

I Questions de cours

1. On considère un gaz parfait ; Démontrez les relations reliant C_v et C_p à R , la constante des gaz parfait, n , la quantité de matière et γ , le coefficient adiabatique (La relation de Mayer devra aussi être redémontrée)

Réponse :
Vu en cours

2. On considère une détente quasi-statique et isotherme (température T) de n mol de gaz parfait, entre le volume initial V_i et le volume $V_f > V_i$. Démontrez rigoureusement que

$$W = -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Réponse :
Vu en cours

3. (a) On rappelle que $PV^\gamma = \text{Cste}$ pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait. En déduire la loi de Laplace pour les variables V et T .

Réponse :
Vu en cours

- (b) La variation d'entropie d'un gaz parfait entre deux états d'équilibre est donnée par :

$$S(T_f, P_f) - S(T_i, P_i) = nC_{p,m} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

Démontrez une relation similaire reliant la variation d'entropie aux variables P et V à partir de cette dernière.

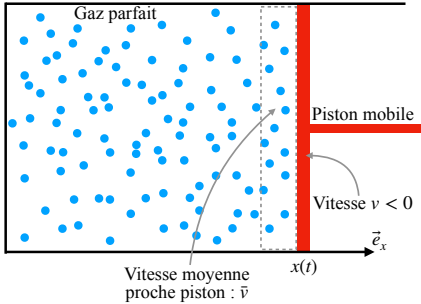
Réponse :

4. On dispose de deux solides identiques, de capacité thermique C et de températures initiales T_1 et T_2 . Ces derniers sont ensuite mis en contact et on attend l'équilibre thermodynamique. Exprimez la température finale T_f prise par les deux solides en fonction des données du problème.

Réponse :
Vu en cours

II Compression adiabatique non réversible

On considère un gaz monoatomique, supposé parfait, de coefficient adiabatique $\gamma = 5/3$ et de densité atomique $n^* = N/V$ à la température initiale $T_i = 300$ K. Ce dernier est placé dans une enceinte parfaitement calorifugée à l'intérieur de laquelle un piston de section S peut se déplacer à la vitesse négative v .
En cours de compression, le gaz à proximité du piston possède une vitesse quadratique moyenne, liée à l'agitation thermique, notée v^* et une vitesse horizontale moyenne non nulle liée à l'entraînement par le piston, notée $\bar{v}$.



L'objectif de ce problème consiste à étudier l'impact de la vitesse du piston sur la compression du gaz occupant initialement un volume $2V_0$ vers un volume deux fois plus petit, V_0 . Dans toute la suite, on se place dans le référentiel lié au piston, supposé galiléen en cours de compression, et on note $\vec{u} = u \vec{e}_x$ la vitesse relative du sixième des atomes qui se dirigent vers le piston :

- En cas de piston quasi-statique, on a tout simplement $u = v^*$.
- En cas de piston en mouvement, on a $u = v^* + \bar{v} - v$.

Les cinq sixièmes des atomes restants se dirigent dans d'autres sens/directions et ne vont pas interagir avec le piston. Les principales grandeurs utilisées dans ce problème sont répertoriées dans le tableau suivant :

k_B	N	V_0	σ	γ
$1,38 \times 10^{-23}$ J/K		(m^3)	(m^2)	5/3
Constante de Boltzmann	Nombre d'atomes	Volume final	Section du piston	Coefficient adiabatique
v^*	n^*	T_i	m	
(m/s)	(m^{-3})	300 K	$3,34 \times 10^{-26}$ kg	
Vitesse quadratique moyenne	Densité d'atomes	Température initiale	Masse d'un atome de néon	

Variation de l'entropie lors de la transformation d'un gaz parfait :

$$\Delta S = C_p \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + C_v \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

II.A Force exercée par le gaz sur le piston

1. Exprimer dN , le nombre d'atomes susceptibles d'entrer en collision avec le piston pendant la durée dt en fonction de n^* , σ , u et dt .

Réponse :

Les atomes considérés sont placés dans un pavé de section σ et de profondeur $dl = udt$. En prenant en compte que seul un sixième des atomes se déplacent vers le piston, on obtient :

$$dN = \frac{n^*}{6} \sigma u dt$$

2. Exprimer ensuite la variation de quantité de mouvement $d\vec{P}_{\text{tot}}$ de l'ensemble des atomes qui rebondissent sur le piston entre les instants t et $t + dt$. On supposera pour cela que le rebond est élastique dans le référentiel du piston, c'est-à-dire que l'énergie cinétique d'un atome, de masse m , n'est pas modifiée lors de l'interaction.

