a}|| \times ||\vec{b}|| \times \cos(\theta_{\vec{a},\vec{b}})$$

  Comme son nom l'indique, le produit scalaire n'est pas un vecteur mais un nombre scalaire.
- La norme d'un vecteur $||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Ce résultat est la généralisation du théorème de Pythagore en dimension 3.
- La coordonnée a_i de $\vec{a}$ selon $\vec{e}_i$ à l'aide d'une projection : $a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i$, $\forall i \in [|1,3|]$. On en déduit la formule générale :

  $$\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{a}\cdot\vec{e}_2)\,\vec{e}_2 + (\vec{a}\cdot\vec{e}_3)\,\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3}(\vec{a}\cdot\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$$

II Repérage du point

II.1 Systèmes usuels de coordonnées

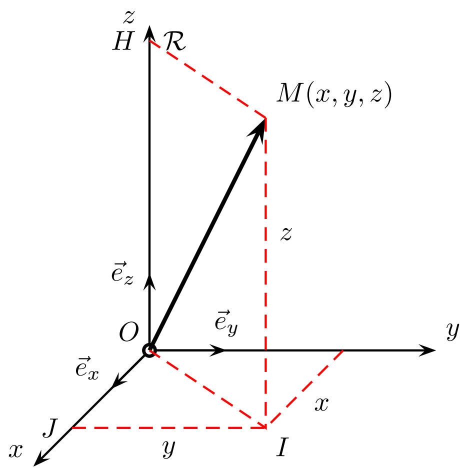
a) Coordonnées cartésiennes : x, y, z

C'est le système de coordonnées utilisé depuis le début de l'année, idéal pour décrire des mouvements de translations ou quelconques. On utilise la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

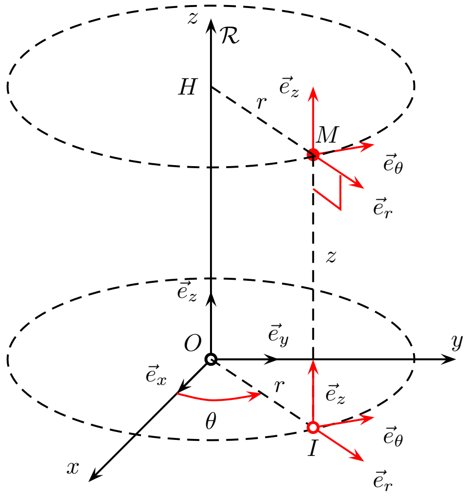
- x abscisse, y ordonnée et z la côte sont les coordonnées **cartésiennes de M.**
- Vecteur position :

  $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

- Distance à l'origine $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$



b) Coordonnées cylindriques : r, θ, z



Quand un problème fait intervenir une rotation autour d'un axe, il est plus simple de décrire le mouvement à l'aide des coordonnées cylindriques.

M se projette en I dans le plan (xOy), on définit alors $r = OI$ le rayon polaire et $\theta = (Ox, OI)$ l'angle polaire.

- r, θ et z sont les coordonnées **cylindriques** de M.
- $\vec{e}_r$ est le vecteur radial tel que $\overrightarrow{OI} = r\vec{e}_r$.
- $\vec{e}_\theta$ est le vecteur **orthoradial** obtenu par rotation de $\vec{e}_r$ de $+\pi/2$ autour de Oz : on parle de base locale car $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position de M. Au contraire, la base cartésienne est fixe.
- Vecteur position :
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$
- Distance de l'origine à M : $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{r^2 + z^2}$

Lien avec le système cartésien :

On a pour les coordonnées x et y :

$$x = (r\vec{e}_r + zez) \cdot \vec{e}_x = r\cos\theta \text{ et } y = (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_y = r\sin\theta \text{ soit } r^2 = x^2 + y^2$$

puis pour les vecteurs de la base polaire :

$$\vec{e}_r = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \text{ et } \vec{e}_\theta = \cos(\theta + \pi/2)\vec{e}_x + \sin(\theta + \pi/2)\vec{e}_y = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$$

