

Physique - Devoir Surveillé 9 | Concours blanc

Le 26/05/2025

I Observation du Fort Boyard

Situé au large de la Charente-Maritime, le Fort Boyard est édifié sous l’impulsion de Napoléon afin de protéger la rade, l’embouchure de la Charente, le port et surtout le grand arsenal de Rochefort des assauts de la marine anglaise. Construit entre 1804 et 1857, il est transformé en prison quelques années à peine après son achèvement.

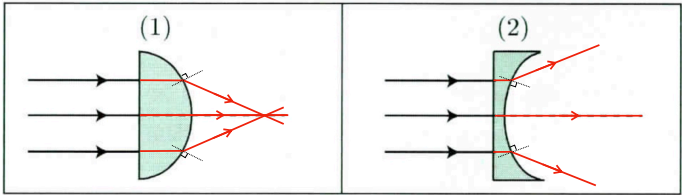
On souhaite observer le Fort Boyard depuis l’Île d’Aix, à l’aide de jumelles, sommairement modélisées par une paire de lunettes de Galilée. Chaque lunette comprend deux lentilles, l’une convexe, l’autre plan concave.

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction, au moyen d’un schéma faisant apparaître les grandeurs utiles.

Réponse :
cf. cours.

2. La figure 1 représente les lentilles pan convexe et plan concave, taillées dans un verre d’indice optique $n > 1$ et plongées dans l’air d’indice optique $n_{\text{air}} = 1$. Recopier la figure et tracer qualitativement le suivi des rayons au travers du dioptré air/verre, puis du dioptré verre-air. Bien qu’aucun calcul ne soit attendu, détailler la démarche adoptée en utilisant la réponse à la question 1.

Réponse :
Dans les deux cas, la première interface étant plane, les rayons incidents arrivant orthogonalement sur la face d’entrée ne sont pas déviés. Sur la face de sortie, il faut appliquer les lois de Snell-Descartes pour prédire l’évolution de chaque faisceau lumineux, sachant que l’indice du verre est plus important que celui de l’air. Ainsi, les angles (en valeur absolue) sont plus élevés en sortie de dioptré, par rapport aux normales.



3. En déduire la nature, convergente ou divergente, de chaque lentille.

Réponse :
Dans le cas (1), les rayons arrivant parallèle à l’axe optique convergent derrière la lentille : le foyer principal image est réel, la lentille est convergente. Dans le cas (2), le foyer principal image est virtuel, donc la lentille est divergente.

Dans la suite, les lentilles sont supposées minces et utilisées dans les conditions de Gauss. Chaque lunette de Galilée est composée d’une lentille (L_1) de distance focale $f'_1 > 0$ constituant l’objectif de la lunette, et d’une lentille (L_2) de distance focale $f'_2 < 0$, telle que $|f'_2| < f'_1$, constituant l’oculaire (voir figure 2). On note respectivement O_1 , F_1 et F'_1 le centre optique, le foyer principe objet, et le foyer principal image de l’objectif. De même, on note respectivement O_2 , F_2 , et F'_2 le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de l’oculaire.

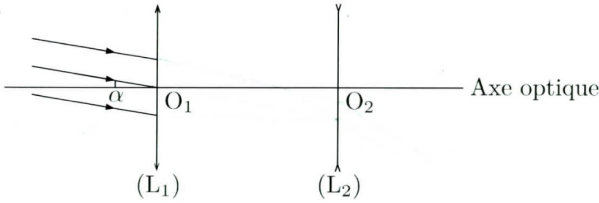


FIGURE I.1 – Schéma optique de la lunette de Galilée

La lunette est réglée de façon à donner une image à l’infini d’un objet à l’infini, ce qui permet à l’observateur d’éviter toute fatigue. Dans ces conditions, la lunette est dite afocale.

4. Préciser et justifier la position relative des foyers des lentilles. En déduire l’encombrement $\ell = O_1O_2$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$.

Réponse :
On utilise la définition d’un système afocal : avec une chaîne de conjugaison, on trouve que : $\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 = F_2 \xrightarrow{(L_2)} \infty$.

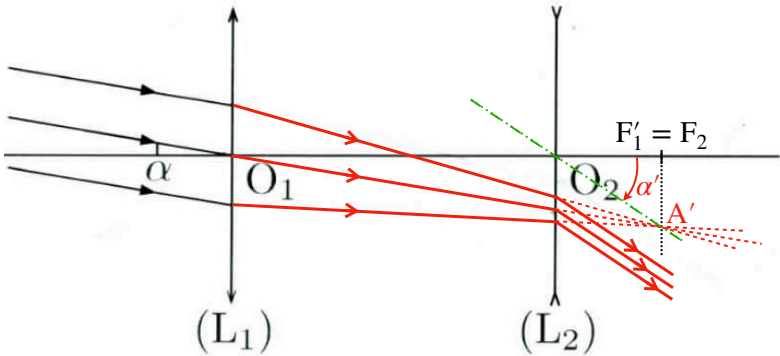
Il faut donc que le foyer principal image de (L_1) soit confondu avec le foyer principal objet de (L_2) , soit $F'_1 = F_2$. On a donc :

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = \overline{O_1F'_1} - \overline{O_2F_2} = f'_1 - f_2 \quad \text{avec } f_2 > 0$$

On obtient donc : $\ell = f'_1 - |f'_2|$.

5. Recopier le schéma de la figure 2 et poursuivre le tracé des rayons incidents parallèles faisant un angle α avec l’axe optique et émergeant sous un angle α' avec l’axe optique.

Réponse :



Pour les rayons émergeant de (L_1) , ils convergent vers un même point du plan focal image, nommé A' sur le schéma (on peut identifier ce point à l’aide du rayon passant par O_1 non dévié par la lentille). Ensuite, comme tous les rayons passent par un même point du plan focal objet de (L_2) , ils ressortent de (L_2) suivant la même direction, parallèles entre eux. On détermine cette direction en traçant le rayon passant par le même point du plan focal objet de (L_2) et par O_2 (et donc qui ressort non dévié de (L_2) , rayon vert sur le schéma).

6. *L'image du Fort à travers les jumelles apparaît-elle droite ou renversée par rapport au Fort observé à l'œil nu ? Justifier.*

Réponse :
Comme l'indique le schéma optique, l'angle α' est de même signe que l'angle α , donc l'image est droite en sortie de la lunette.

7. *En se plaçant dans les conditions de Gauss, les angles α et α' sont petits ; déterminer l'expression du grossissement de la lunette $G = \alpha'/\alpha$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$.*

Réponse :
Dans le triangle $O_1F'_1A'$ rectangle, on a $\tan(\alpha) = \frac{F'_1A'}{O_1F'_1} = \frac{F'_1A'}{f'_1} < 0$.
De même, dans le triangle $O_2F'_1A'$ rectangle, on a $\tan(\alpha') = \frac{F'_1A'}{O_2F'_2} = \frac{F'_1A'}{f'_2} < 0$.
Dans les conditions de Gauss, on pourra écrire : $\tan(\alpha) \approx \alpha$ et $\tan(\alpha') \approx \alpha'$. Ainsi $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{|f'_2|}$

8. *Compte tenu des valeurs de grossissement et d'encombrement précisées en fin de partie, calculer la valeur des distances focales f'_1 et f'_2 .*

Réponse :
Avec les expressions de ℓ et G , on obtient :
$$f'_1 = G|f'_2| \quad \text{et} \quad |f'_2| = \frac{\ell}{G-1}$$

L'application numérique donne : $f'_2 \simeq -1,3 \text{ cm}$ et $f'_1 \simeq 26,3 \text{ cm}$.