Réponse :
Pour un atome, on observe que la vitesse passe de $u\vec{e}_x$ avant impact à $-u\vec{e}_x$ après. On en déduit pour l'ensemble :

$$d\vec{P}_{\text{tot}} = -2mudN\vec{e}_x = -\frac{1}{3}mn^*u^2\sigma dt$$

3. Dédurre de ce qui précède que la force $\vec{F}$ exercée par le gaz sur le piston peut s'écrire selon $\vec{F} = \frac{1}{3}mn^*\sigma u^2\vec{e}_x$.

Réponse :
La dérivée de la quantité de mouvement est liée à la force exercée par le piston sur le gaz. D'après la troisième loi de Newton, la force exercée par le gaz sur le piston en est l'opposée d'où le résultat attendu.

$$\vec{F} = \frac{1}{3}mn^*\sigma u^2\vec{e}_x$$

Cette force peut se décomposer en deux termes : $\vec{F} = P\sigma\vec{e}_x + \vec{f}$ avec P , la pression quasi-statique, qui ne dépend pas de la vitesse du piston v ni de celle du gaz $\bar{v}$ et $\vec{f}$, une force de type frottement fluide, qui dépend de ces vitesses. On se propose dans la suite d'étudier l'impact de ces deux contributions lors d'une compression adiabatique.

II.B Cas réversible

Dans cette partie uniquement, on s'intéresse au cas d'une compression quasi-statique, toujours avec des parois et un piston calorifugés pour laquelle les lois de Laplace s'appliquent d'où par exemple, $TV^{\gamma-1} = \text{Cste}$.

4. Sachant que pour un gaz mono-atomique, $E_c = \frac{3}{2}k_B T$ avec k_B la constante de Boltzmann, T la température et E_c l'énergie cinétique moyenne d'un atome, retrouver l'équation d'état d'un gaz parfait en notant P la pression dans le cas réversible

Réponse :
On obtient $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T$ d'où en combinant avec le résultat précédent,

$$P = n^*k_B T \Rightarrow PV = Nk_B T$$

5. Exprimer les capacités thermiques C_p et C_v en fonction de N , k_B et γ .

Réponse :
La relation de Mayer indique $C_p - C_v = nR = Nk_B$ puis la définition de γ donne $C_p = \gamma C_v$. En combinant ces résultats, on obtient

$$C_v = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{\gamma Nk_B}{\gamma - 1}$$

6. Que vaut transfert thermique ? Démontrer ensuite que la température finale T_f s'exprime selon $T_f = T_i 2^{\gamma-1}$ et en déduire le travail $W_{\text{rév}}$ reçu par le gaz, lors de la compression allant du volume initial $2V_0$ vers le volume final V_0 .

Réponse :
La transformation étant adiabatique, on a tout simplement $Q = 0$; Pour calculer le travail, il est alors plus

simple de passer par le premier principe, en effet $\Delta U = W_{\text{rév}} + Q = W \Rightarrow W = C_v \Delta T$. La variation de température peut se retrouver par application d'une des lois de Laplace : $TV^{\gamma-1} = \text{Cste}$ d'où l'on déduit que $T_f = T_i 2^{\gamma-1}$

$$W_{\text{rév}} = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} T_i (2^{\gamma-1} - 1)$$

7. Adapter ensuite la formule pour la variation d'entropie aux variables T et V . Il conviendra de simplifier l'expression obtenue au maximum.

Réponse :

$$\Delta S = C_p \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + C_v \ln \left(\frac{T_f V_i}{T_i V_f} \right)$$
$$\Rightarrow \Delta S = Nk_B \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

8. Finalement, exprimer la variation d'entropie ΔS à l'aide de la formule précédente puis vérifier à posteriori que la transformation est bien réversible.

Réponse :
Connaissant les expressions de $V_f = V_0$, $V_i = 2V_0$ et $T_f = T_i 2^{\gamma-1}$, on obtient :

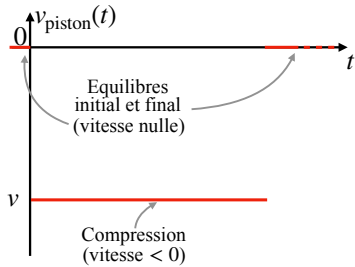
$$\Delta S = -Nk_B \ln(2) + \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln \left(2^{\gamma-1} \right) = -Nk_B \ln(2) + Nk_B \ln(2) = 0$$

De plus, le second principe indique $\Delta S = S_e + S_c = S_c$, car il n'y a pas d'entropie échangée (transformation adiabatique). Ainsi, on obtient bien au final $S_c = 0$ ce qui confirme que la transformation est bien réversible ; ouf !