Remarques:

- ✷ $\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}$ *et de même* $\vec{e}_r = -\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ *: la déviation par rapport à* θ *d'un vecteur de la base mobile est équivalente à une rotation de* $+\frac{\pi}{2}$.
- ✷ *Si le mouvement est plan, le mobile se déplace dans un plan* (Oxy) *: coordonnées cylindriques sans* z.
- ✷ *On peut exprimer le déplacement élémentaire en fonction d'une petite variation des coordonnées* r, θ *et* z *:* $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$

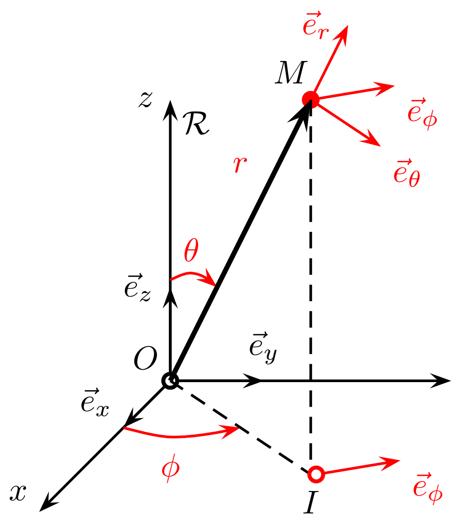
c) Coordonnées sphériques : r, θ, ϕ

Quand un problème fait intervenir un point privilégié (rotation autour d'un point par exemple), il est parfois plus simple d'utiliser le système suivant :

On définit :

- le vecteur $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ associé à la la coordonnée $r = OM$.
- l'angle orienté $\theta = (Oz, \overrightarrow{OM})$ associé au vecteur $\vec{e}_\theta$ qui appartient au plan $(Oz, \overrightarrow{OM})$, qui est orthogonal à $\vec{e}_r$.
- l'angle φ entre Ox et $\overrightarrow{OI}$ avec I le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy associé au vecteur $\vec{e}_\phi$ tel que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ soit une base orthonormée directe.

L'expression du vecteur position est alors extrêmement simple : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Toutefois, la difficulté est « cachée » dans le fait que $\vec{e}_r$ dépend de θ et de ϕ.



d) Bilan

Loi : Vecteurs positions dans différents systèmes de coordonnées | ♡

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit dans les systèmes de coordonnées :

- $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ (cartésien)
- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ (cylindrique)
- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ (sphérique)

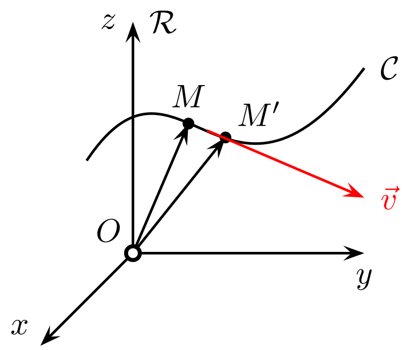
Et il convient de remarque que le vecteurs $\vec{e}_r$ n'est pas le même en coordonnées cylindrique et sphérique.

II.2 Vecteur vitesse d'un point M dans un référentiel donné $\vec{v}(M/\mathscr{R})$

a) Définition

Soit un point M dont la trajectoire est notée $\mathscr{C} \in \mathscr{R}$. S'il est en M à l'instant t et en M' à l'instant $t + \Delta t$, alors par définition, sa vitesse instantanée est :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

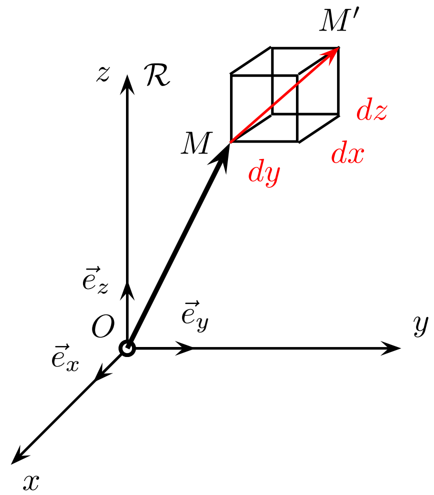


$\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$, il est donc tangent à la trajectoire. On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ et :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}$$