On observe le Fort, de hauteur h , depuis l'Île d'Aix située à une distance d .

9. *Sous quel angle le Fort est-il observé à l'œil nu ? Sous quel angle est-il observé à travers les jumelles ? Vérifier la validité des conditions de Gauss.*

Réponse :
On a $\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{h}{d} = 6,7 \times 10^{-3} \text{ rad}$ (soit $0,4^\circ$). Ainsi $\alpha' = G\alpha \simeq 1,3 \times 10^{-1} \text{ rad}$.
On a $\alpha \ll 1$ et $\alpha' \ll 1$, ce qui valide les conditions de Gauss.

II Accordeur de guitare

On s'intéresse à un accordeur de guitare, dont on rappelle quelques caractéristiques.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau ci-dessous :

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

— On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Afin d'identifier la fréquence de la corde jouée et indiquer à l'utilisateur si cette dernière est accordée, le signal sonore mesuré par l'accordeur de corde est au préalable converti en une tension u_e , avant d'être filtré par plusieurs filtres étudiés dans ce problème.

II.A Généralités

II.A.1 Onde sur une corde de guitare

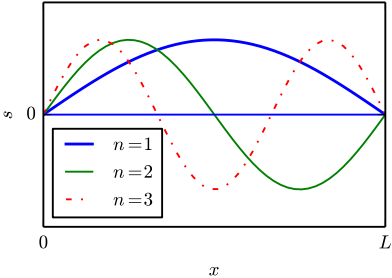
On considère une corde de guitare de masse linéique μ , de longueur L fixée à ses extrémités. On note T la tension de la corde correspondant à une force.

1. *Par analyse dimensionnelle, exprimer la célérité c de l'onde sur la corde en fonction de μ et T . Cette expression ne fait pas apparaître de constante adimensionnée.*

Réponse :
La tension est une force, donc $[T] = M \cdot L \cdot T^{-2}$. Comme $[\mu] = M \cdot L^{-1}$, on propose l'expression $c = \sqrt{T/\mu}$

2. *Établir l'expression de la fréquence f_n du mode $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de c , L et n . Définir la fréquence fondamentale.*

Réponse :
On représente les trois premiers modes :



On a $\lambda_1 = 2L$, $\lambda_2 = \frac{2L}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$.
Par récurrence, on en déduit $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. Or $f_n = c/\lambda_n$, donc $f_n = n \frac{c}{2L} = n f_1$.
On pose $f_1 = \frac{c}{2L}$ la fréquence fondamentale.

Pour aller plus loin :
On peut aussi établir ce résultat en considérant la réunion de deux ondes progressives, puis en appliquant les deux conditions limites.

3. *On constate que la corde étudiée a une fréquence fondamentale $f_{co} > f_{ac}$. Faut-il tendre ou détendre la corde pour l'accorder ?*

Pour diminuer f_1 , il faut diminuer la célérité de l'onde c d'après la question précédente, et donc diminuer la tension T de la corde d'après la première question.

II.A.2 Le signal

La figure II.1 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

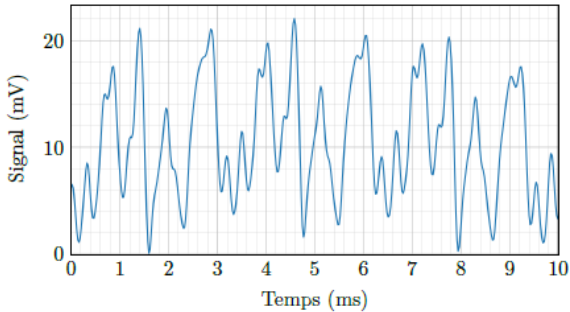


FIGURE II.1 – Signal de la guitare

4. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

Réponse :
Par lecture graphique : $U_{moy} \approx 10\text{ mV}$

5. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). On donnera le résultat avec 2 chiffres significatifs.

Réponse :
On lit la période $T \approx 3,2\text{ ms}$, soit $f = 1/T \approx 310\text{ Hz}$. Cette mesure n'est pas simple à réaliser ; il faut bien faire attention à correctement identifier le motif qui se répète !

6. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

Réponse :
Il s'agit du Mi aigu.

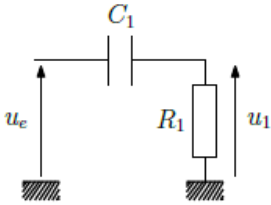
7. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Réponse :
On voit que le signal n'est pas une sinusoïde à laquelle on aurait ajouté une composante continue. Donc le spectre présentera des harmoniques.

II.B Filtrage

II.B.1 Premier filtre (F_a)

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure II.B.1 (filtre (F_a)).



Filtre (F_a)

8. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.

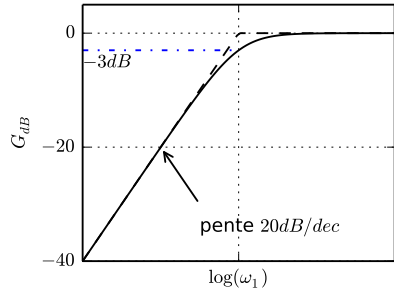
Réponse :
Par un pont diviseur de tension, $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$.

9. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Réponse :
On étudie les limites : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}_1(j\omega) = 0$; $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}_1(j\omega) = 1$
Il s'agit d'un filtre **passé-haut**. On pose la pulsation de coupure $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ correspondant à la pulsation telle que $|\underline{H}_1|(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain. On placera $\log(\omega)$ en abscisse. On justifiera soigneusement les équations des asymptotes. Sur ce même graphique, tracer la courbe réelle.

Réponse :
On effectue l'étude asymptotique du gain $G(\omega) = \frac{\omega/\omega_1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}}$:
— A basse fréquence, $G(\omega) \underset{\omega \ll \omega_1}{\sim} \omega/\omega_1$
On en déduit $G_{dB}(\log(\omega)) \underset{\omega \ll \omega_1}{\sim} 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_1)$
On a alors une asymptote basse fréquence d'équation $20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_1)$ (pente $+20\text{ dB/dec}$).
— A haute fréquence, $G(\omega) \underset{\omega \gg \omega_1}{\sim} 1$
On en déduit $G_{dB}(\log(\omega)) \underset{\omega \gg \omega_1}{\rightarrow} 0$, soit une asymptote horizontale à haute fréquence.



11. On a choisi $R_1 = 100\text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{ nF}$. Calculer la fréquence f_1 associée à la pulsation ω_1 . On donne $1/(2\pi) \approx 0,16$. Au vu de l'allure du signal de la figure II.1, quel est le rôle de ce premier filtre ?