II.C Cas non réversible

On considère à présent le cas du piston en mouvement à vitesse modérée, c'est-à-dire inférieure en norme à 50 m/s. Une modélisation issue de la mécanique des fluides et appliquée au gaz permet d'obtenir que $\bar{v} - v = -kv$ avec $0 < k \ll 1$, une constante qui dépend uniquement des caractéristiques géométriques et atomes et de l'enceinte.

On conserve des états d'équilibre thermodynamique aux instants initial et final, car le piston y est arrêté. Ce dernier est uniquement en mouvement lors de la compression comme l'indique la courbe de vitesse de la figure ci-contre.



9. Application numérique. Pour un gaz de néon, calculer à température initiale T_i la vitesse quadratique moyenne des atomes. Justifier alors que $|\bar{v} - v| \ll v^*$, y compris en cours de compression.

Réponse :
On obtient $v^* \approx 610 \text{ m/s}$. De plus, d'après l'énoncé, on a dans le pire des cas $|\bar{v} - v| = |kv| \ll v \approx 50 \text{ m/s} \ll 600 \text{ m/s} = v^*$ d'où le résultat. Une fois la compression débutée, T augmente et donc v^* aussi donc l'inégalité large sera encore mieux respectée.

10. En déduire, à l'aide d'un développement limité, que $\vec{f} \approx -2k\sigma P \times \frac{v}{v^*} \vec{e}_x$. Justifier alors que l'on puisse parler de force de type frottement fluide.

Réponse :
On obtient :

$$F = \frac{1}{3} m \sigma n^* (v^* + \bar{v} - v)^2 = PS \times \left(1 - \frac{kv}{v^*}\right)^2$$
$$\Rightarrow F \approx P\sigma \left(1 - 2\frac{kv}{v^*}\right)$$

On retranche alors la contribution quasi-statique $P\sigma$ à la force totale pour obtenir :

$$f = F - PS = -2P\sigma \frac{kv}{v^*}$$

d'où le résultat. Cette force peut s'exprimer selon $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ avec $\lambda > 0$ d'où le lien avec une force de frottement fluide.

Le terme de pression P ne dépendant pas de la vitesse, on suppose, en première approximation, que son travail est inchangé¹ par rapport au cas réversible. La prise en compte de la force de frottement mène alors à un travail reçu par le gaz, lors de la compression à vitesse constante qui s'exprime selon

$$W = W_{\text{rév}} \times \left(1 - \frac{2kv}{v^*}\right)$$

avec $W_{\text{rév}}$ le travail obtenu dans le cas réversible à la question 6.

11. En déduire l'expression de la nouvelle température finale T_f' du gaz lors la compression non quasi-statique en fonction de T_f , k , v , v^* et γ où T_f est la température obtenue en fin de compression réversible. Il conviendra pour cela d'utiliser astucieusement les résultats établis à la question 6.

Réponse :
Le transfert thermique étant toujours nul, on déduit du premier principe $\Delta U = W = C_v \Delta T'$ d'où à l'aide des résultats précédents :

$$\Delta T' = \underbrace{\frac{1}{C_v} W_{\text{rév}}}_{\Delta T} \times \left(1 - \frac{2kv}{v^*}\right)$$
$$\Rightarrow T_f' - T_i = \Delta T \left(1 - \frac{2kv}{v^*}\right)$$
$$\Rightarrow T_f' = T_f \left(1 - 2\frac{kv}{v^*} \left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right)\right)$$

1. En pratique, ce n'est pas rigoureusement le cas ; la température n'évolue pas tout à fait de la même manière pour les détentes réversibles ou non, et comme P dépend aussi de T lors d'une compression, il y aura un léger changement, que l'on choisit de négliger ici pour simplifier.