Cette définition dépend du référentiel par l'intermédiaire du point O. La vitesse est donc relative.

b) Expression de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes



On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et donc :

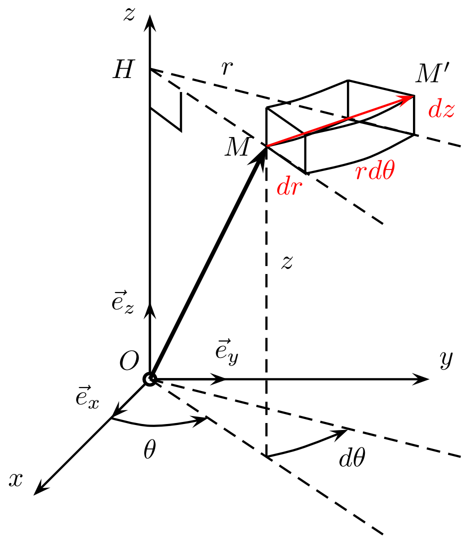
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \dot{y}\vec{e}_y + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Or, les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont **fixes** dans $\mathscr{R}$, leur dérivée par rapport au temps est **nulle** et il reste :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

d'où $v = ||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (norme de la vitesse).

c) En coordonnées cylindro–polaires



On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et donc :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Le vecteur $\vec{e}_z$ est fixe dans $\mathscr{R}$ **contrairement** aux vecteurs $\vec{e}_r(\theta(t)) = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta(\theta(t)) = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y$:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ soit } \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Norme du vecteur vitesse : $v = ||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$.

Loi : Dérivées des vecteurs de la base cylindrique | ♡

Les dérivées des vecteurs de la base polaire s'expriment selon :

- $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit une multiplication par $\dot{\theta}$ puis rotation de $+\pi/2$.
- $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ soit une multiplication par $\dot{\theta}$ puis rotation de $+\pi/2$.
- $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$

Remarque:

Autre méthode pour le vecteur vitesse : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

Application de cours n°2

Un manège tourne à une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} = \frac{2\pi}{10}\ rad.s^{-1}$ (donc un tour en 10 seconde). Un passager se trouve à une distance $R = 3\ m$ du centre du manège.

1. Exprimez son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (O désigne le centre du manège) au cour du temps en base polaire puis en base cartésienne.
2. Exprimez ensuite le vecteur vitesse correspondant en base polaire puis ensuite en base cartésienne.
3. Le vecteur vitesse est-il constant ? Qu'en est-il de sa norme ? (la calculer)

II.3 Vecteur accélération

a) Définition

L'accélération d'un point matériel M par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ est :

$$\vec{a}(M/\mathscr{R}) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}} \text{ dérivée temporelle du vecteur } \vec{v} \text{ dans } \mathscr{R}$$

b) En coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \dot{x}\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \ddot{y}\vec{e}_y + \dot{y}\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Or $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \overrightarrow{0}$, $\frac{d\vec{e}_y}{dt} = \overrightarrow{0}$ et $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \overrightarrow{0}$ et il reste :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad a = ||\vec{a}|| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \text{ norme de l'accélération}$$

c) En coordonnées cylindro–polaires

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

avec $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ soit :

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{composante radiale}}\vec{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{\text{composante orthoradiale}}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Norme de l'accélération : $a = ||\vec{a}|| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$

❦ **Important :** La vitesse et l'accélération sont définies par rapport à un référentiel (axes liés à un observateur muni d'une horloge et une origine) mais leurs expressions vectorielles peuvent être données dans différents repères. Il ne faut pas confondre repère et référentiel.