Réponse :

La fréquence de coupure vaut $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \approx 16\text{ Hz}$. Ce filtre coupe principalement la composante continue du signal (on a vu que le fondamental avait une fréquence bien plus élevée). Cette étape est importante, car dans la suite, on va fortement amplifier les basses fréquences.

II.B.2 Amplification (légèrement) sélective : filtre (F_b)

L'amplificateur opérationnel (ALI), représenté figure II.2, est un composant électronique permettant d'amplifier la différence de potentiel entre les entrées V_+ et V_- .

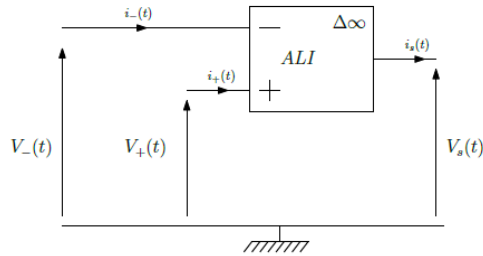


FIGURE II.2 – Représentation de l'ALI

Un ALI idéal est un ALI vérifiant les conditions suivantes :

- les courants d'entrée $i_+(t)$ et $i_-(t)$ sont nuls ;
- lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime linéaire, on a $V_+(t) = V_-(t)$ et $|V_s(t)| < V_{\text{sat}} \approx 12\text{ V}$;
- lorsque l'ALI idéal fonctionne en régime non linéaire, on a : $V_s(t) = +V_{\text{sat}}$ si $V_+(t) > V_-(t)$ et $V_s(t) = -V_{\text{sat}}$ si $V_+(t) < V_-(t)$.

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

12. Soit le filtre de la figure II.3 (a).

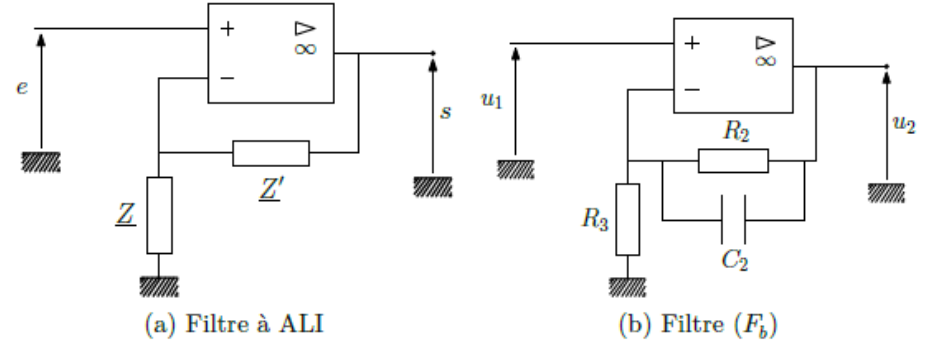


FIGURE II.3 – Deux filtres

(a) Montrer que sa fonction de transfert $\underline{H}$ s'écrit

$$\underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} \quad (\text{II.1})$$

Réponse :

Comme $V^+ = V^-$ et que $V^+ = e$, on en déduit que la tension aux bornes de l'impédance $\underline{Z}$ vaut $V^- = e$. Comme $i^- = 0$, on en déduit que l'intensité traversant les deux impédances est la même. On peut alors appliquer un pont diviseur de tension : $e = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} s$

$$\text{On en déduit la fonction de transfert : } \underline{H} = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}'}{\underline{Z}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

(b) Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

Réponse :

On a alors une fonction de transfert $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$ égale à un réel positif. Le montage ne change que l'amplitude du signal de sortie, on parle d'un amplificateur non inverseur.

En sortie du filtre de la figure II.B.1 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure II.3 (b) (filtre (F_b)).

13. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{eq}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Réponse :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

14. Dédire de l'équation (II.1) l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 . La mettre sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Réponse :

$$\underline{H_2} = 1 + \frac{Z_{eq}}{R_3} = 1 + \frac{R_2/R_3}{1 + jR_2C_2\omega}$$

On pose $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$.

15. Quelle est la limite de $|\underline{H_2}|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Réponse :
A basse fréquence, $|\underline{H_2}| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 + G_0$.
A haute fréquence, $|\underline{H_2}| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 1$.

16. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{ k}\Omega$, $R_3 = 6\text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Réponse :

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2C_2} = 500\text{ Hz}$$

et $G_0 = 113$.

Ce filtre amplifie les basses fréquences et ne modifie pas les hautes fréquences.

17. Si on étudie le signal u_2 à la sortie du filtre (F_b)) par rapport au signal u_e à l'entrée du filtre (F_a), peut-on écrire que $\underline{H} = \frac{u_2}{u_e} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$? Justifier.

Réponse :
Le filtre (F_b) est un filtre dit actif, i.e. utilisant un ALI. Or ce composant impose $i_+ = 0$, donc le filtre (F_b) ne consomme pas de courant à la sortie du filtre (F_a), donc ne modifie pas la fonction de transfert $\underline{H_1} = \frac{u_1}{u_e}$ étudiée à vide.
Ainsi on a bien $\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$.

III Programme d’exploration de Mars de la Nasa

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l’exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l’objectif de l’exploration de la planète Mars par l’homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.
Ce sujet propose d’étudier la cohérence de l’un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Données :

— Masse du soleil	$M_S = 2,00 \times 10^{30}\text{ kg}$
— Demi-grand axe de l’orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6\text{ km}$
— Demi-grand axe de l’orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6\text{ km}$
— Constante gravitationnelle	$\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}\text{ SI}$
— Période de révolution de la Terre	$T_T = 365\text{ jours}$
— Période de révolution de la Mars	$T_M = 687\text{ jours}$

III.A Etude préliminaire

III.A.1 Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle ainsi que son unité dans le système international.

Réponse :
On sait que $F_g = \mathcal{G} \frac{m_a m_b}{r_{ab}^2}$ d’où par analyse dimensionnelle

$$M.L.T^{-2} = [\mathcal{G}] \frac{M^2}{L^2} \Rightarrow [\mathcal{G}] = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

L’unité associée est le $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O , centre du Soleil, d’un objet de masse m est une constante du mouvement.

Réponse :
La seule force à considerer est la force de gravitation $\vec{F}_g$ exercée par le soleil sur l’objet de masse m . Cette dernière s’exprime donc selon le vecteur $\vec{OM}$ donc en en déduit que $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$.
L’application du Théorème du Moment Cinétique (TMC) à l’objet de masse m , par rapport à O dans le référentien héliocentrique supposé galiléen donne

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \vec{0}$$

d’où l’on déduit que $\vec{L}_O = \vec{\text{Cste}}$

3. On utilise les coordonnées cylindriques ($O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_0 = L_0 \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_0 et m . Quel est le nom de cette grandeur ?

Réponse :
On a par définition $\vec{L}_O = m \vec{OM} \wedge \vec{v}$ donc $\vec{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{L}_O$, un vecteur fixe. On en déduit alors que M se trouve dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et contenant le point M à l’instant initial.