12. Montrer alors que la nouvelle variation d'entropie $\Delta S'$ peut s'écrire selon :

$$\Delta S' \approx \frac{2Nk_B}{\gamma - 1} \times \frac{kv}{v^*} \left(\frac{1}{2^{\gamma-1}} - 1\right)$$

On pourra pour cela utiliser un développement limité à l'ordre un pour la fonction $\varepsilon \mapsto \ln(1 + \varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \ll 1$. En déduire pour conclure, que la compression est bien irréversible.

Réponse :
Connaissant les expressions de $V_f = V_0$, $V_i = 2V_0$ et $T_f = T_i 2^{\gamma-1}$, on obtient :

$$\Delta S' = -Nk_B \ln(2) + \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f'}{T_i}\right) = \underbrace{-Nk_B \ln(2) + \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)}_{=0} + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(1 - 2\frac{kv}{v^*} \left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right)\right)$$

Or à faible vitesse, un développement limité donne le résultat attendu :

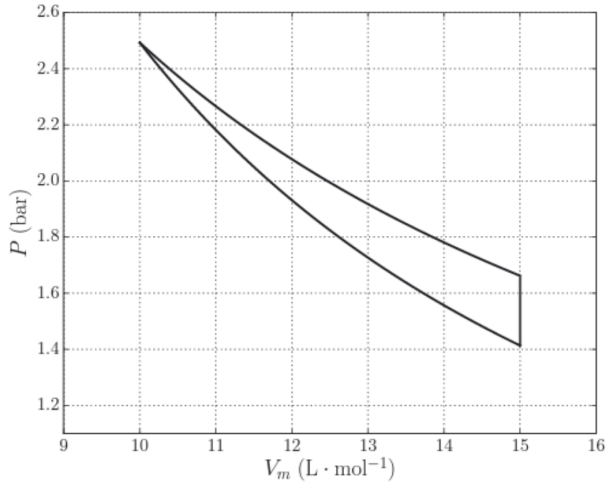
$$\Delta S' \approx \frac{2Nk_B}{\gamma - 1} \times \frac{kv}{v^*} \left(\frac{1}{2^{\gamma-1}} - 1\right)$$

De plus, et comme dans la partie précédente, on a d'après le second principe, et pour une transformation adiabatique, $\Delta S' = 0 + S'_c$ or ici, la vitesse du piston est négative (compression) donc l'entropie créée est bien strictement positive et la transformation est irréversible. On observe de plus que l'irréversibilité est d'autant plus grande que la vitesse du piston est importante.

III Adiabatique vs isotherme

Une mole d'un gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma > 1$ subit un cycle de transformation représenté sur le diagramme ci-dessous : partant de l'état (1) de pression $P_1 = 2,5$ bar, un détente isotherme réversible l'amène à l'état (2), elle subit ensuite une évolution isochore l'amenant dans l'état (3), puis retourne dans l'état (1) par une compression adiabatique réversible.

La seconde transformation (2) $\rightarrow$ (3) a lieu en contact thermique avec un thermostat à la température $T_e = 200$ K.



On rappelle que pour un gaz parfait, la variation d'entropie entre deux états d'équilibre est donnée par

$$S_m(T_f, P_f) - S_m(T_i, P_i) = C_{p,m} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - R \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

1. En utilisant la loi des gaz parfaits ainsi que la loi de Laplace, justifier que, dans le diagramme de Clapeyron, la pente d'une transformation abiabatique-réversible soit supérieur (en valeur absolue) à celle d'une transformation isotherme.

Réponse :

- Transformation adiabatique-réversible, d'après la loi de Laplace : $P = \frac{cst}{V^\gamma}$.
 - Transformation isotherme, d'après la loi des gaz parfaits : $P = \frac{cst}{V}$.
- Puisque $\gamma > 1$, la pente correspondant à la transformation adiabatique-réversible est plus importante que celle de la transformation isotherme.

2. En justifiant soigneusement, placer les points (1), (2), (3) sur le diagramme.

Réponse :

- (1) $\rightarrow$ (2) Détente isotherme : V augmente, P diminue comme $P = \frac{cste}{V}$
- (2) $\rightarrow$ (3) transformation isochore : V constant
- (3) $\rightarrow$ (1) compression adiabatique réversible : V diminue, P augmente comme $P = \frac{cste}{V^\gamma}$
- En (1) : la pente de la tangente à la courbe de la transformation adiabatique réversible est supérieure à celle à la courbe de la transformation isotherme.