III Applications

III.1 Mouvement uniformément accéléré

Pour une accélération $\vec{a}$ constante, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$$

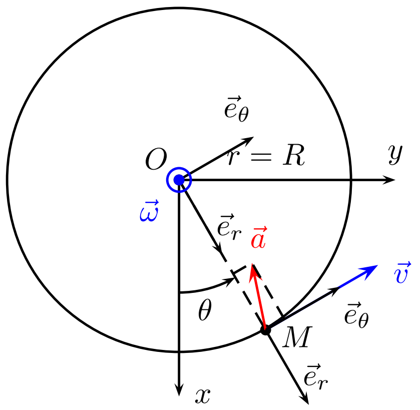
avec $\vec{v}_0$ la vitesse initiale du mobile et M_0 sa position initiale (à $t = 0$).

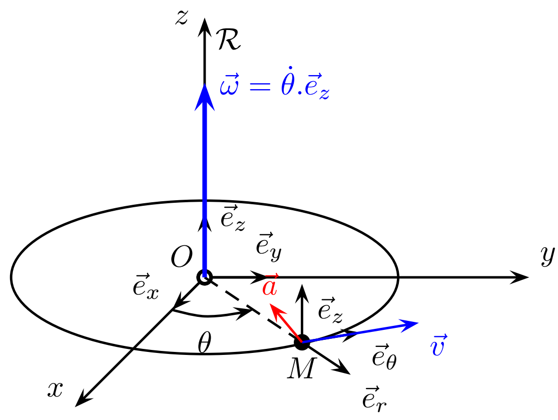
Remarque :
Dans ce cas (rare), il n'a pas été nécessaire de projeter l'accélération dans une base pour obtenir la trajectoire.

III.2 Mouvement circulaire

a) Vecteur vitesse et vecteur accélération

Le mobile décrit le cercle de rayon $r = R$ constant, de centre O à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.
Le mouvement étant plan, on utilise les **coordonnées polaires** avec O pour centre du repère et on place les axes de façon à avoir $\theta = (Ox, OM)$.





Vitesse du mobile : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et ici, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = R$ constant d'où :

$$\vec{v} = \frac{d(R\vec{e}_r)}{dt} = R\frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = v.\vec{e}_\theta \text{ avec } v = R\omega = R\dot{\theta}$$

Accélération du mobile :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta + v\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - v\dot{\theta}\vec{e}_r \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}.\vec{e}_r$$

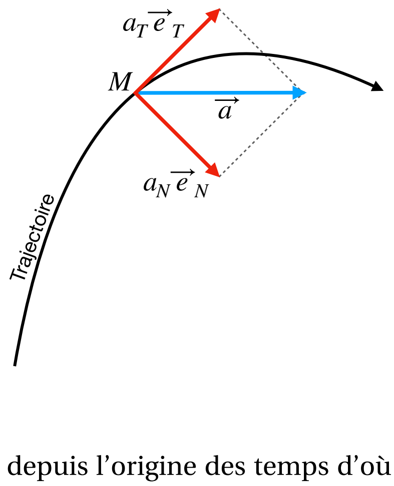
Remarque :
On peut définir le vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}.\vec{e}_z$ de norme $\omega = \dot{\theta}$, de direction, celle de l'axe de rotation et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon.

b) Cas du mouvement circulaire uniforme

- Lorsque le mouvement circulaire est uniforme (norme de la vitesse constante), avec $r = R = Cte$ et $\dot{\theta} = Cte$ et $\vec{\omega} = \omega.\vec{e}_z$ constant.
- $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \neq \vec{Cte}$ même si $v = R\dot{\theta} = cte$ car le vecteur change de direction à chaque instant $\Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$.

III.3 Repère de Frenet et rayon de courbure

Le repère de Frenet $(M, \vec{e}_T, \vec{e}_N)$ permet d'étudier un mouvement dans le plan en faisant intervenir l'abscisse curviligne s, qui représente la distance parcourue depuis l'instant initial et le rayon de courbure instantanée de la trajectoire R.