Pour aller plus loin :
Attention si vous écrivez $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{r^2} \vec{e}_r$ car dans ce cas (3D), le vecteur $\vec{e}_r$ est celui de la base sphérique et non polaire/cylindrique. En effet, ce n’est qu’à la question suivante que l’on montre que le mouvement est plan.

4. Déterminer, dans le cas d’une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l’objet en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

Réponse :
La force exercée par le soleil sur la masse s’exprime selon $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2} \vec{e}_r$ et la masse à pour vecteurs position, vitesse et accélération

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r ; \vec{V} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta ; \vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

On peut alors appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse dans le référentiel héliocentrique

$$m \vec{a} = \vec{F}_g \Rightarrow mR\ddot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2}$$

De plus, on remarque que $R(\dot{\theta})^2 = (R\dot{\theta})^2/R = V^2/R$ d'où en combinant ces résultats

$$\frac{V^2}{R} = \mathcal{G} \frac{M_S}{R^2} \Rightarrow V = \sqrt{\mathcal{G} \frac{M_S}{R}}$$

On peut alors effectuer les applications numériques demandées :

$V_T = 29,8 \text{ km/s} \text{ et } V_M = 24,2 \text{ km/s}$

Pour aller plus loin :

Pour cette question, il ne faut surtout pas commencer par dire que l'on se place en base polaire (ou cylindrique) avec $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ donc $z = 0$, car sinon, on impose un mouvement plan ...pour démontrer que le mouvement est plan !-

III.A.2 Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

5. Dédurre l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de $\mathcal{G}, M_S, R$ et m .

Réponse :

On a par définition $E_c = mV^2/2$ en en combinant avec le résultat précédent

$E_c = \frac{1}{2}m\mathcal{G}\frac{M_S}{R}$

De plus, l'énergie potentielle s'exprime selon $E_p = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{R}$. On en déduit alors l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\mathcal{G}\frac{M_S}{R} - \mathcal{G}\frac{mM_S}{R} = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{2R}$$

Et on retrouve le fait que $E_m = -2E_c$. L'énergie mécanique obtenue est négative, ce qui est typique d'une trajectoire fermée (ici, circulaire).

6. On note T la période de révolution de l'objet. Démontrer alors que l'on obtient (troisième loi de Kepler) :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$$

Réponse :

On a trouvé dans les questions précédentes, une expression constante pour la vitesse. Le mouvement est alors uniforme et dans ce cas, la distance parcourue est liée à la vitesse et à la durée (période T) par $2\pi R = VT$ d'où

$$T = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\mathcal{G}M_S}}$$

Cette relation peut aussi s'ecrite selon

$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$

ce qui correspond bien à la troisième loi de Kepler avec $R = a$, le demi-grand axe de la trajectoire.

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de la trajectoire.

III.B Etude de la trajectoire

III.B.1 Voyage aller Terre - Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

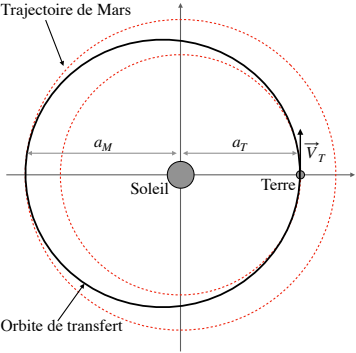


FIGURE III.1 –

7. Reproduire la figure III.1 sur votre copie, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\Theta_T(t = 0) = 0$).

Réponse :

Le schéma précédent à été modifié pour y faire figurer l'orbite elliptique de transfert. C'est la seule ellipse qui recoupe les orbites des deux planètes et dont pour laquelle le soleil occupe l'un de ses foyers.

8. Expliciter le vecteur vitesse $\vec{v}$ du vaisseau, supposé ponctuel, en coordonnées polaires. Montrer alors que l'énergie mécanique du vaisseau sur la trajectoire de transfert peut s'écrire sous la forme $E'_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$ et donner l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$.

Réponse :

En dérivant le vecteur position, on trouve : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Par définition $E'_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_sm}{r}$, avec $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$. Ainsi :

$$E'_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_sm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_sm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$$

où $E_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_sm}{r}$.

9. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que, sur la trajectoire de transfert, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E'_m = -\frac{\mathcal{G}M_sm}{a_M + a_T}.$$

Justifier que le résultat est en accord avec la phrase soulignée dans l'énoncé ci-dessus ?

Réponse :

Sur la trajectoire de Hohmann, on a $\dot{r} = 0$ au périhélie et à l'aphélie, soit pour $r = a_M$ et $r = a_T$. En ces deux points, on a $E'_m = E_{\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_sm}{r}$. Ainsi $\{a_M, a_T\}$ sont les racines de :

$$E'_m r^2 = \frac{mC^2}{2} - \mathcal{G}M_sm r \iff r^2 + \frac{\mathcal{G}M_sm}{E'_m} r - \frac{mC^2}{2E'_m} = 0$$

On peut identifier la somme et le produit des racines : $r^2 - \underbrace{\left(-\frac{\mathcal{G}M_s m}{E'_m}\right)}_{\text{somme des racines}} r + \underbrace{\left(-\frac{mC^2}{2E'_m}\right)}_{\text{produit des racines}} = 0$. Ainsi :

$$a_M + a_T = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{E'_m} \implies \boxed{E'_m = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{a_M + a_T}}$$

Compte tenu du schéma, le grand axe de l'ellipse correspond à $2a = a_M + a_T$. L'expression obtenue correspond bien à l'expression de l'énergie mécanique déterminée dans le cas circulaire où $2R$ a été remplacé par $2a$.

10. *Au départ de l'orbite de la Terre, démontrer que la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert s'exprime selon $V'_T = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}$. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T*

Réponse :

Sur l'orbite de transfert, le grand axe s'exprime par $2a = a_M + a_T$. On peut alors réutiliser les résultats précédents pour l'énergie mécanique :

$$E'_m = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{2a} = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{a_M + a_T}$$

De plus, on niveau du point de départ, il est aussi possible d'exprimer l'énergie potentielle

$$E'_p = E_p = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{a_T}$$

On en déduit l'énergie cinétique E'_c puis la vitesse V' qui doit avoir le vaisseau au départ de son orbite de transfert

$$E'_c = E'_m - E'_p = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{a_M + a_T} + \mathcal{G} \frac{mM_S}{a_T} = \mathcal{G}mM_S \left(\frac{1}{a_T} - \frac{1}{a_T + a_M} \right) = m \times \underbrace{\mathcal{G} \frac{M_S}{a_T}}_{V_T^2} \left(1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T} \right)$$

On peut alors finalement isoler la vitesse $V'_T = \sqrt{2E'_c/m}$ d'où

$$V'_T = V_T \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + a_M/a_T}} = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}}$$

Au passage, on remarque que pour $a_M = a_T$ (cas hypothétique bien sur), on retrouve $V_T = V'_T$ (pas besoin de changement d'orbite), ce qui est rassurant.

On en déduit au final

$$\Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_M + a_T}} - 1 \right) = 2,93 \text{ km/s}$$

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

11. *Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.*

Réponse :

Cette fois ci, on reprend la troisième loi de Kepler, adaptée aux trajectoires elliptiques. On trouve alors pour la période $T' = 2\Delta t$ de l'orbite de transfert

$$\frac{(2\Delta t)^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s} \implies \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2\sqrt{2\mathcal{G}M_S}} (a_T + a_m)^{3/2}}$$

L'application numérique donne alors $\Delta t = 22,3 \times 10^6 \text{ s} = 258 \text{ jours}$.

12. *Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vis du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 .*

Réponse :

On sait d'après les questions précédentes que $\theta_M(\Delta t) = \pi + \theta_T(0)$ (lecture graphique sur le schéma). De plus, l'angle formé par Mars et l'axe des abscisse est donné par $\theta_M(t) = \Omega_M t + \alpha_0$ avec $\Omega_M = 2\pi/T_M$

En effet, α_0 représente bien l'écart angulaire entre Mars et la Terre (donc l'axe des abscisses) à l'instant initial.

On en déduit que

$$\alpha_0 + \Omega_M \Delta t = \pi \implies \boxed{\alpha_0 = \pi - 2\pi \frac{\Delta t}{T_M} = 0,78 \text{ rad} \approx \pi/4}$$

Le lancé du vaisseau doit donc être effectué lorsque la Terre et Mars forment un angle d'environ $\pi/4$ par rapport au soleil.

13. *Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.*

Réponse :

La période de révolution sur l'orbite de transfert est donnée par $T' = 2\Delta t = 516$ jours. Pendant cette durée, la Terre la position angulaire de la Terre va évoluer de $\Delta\theta_T = \theta_T(T') - \theta_T(0) = \Omega_T T' = 2\pi \frac{T'}{T_M} = 2\pi + 2,6 \text{ rad}$.

La Terre va donc parcourir un tour complet plus environ 2,6 rad soit presque un autre demi-tour. On en déduit que la Terre et le vaisseau ne vont pas se croiser. Cette orbite de transfert ne peut donc pas être utilisée pour retourner sur Terre et il faut s'assurer que le vaisseau dispose d'un moyen de propulsion suffisant pour s'insérer sur une autre orbite de retour.

IV Transitoire d'un circuit RLC

On considère le circuit ci contre dans lequel R et C sont choisis de telle sorte que $\frac{L}{R} = RC = \tau$:

L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps et le condensateur est déchargé. A l'instant $t = 0$, on ferme K . On souhaite obtenir les expressions de $u(t)$ et $i(t)$ pour $t > 0$.

IV.A Détermination de l'équation différentielle

IV.A.1 Méthode directe

1. *Déterminer une équation différentielle reliant u_L à u .*

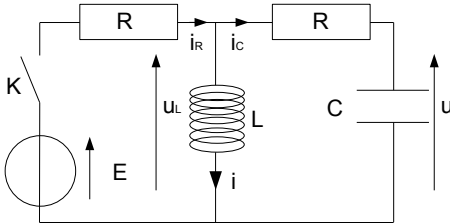
Réponse :

La loi d'additivité des tensions dans la maille de droite donne $u_L = u + Ri_C$ avec $i_C = C \frac{du}{dt}$ d'où

$$u_L = RC \frac{du}{dt} + u$$

Avec $\tau = RC$, il vient finalement

$$u_L = \tau \frac{du}{dt} + u$$



Plus vite on introduit la constante τ , plus la suite des calculs sera simplifiée !

2. Déterminer une équation différentielle reliant i_R à u .

Réponse :
La loi d'additivité des tensions dans la maille de gauche donne $E = Ri_R + u_L$ soit en injectant l'expression de u_L obtenue en question 1 :

$$E = Ri_R + \tau \frac{du}{dt} + u$$

soit finalement

$$i_R = \frac{1}{R} \left(E - \tau \frac{du}{dt} - u \right)$$

3. En utilisant la loi des noeuds donner une relation entre i_R , u_L et u .

Réponse :
La loi des noeuds s'écrit $i_R = i + i_C$. En dérivant cette expression, on obtient

$$\frac{di_R}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{di_C}{dt}$$

Avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i_C = C \frac{du}{dt}$ on obtient

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{u_L}{L} + C \frac{d^2u}{dt^2}$$

soit finalement avec $\tau = \frac{L}{R} = RC$

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{1}{R} \left(\frac{u_L}{\tau} + \tau \frac{d^2u}{dt^2} \right)$$

4. Dédurre des questions précédentes que

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{1}{2\tau^2} u = 0$$

(IV.1)

Réponse :
On injecte les expressions de u_L et i_R en fonction de u dans la relation de la question 3 :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{R} \left(E - \tau \frac{du}{dt} - u \right) \right] = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u + \tau \frac{d^2u}{dt^2} \right)$$

On en déduit

$$2\tau \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{1}{2\tau^2} u = 0$$

IV.A.2 Méthode du régime sinusoïdal forcé

On considère l'interrupteur K fermé et on remplace le générateur de f.e.m. E par un GBF délivrant une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$. Dans toute cette partie, la représentation complexe d'un signal $x(t)$ sera notée $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$ où $\underline{X}$ est appelée l'amplitude complexe du signal $x(t)$.

5. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension $u(t)$ en fonction de $\underline{U}_L$, τ et ω

Réponse :
On observe un pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{1/(jC\omega)}{R + 1/(jC\omega)} \underline{U}_L \Rightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \underline{U}_L$$

6. De même, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}_L$ en fonction de $\underline{E}$, τ et ω en utilisant des associations d'impédances ainsi qu'un pont diviseur de tension. Montrer alors que l'on obtient

$$\underline{U} = \frac{j\omega\tau}{1 + 2j\omega\tau + 2(j\omega\tau)^2} E$$

Réponse :
Il convient de regrouper les trois dipôles de droite (impédance notée Z_{eq}) pour observer un pont diviseur de tension. En effet, sans cela, les deux dipôles (R) et (L) ne sont pas en série en on ne peut pas appliquer le pont diviseur de tension.

On obtient alors

$$\underline{U}_L = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} E = \frac{1}{1 + R/Z_{eq}} E$$

or on a $1/Z_{eq} = 1/(jL\omega) + 1/(R + 1/(jC\omega)) = 1/(jL\omega) + jC\omega/(1 + jRC\omega)$. On en déduit alors que

$$\underline{U}_L = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\tau\omega} + \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}} E$$

Au final, on peut combiner les deux précédents résultats pour obtenir

$$\underline{U} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{j\tau\omega} + \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}} E = \frac{1}{1 + j\omega\tau + \frac{1}{j\omega\tau} + 1 + j\omega\tau} E$$
$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{j\omega\tau}{1 + 2j\omega\tau + 2(j\omega\tau)^2} E$$

d'où le résultat.

On rappelle que la multiplication par $(j\omega)^n$ de la représentation complexe $\underline{x}(t)$ d'un signal $x(t)$ équivaut effectuer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de ce signal.

7. Vérifier à partir des questions précédentes que l'on retrouve bien l'équation différentielle IV.1 dans le cas où $e(t) = E$.