- Le vecteur unitaire $\vec{e}_T$ est colinéaire (tangent) au vecteur vitesse soit $\vec{e}_T = \vec{v}/||\vec{v}||$. Il n'est donc pas défini lorsque la vitesse du point M s'annule.
- Le vecteur unitaire $\vec{e}_N$ est perpendiculaire (normal) au vecteur vitesse, et orienté vers le centre de courbure de la trajectoire locale du point M.
- Dans le cas d'un mouvement circulaire, le vecteur $\vec{e}_T$ est colinéaire au vecteur $\vec{e}_\theta$ (mais pas forcément du même sens) et le vecteur $\vec{e}_N$ est colinéaire au vecteur $\vec{e}_r$.
- On défini l'abscisse curviligne s comme la distance parcourue par le mobile depuis l'origine des temps d'où $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ avec $\vec{v} = v\vec{e}_T$.

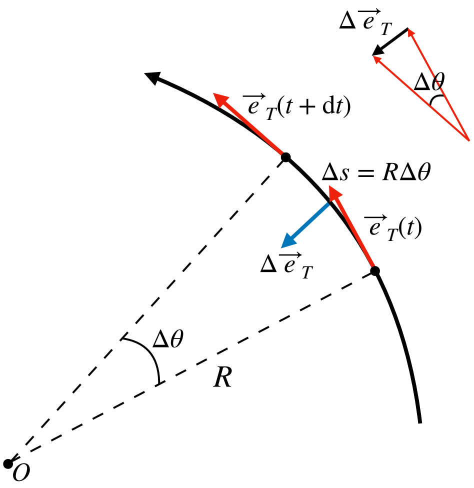
On peut ensuite définir le vecteur accélération dans la base de Frenet soit $\vec{a} = a_T\vec{e}_T + a_N\vec{e}_N$ comme représenté sur le schéma ci-contre.

On souhaite maintenant établir le lien entre la composante normale a_N à la trajectoire du vecteur accélération et les caractéristiques géométriques de la trajectoire. On considère pour cela la variation du vecteur tangent entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ et on assimile la trajectoire locale à une portion de cercle de centre O et de rayon R d'où :

$$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{||\Delta\vec{e}_T||}{2\times||\vec{e}_T||} \Rightarrow ||\Delta\vec{e}_T|| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

De plus, $\mathrm{d}t$ est choisi suffisamment petit de manière à ce que $\Delta\theta \ll 1$ et on en déduit en notant Δs, la variation de l'abscisse curviligne entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$||\Delta\vec{e}_T|| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx 2\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$



Or, on remarque que le vecteur Δe_T est colinéaire au vecteur normal $\vec{e}_N$ et on en déduit que $\Delta\vec{e}_T = \frac{\Delta s}{R}\vec{e}_N$ puis que $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_T}{\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_N = \frac{v}{r}\vec{e}_N$.

On considère alors le vecteur accélération comme la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v\vec{e}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_T + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_T + v\times\frac{1}{R}v\vec{e}_N = \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}}_{a_T}\vec{e}_T + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_N}\vec{e}_N$$

Loi : Accélération normale et rayon de courbure | ♡

Le rayon de courbure R du cercle inscrit dans la trajectoire s'exprime selon :

$$R = \frac{v^2}{a_N} \Leftrightarrow a_N = \frac{v^2}{R}$$

où a_N représente la composante normale de l'accélération et v, la norme de la vitesse.

Application de cours n°3

Un mobile se déplace à vitesse horizontale $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 = \mathrm{Cste}$ le long d'un profil parabolique tel que $y = y_0 - \frac{\alpha}{2}x^2$. A l'instant initial, il se trouve en $x = 0$, le sommet de la parabole.

1. En déduire l'expression de son vecteur vitesse puis de son vecteur accélération en fonction de v_0, α et t.
2. Exprimer le rayon de courbure R à l'instant initial en fonction de α.