Réponse :
On a

$$\frac{\underline{U}}{E} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{j\omega\tau}{1 + 2j\omega\tau + 2(j\omega\tau)^2}$$

d'où l'on déduit

$$\left(1 + 2j\omega\tau + 2(j\omega\tau)^2\right)\underline{u}(t) = j\omega\tau \underline{e}(t) \Rightarrow u + 2\tau \frac{du}{dt} + 2\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} = \tau \frac{de}{dt}$$

or $e(t) = E$ donc $\frac{de}{dt} = 0$. On obtient finalement sous la forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{1}{2\tau^2} u = 0$$

d'où le résultat.

IV.B Résolution de l'équation différentielle

8. Déterminer la pulsation propre ω_0 et la facteur de qualité Q_0 du circuit. Que peut-on en déduire quant au régime transitoire ? Justifier précisément.

Réponse :
On peut identifier l'équation obtenue avec la forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

On a donc par identification

$$\frac{1}{2\tau^2} = \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

soit

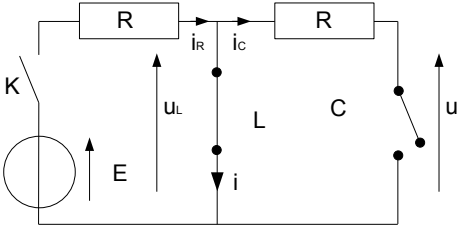
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \quad \text{et} \quad Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On remarque que $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$. Le régime transitoire sera donc de type pseudo-périodique car le discriminant de l'équation caractéristique est négatif.

9. Déterminer $u(0^+)$ et $i(0^+)$. Montrer ensuite que $\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{2\tau}$.

Réponse :

— A $t = 0^-$, l'interrupteur est ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le régime permanent soit atteint. Le circuit est donc équivalent au circuit suivant :



On a donc $i_R(0^-) = 0$ et $i_C(0^-) = 0$ donc d'après la loi des noeuds : $i(0^-) = 0$.
De plus, on a $u_C(0^+) = u_L(0^+) + i_C(0^+)R = u_L(0^+) = 0$.
Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de l'intensité parcourant une bobine, on en déduit $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ et $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$.

— A $t = 0^+$, on a $i_R(0^+) = i_C(0^+) + i(0^+) \Rightarrow i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0$. Ainsi, la loi des mailles dans la grande maille s'écrit :

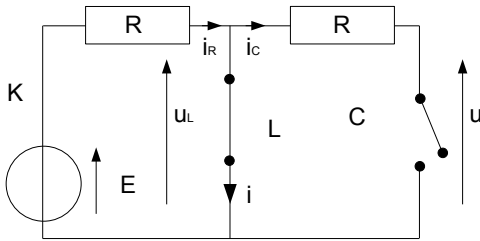
$$E = i_C(0^+)R + i_R(0^+)R = 2i_C(0^+)R \Rightarrow i_C(0^+) = \frac{E}{2R}$$

Or, $i_C(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+)$. Ainsi,

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{2RC} = \frac{E}{2\tau}$$

10. Prévoir les valeur de $u(+\infty)$ et $i(+\infty)$.

Réponse :
Lorsque le régime permanent est atteint, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert :



On a donc $i_C(+\infty) = 0$ et $u_L(+\infty) = 0$. Ainsi, comme $u_L(+\infty) = Ri_C(+\infty) + u(+\infty)$, on en déduit $\boxed{u(+\infty) = 0}$.
De plus, $E = u_L(+\infty) + Ri_R(+\infty) = Ri_R(+\infty)$ d'où $i_R(+\infty) = \frac{E}{R}$, et avec $i_C(+\infty) = 0$ il vient finalement

$$i(+\infty) = \frac{E}{R}$$

11. Déterminer l'expression complète de $u(t)$ pour $t > 0$ (uniquement en fonction de E et τ).

Réponse :
On a $u(t) = u_0(t)$, solution de l'équation homogène, car l'équation n'a pas de second membre.
On résout le polynôme caractéristique $r^2 + \frac{1}{\tau}r + \frac{1}{2\tau^2}u = 0$. Pour cela, on obtient $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - \frac{4}{2\tau^2} = -\frac{1}{\tau^2} < 0$.
On a donc deux racines complexes conjuguées $r = \frac{1}{2\tau} \pm j\frac{1}{2\tau}$ soit

$$r = -\frac{1}{2\tau} \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{1}{2\tau}$$

On a donc l'expression de $u(t)$ suivante :

$$u(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A \cos \frac{1}{2\tau}t + B \sin \frac{1}{2\tau}t \right)$$

Avec A et B , deux constantes à déterminer à l'aide les conditions initiales. Ainsi,

$$u(0^+) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Pour la deuxième CI, il convient de dériver l'expression de $u(t)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{B}{2\tau} \cos \frac{t}{2\tau} e^{-\frac{t}{2\tau}} - \frac{1}{2\tau} B \sin \frac{t}{2\tau} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

On en déduit alors

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{2\tau} \Rightarrow \frac{B}{2\tau} = \frac{E}{2\tau} \Rightarrow B = E$$

On obtient finalement

$$u(t) = E \sin\left(\frac{t}{2\tau}\right) e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

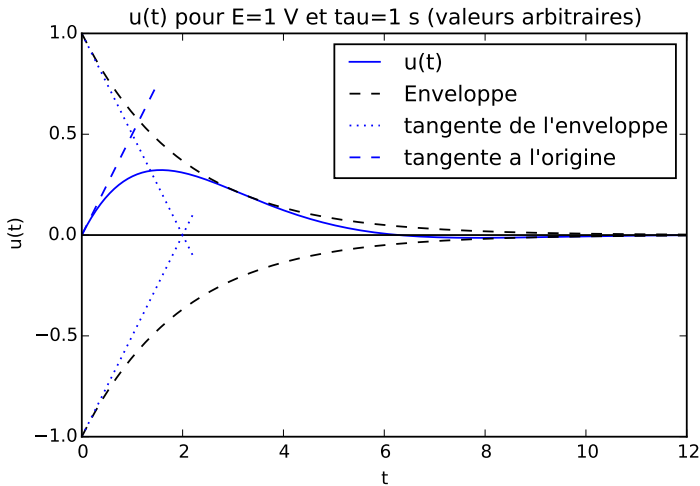
12. Comparer la pseudo-période au temps de relaxation du circuit.

Réponse :

On a $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 4\pi\tau$. De plus, le temps de relaxation du circuit vaut 2τ . On déduit que la pseudo période est plus longue que le temps de relaxation du circuit.

13. Tracer l'allure de $u(t)$. On fera apparaître clairement les particularités de la courbe (tangentes, asymptotes, enveloppe...) et on tiendra compte de la réponse à la question précédente.

Réponse :



Les tangentes à l'enveloppe exponentielle coupent l'axe des abscisses en $t = 2\tau$.
La pseudo-période est $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \times 2\tau \approx 6 \times 2\tau$. La pseudo-période est donc 6 fois plus grande que le temps caractéristique de décroissance de l'enveloppe exponentielle.
Le régime est pseudo-périodique mais proche d'un régime critique. En effet, $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 > 0,5$.
Il y a donc un léger dépassement.

14. On note W_L l'énergie reçue par la bobine et W_C l'énergie reçue par le condensateur. Déterminer W_L et W_C . Commenter.

Réponse :

Par définition, on a $W_L = \Delta E_L = \frac{1}{2} L (i^2(+\infty) - i^2(0^+))$. On en déduit

$$W_L = \frac{1}{2} \frac{L E^2}{R^2}$$

De même

$$W_C = \Delta E_C = \frac{1}{2} C (u^2(+\infty) - u^2(0^+))$$

soit finalement

$$W_C = 0$$

Le condensateur n'a donc pas stocké d'énergie pendant ce régime transitoire, tandis que la bobine en a stocké. Elle pourra donc restituer cette énergie au circuit ultérieurement.

V Cycle de Rankine (CCP MP 2007)

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.
On considère l'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur. Pour différents couples température T et pression saturante p^* de changement d'état, on donne le volume massique v_L et l'enthalpie massique h_L du liquide saturant, le volume massique v_G et l'enthalpie massique h_G de la vapeur saturante. On note $\Delta h_v(T) = h_G(T) - h_L(T)$ l'enthalpie massique de vaporisation à la température T .

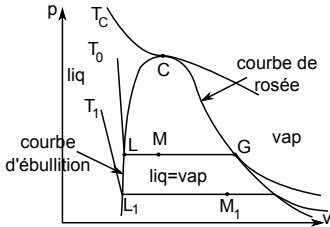
T (°C)	p^* (bar)	Liquide saturant		Vapeur saturante	
		$v_L(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	$h_L(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	$v_G(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	$h_G(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$
36	0,056	$1,00 \cdot 10^{-3}$	146	25,24	2561
50	0,123	$1,01 \cdot 10^{-3}$	209	12,04	2587
100	1,013	$1,04 \cdot 10^{-3}$	418	1,673	2671
185	11,238	$1,13 \cdot 10^{-3}$	784	0,174	2778
285	69,200	$1,35 \cdot 10^{-3}$	1261	0,028	2769

V.A Diagramme de Clapeyron (p, v) du système liquide-vapeur de l'eau

On désigne par p la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

- Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron (p, v) de l'eau. Placer la courbe de rosée, la courbe d'ébullition, la position du point critique C , et les différents domaines.

Réponse :



2. Sur le diagramme précédent, représenter l'isotherme à la température critique T_C et une isotherme à la température $T_0 < T_C$. Sur cette isotherme, placer le point L correspondant au liquide saturant et le point G correspondant à la vapeur saturante.

Réponse :
cf question précédente

3. Soit un point M appartenant au palier de changement d'état de l'isotherme T_0 . On note v_M le volume massique et h_M l'enthalpie massique en ce point. Exprimer le titre massique en vapeur x au point M en fonction de v_M , v_L et v_G . On ne démontrera pas cette expression.

Réponse :
Par le théorème des moments :

$$x = \frac{v_M - v_L}{v_G - v_L}$$

4. Montrer que le titre massique en vapeur x peut aussi s'exprimer à partir des enthalpies massiques comme

$$x = \frac{h_M - h_L}{h_G - h_L}$$

Réponse :
L'enthalpie est une fonction extensive, donc l'enthalpie du système en M est la somme de l'enthalpie de la phase liquide et de la phase vapeur : $H_M = H_L + H_G$
La masse de vapeur est $m_G = xm$ et celle de liquide est $m_L = (1 - x)m$.

$$mh_M = (1 - x)mh_L + xmh_G \quad \text{soit}$$

$$x = \frac{h_M - h_L}{h_G - h_L}$$

On dispose d'un cylindre indéformable muni d'un piston. Le cylindre et le piston ont des parois calorifugées. Le piston est, initialement, fixé dans une position qui délimite un volume $V = 10\text{ L}$ dans le cylindre. L'introduction d'une masse $m = 10\text{ g}$ d'eau dans le cylindre permet d'obtenir un système liquide-vapeur en équilibre à la température $T_0 = 100\text{ °C}$.

5. Calculer le titre massique en vapeur x_0 de ce système.

Réponse :
Le système est à l'équilibre liquide-vapeur à la température $T_0 = 100\text{ °C}$ et à la pression $p^* = 1,013\text{ bar}$. D'après le tableau $v_L = 1,04 \times 10^{-3}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_G = 1,673\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.
On calcule le volume massique du mélange : $v_M = V/m = 1\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

On en déduit le titre massique à l'aide du théorème des moments :

$$x_0 = \frac{v_M - v_L}{v_G - v_L} = 0,60$$

On fait subir au système liquide-vapeur défini ci-dessus une détente adiabatique réversible de la température $T_0 = 100\text{ °C}$ à la température $T_1 = 50\text{ °C}$. On note $c_L = 4,18\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique du liquide saturant, que l'on suppose constante au cours de cette détente.

6. Sur le diagramme de Clapeyron précédent, placer l'isotherme T_1 . Placer le point L_1 correspondant au liquide saturant à la température T_1 , et le point M_1 correspondant au mélange liquide-vapeur à la température T_1 , caractérisé par le titre en vapeur x_1 (non connu).

Réponse :
cf. diagramme de Clapeyron

7. On note $\Delta s_1^{(1)}$ la variation d'entropie massique entre un état d'équilibre initial caractérisé par le point M et un état d'équilibre final caractérisé par le point L (liquide saturant à la température T_0). Donner le nom de la transition de phase étudiée et exprimer la masse d'eau subissant la transformation en fonction de x_0 et m . En déduire l'expression de $\Delta s_1^{(1)}$ en fonction de x_0 , T_0 et $\Delta h_v(T_0)$.

Réponse :
La transformation considérée est la liquéfaction d'une masse x_0m à la température T_0 :

$$\Delta s_1^{(1)} = - \frac{x_0 \Delta h_v(T_0)}{T_0}$$

8. On note $\Delta s_1^{(2)}$ la variation d'entropie massique entre un état d'équilibre initial caractérisé par le point L (liquide saturant à la température T_0) et un état d'équilibre final caractérisé par le point L_1 (liquide saturant à la température T_1). Exprimer $\Delta s_1^{(2)}$ en fonction de c_L , T_0 et T_1 .
On rappelle que la variation d'entropie massique d'une phase condensée incompressible et indilatable de capacité thermique massique c s'exprime $\Delta s = s(T_f) - s(T_i) = c \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$.

Réponse :
On suppose que le liquide saturant est une phase incompressible. On utilise l'entropie d'une phase condensée incompressible et indilatable.

$$\Delta s_1^{(2)} = c_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

9. Enfin, on note Δs_1 la variation d'entropie massique entre l'état d'équilibre initial caractérisé par le point M et l'état d'équilibre final caractérisé par le point M_1 . À l'aide des expressions de $\Delta s_1^{(1)}$ et $\Delta s_1^{(2)}$, exprimer Δs_1 en fonction de c_L , x_0 , x_1 , $\Delta h_v(T_0)$, $\Delta h_v(T_1)$, T_0 et T_1 .