III.4 Changement de référentiel

On considère le cas du mouvement d'un point M étudié dans deux référentiels notés R_1 et R_2 d'origines respectives O_1 et O_2. L'expression de la vitesse $\vec{v}_2$ de M dans le second référentiel s'exprime selon la loi d'additivité des vitesses :

$$\vec{v}_2 = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_2M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_2O_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{R_2/R_1} + \vec{v}_1$$

en notant $\vec{v}_1$, la vitesse de M dans le premier référentiel. On effectue alors les constatations suivantes

1. Si les deux référentiels sont immobiles, l'un par rapport à l'autre, les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont identiques.
2. Si R_2 est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R_1, on obtient alors que $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$: les accélérations de M dans les deux référentiels sont identiques.
3. Sinon, les vitesses et accélérations de M sont différentes dans les deux référentiels.

<u>*Remarques*</u>:

- *Pour un même référentiel, on peut utiliser plusieurs bases ou repères mais dans ce cas, on décrit le même mouvement ($\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont identiques dans tous les repères, ce sont juste les coordonnées de ces vecteurs qui changent).*
- *Dans le cadre de la mécanique classique, les distances entre deux points sont identiques d'un référentiel à l'autre, de même que les écarts temporels.*
- *Dans le cas de la célérité de la lumière, on a $c = c_2 = c_1 \neq c_1 + v_{R_2/R_1}$ lorsque $v_{R_2/R_1} \neq 0$. Ainsi, pour des vitesses élevées, la description classique de la loi d'additivité des vitesses est prise en défaut. Il convient alors de se placer dans le cadre de la mécanique relativiste pour des vitesses s'approchant de c.*

Éléments essentiels du chapitre M.1

- ⋆ Un référentiel est la donnée d'un système d'axes liés à un solide, muni d'une horloge.
- ⋆ Règle de la main droite : Une fois tendus : le pouce, l'index et le majeur désignent $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ respectivement.
- ⋆ **Vecteur et projection sur une base :** $\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\,\vec{e}_1 + (\vec{a}\cdot\vec{e}_2)\,\vec{e}_2 + (\vec{a}\cdot\vec{e}_3)\,\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} (\vec{a}\cdot\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$
- ⋆ **vecteur position en cartésien** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
- ⋆ **vecteur position en cylindrique :** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = r\,\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- ⋆ **vecteur vitesse en cartésien :** $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
- ⋆ **vecteur vitesse en cylindrique :** $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$
- ⋆ **vecteur accélération en cartésien :** $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
- ⋆ **vecteur accélération en cylindrique :** $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$
- ⋆ **lien entre accélération normale et rayon de courbure :** $R = \frac{v^2}{a_N} \Leftrightarrow a_N = \frac{v^2}{R}$

Conseils & astuces

Vous devez impérativement connaître par coeur les expressions des vecteurs position et vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. L'expression du vecteur accélération doit être retrouvée (rapidement) en dérivant l'expression du vecteur vitesse.

En coordonnées cylindrique, les vecteurs de bases $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ ne sont pas fixe. En effet, ils sont modifiés lorsque le système ponctuel M se déplace.
Cela n'est pas sans conséquence lors du calcul de dérivées. En effet, $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \neq 0$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \neq 0$. On a plutôt $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ puis $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$. Ces dernières formules doivent être connues par coeur.

Il est important de savoir passer d'un système de coordonnées à un autre (c.f. exercices en TD). Dans tous les cas, pensez toujours à vérifier la cohérence de vos résultats à l'aide de cas particuliers ($\theta = 0$, $\theta = \pi/2, \ldots$).
En pratique, les décompositions implique souvent l'utilisation des termes $\pm\cos\theta$ et $\pm\sin(\theta)$.

Les coordonnées sphérique seront peu souvent utilisés. En effet, bien que $\overrightarrow{OM}$ s'y exprime facilement, l'obtention des vecteurs vitesse et accélération y est moins aisée.

La base de Frenet ne sera pas souvent utilisée, au contraire des bases cartésiennes et cylindrique. Cependant, le résultat liant l'accélération normale au rayon de courbure sera souvent ré-utilisé et doit être connu par cœur.

En mécanique comme ailleurs, il convient de faire très attention à l'homogénéité des expressions que vous manipulez. De plus, une expression vectorielle ($\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ ou $\vec{a}$ par exemples) ne peut être mélangée à des scalaires.

Remarques & Notes personnelles