Réponse :
L'entropie étant une fonction d'état, sa variation entre deux états d'équilibre ne dépend pas de la transformation effectuée. On imagine alors une transformation allant de M à M_1 en passant par L et L_1 .

$$\{mx_0\}_{vap} \xrightarrow{T_0, \Delta s_1^{(1)}} \{mx_0\}_{liq} \quad ; \quad \{m, T_0\}_{liq} \xrightarrow{\Delta s_1^{(2)}} \{m, T_1\}_{liq} \quad ; \quad \{mx_1\}_{liq} \xrightarrow{T_1, \Delta s_{13}} \{mx_1\}_{vap}$$

$$\Delta s_1 = \Delta s_1^{(1)} + \Delta s_1^{(2)} + \Delta s_{13} = - \frac{x_0 \Delta h_v(T_0)}{T_0} + c_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) + \frac{x_1 \Delta h_v(T_1)}{T_1}$$

10. En déduire l'expression du titre massique x_1 du système liquide-vapeur à la fin de la détente. Calculer x_1 .

Réponse :
La masse m subit une détente adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. Donc $\Delta s_1 = 0$. On en déduit x_1 :

$$x_1 = \frac{T_1}{\Delta h_v(T_1)} \left[x_0 \frac{\Delta h_v(T_0)}{T_0} - c_L \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) \right] = 0,57$$

V.B Cycle de Rankine

Le circuit secondaire d’une centrale nucléaire comporte les éléments suivants : un générateur de vapeur, une turbine, un condenseur et une pompe d’alimentation (Figure V.1). Les transformations subies par une masse $m = 1\text{ kg}$ d’eau dans ce circuit sont modélisées par le cycle de Rankine décrit par :

- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible, dans la pompe d’alimentation, de la pression $p_2 = 0,056\text{ bar}$ à la pression $p_3 = 69,200\text{ bar}$, du liquide saturant sortant du condenseur à la pression p_2 (état A). On note T_2 la température au point A.
- On suppose que cette transformation n’entraîne pas de variation de température
- $B \rightarrow D$: échauffement isobare du liquide dans le générateur de vapeur qui amène le liquide de l’état B à l’état de liquide saturant sous la pression p_3 (état D). On note T_3 la température au point D.
- $D \rightarrow E$: vaporisation totale, dans le générateur de vapeur, sous la pression p_3 .
- $E \rightarrow F$: détente adiabatique réversible, dans la turbine, de p_3 à p_2 . Le titre massique en vapeur au point F vaut $x_F = 0,66$.
- $F \rightarrow A$: liquéfaction totale, dans le condenseur, sous la pression p_2 , de la vapeur présente dans l’état F.

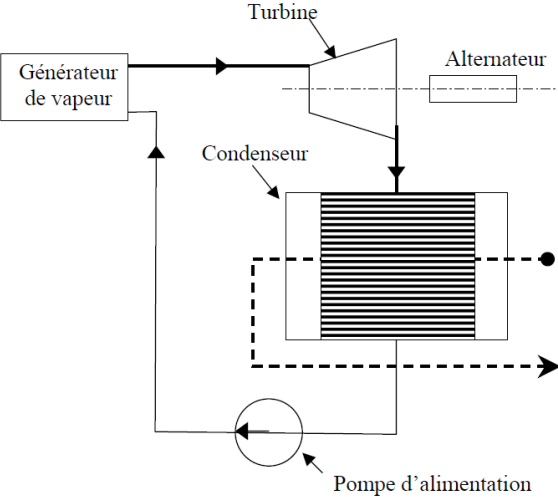
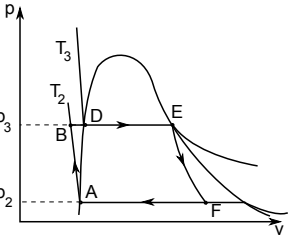


FIGURE V.1 – Machine à vapeur

11. Tracer de nouveau un diagramme de Clapeyron (suffisamment grand) avec la courbe de saturation et les deux isothermes à T_2 et $T_3 > T_2$. Superposer le cycle décrit par l’eau dans ce diagramme.

Réponse :



12. En exploitant les données regroupées dans le tableau en début d’énoncé, exprimer puis calculer les quantités d’énergie Q_1 et Q_2 reçues par la masse m d’eau, par transfert thermique, respectivement, dans le condenseur et dans le générateur de vapeur. Les expressions feront intervenir la masse m , la capacité thermique massique de l’eau liquide c_L , les températures T_2 et T_3 , le titre massique x_F , et les enthalpies massiques de vaporisation $\Delta h_v(T_2)$ et $\Delta h_v(T_3)$.

Réponse :
Dans le condenseur, on liquéfie une masse mx_F à la température T_2 (étape entre F et A) :

$$Q_1 = \Delta H_{FA} = -mx_F \Delta h_v(T_2) = -1590\text{ kJ}$$

Dans le générateur de vapeur, on chauffe une masse m de phase condensée à la pression $p_3 = cste$, puis on vaporise une masse m à la température T_3 :

$$Q_2 = \Delta H_{BD} + \Delta H_{DE} = mc_L(T_3 - T_2) + m\Delta h_v(T_3) = 2550\text{ kJ}$$

13. Calculer le travail W reçu, par la masse m de fluide, au cours du cycle.

Réponse :
On applique le premier principe au cours d’un cycle :

$$\Delta U = 0 = Q_1 + Q_2 + W = 0$$

Pour les transformations AB et EF , il n’y a pas de transfert thermique car ce sont des transformations adiabatiques.

On en déduit le travail : $W = -(Q_1 + Q_2) = -960\text{ kJ} < 0$

Le système est bien un moteur.

14. Définir, puis calculer, le rendement η du cycle.

Réponse :
Le transfert thermique avec la source chaude correspond à $Q_2 > 0$. On définit le rendement :

$$\eta = -\frac{W}{Q_2} = 0,38$$

15. Calculer le rendement η_c de Carnot pour une machine fonctionnant entre les températures T_2 et T_3 . Comparer η et η_c .

Réponse :
Par définition du rendement de Carnot :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 0,45$$

On a $\eta < \eta_c$, ce qui est normal car le rendement de Carnot est le rendement maximal que l'on obtiendrait si on effectuait des cycles réversibles.

16. Dans le calcul du bilan enthalpique du fluide au cours du cycle, on peut négliger la variation d'enthalpie Δh_{AB} . Montrer, alors, que le travail W peut s'exprimer en fonction des enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la turbine, h_E et h_F .

Réponse :
On utilise l'expression du travail en fonction des transferts thermiques :

$$W = -Q_1 - Q_2 = -(H_A - H_F) - (H_E - H_B) = m(h_B - h_A + h_F - h_E)$$

Comme Δh_{AB} est négligeable, on en déduit : $W = m(h_F - h_E)$ où h_F est l'enthalpie massique du fluide à la sortie de la turbine et h_E celle à l'entrée.