- $W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV$, ainsi $W_{12} = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$,
soit $W_{12} = -P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = 1,0 \times 10^3 \text{ J} > 0$
- Transformation isochore : $W_{23} = 0$.
- premier principe sur (3) $\rightarrow$ (1) : $W_{31} = \Delta U_{31}$.

(c) *Le transfert thermique reçus Q_{ij} par le gaz.*

Réponse :

On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz au cours des transformations (1) $\rightarrow$ (2) et (2) $\rightarrow$ (3) :

- $\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12}$, soit $Q_{12} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$
- $Q_{23} = \Delta U_{23} = nC_{Vm}(T_3 - T_2)$.
- Transformation adiabatique : $Q_{31} = 0$

(d) *La variation d'entropie ΔS_{ij} du gaz.*

Réponse :

- Le second principe indique $\Delta S_{12} = S_e + S_c$ or la compression est réversible. De plus, $S_e = Q_{12}/T$ avec $T = P_1 V_{1,m}/R \approx 300 \text{ K}$. On en déduit $\Delta S_{12} \approx 3,3 \text{ J/K}$
- $\Delta S_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{P_3}{P_2} \right) = -3,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
- d'après le deuxième principe de la thermodynamique : $\Delta S_{31} = 0$ (adiabatique : $S_{\text{éch}} = 0$ et réversible : $S_{\text{créée}} = 0$)

On remarque au passage, que l'on retrouve bien $\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0$ ce qui est attendu sur un cycle. On aurait pu utiliser ce résultat pour retrouver l'un des deux termes non nuls

5. *Finalement, et toujours pour chacune des transformations, faire un bilan entropique, et calculer l'entropie créée. Identifier si nécessaire les causes d'irréversibilité.*

Réponse :

- Transformation (1) $\rightarrow$ (2) : L'énoncé l'indique comme réversible.
- Transformation (2) $\rightarrow$ (3)
 - Entropie échangée : $S_{\text{éch},23} = \frac{Q_{23}}{T_e} = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{(\gamma - 1) T_e}$
 - Le 2^e principe donne accès à $S_{\text{créée},23} = \Delta S_{23} - S_{\text{éch},23} > 0$. Cette transformation est irréversible.
- Transformation (3) $\rightarrow$ (1)
 - Transformation adiabatique : $S_{\text{éch},31} = 0$
 - et réversible : $S_{\text{créée},31} = 0$

Ainsi sur le cycle entier : $S_{\text{créée}} = S_{\text{créée},12} + S_{\text{créée},23} + S_{\text{créée},31} = S_{\text{créée},23} > 0$

Le cycle n'est pas réversible. En effet, bien que les transformations 1 $\rightarrow$ 2 et 3 $\rightarrow$ 1 le soient, la transformation 2 $\rightarrow$ 3 ne l'est pas car le système réalise un transfert thermique avec le milieu extérieur de température différente de la température du système. L'inhomogénéité de température entre le système et le milieu extérieur sur 23 est la source de l'irréversibilité.

IV Vers une transformation réversible

On place une masse $m = 100\text{ g}$ d’huile dans un récipient rigide à la température initiale $T_i = 300\text{ K}$ et on souhaite élever cette température jusqu’à $T_f = 400\text{ K}$. On dispose pour cela d’un thermostat dont la température peut être réglée précisément et qui peut être placé au contact du récipient. Dans tout l’exercice, on négligera la capacité thermique du récipient (il est infiniment fin) par rapport à celle de l’huile. On note $c_h = 2,00\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ la capacité calorifique massique de l’huile et on supposera que cette dernière restera sous forme liquide tout au long de l’expérience. On rappelle l’expression de la variation d’entropie d’une phase condensée de masse m et de capacité thermique massique c :

$$S(T_f) - S(T_i) = mc \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

IV.A Transformation directe

On se propose premièrement de choisir la température T_f pour le thermostat et d’attendre que l’huile atteigne un nouvel équilibre thermodynamique. On supposera dans toute la suite de l’exercice que l’équilibre thermodynamique est atteint au bout d’un temps τ qui ne dépend ni de T_i , ni de T_f .

1. Montrer que l’entropie créée (notée $S_{c,1}$) au cours de cette transformation pour l’huile s’exprime selon :

$$S_{c,1} = mc_h \left(\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - 1 + \frac{T_i}{T_f} \right)$$

Réponse :

Une fois l’équilibre établi, l’huile va atteindre la température imposée par le thermostat (T_f). On applique le second principe à l’huile : $\Delta S = Q/T_f + S_c$. On a de plus d’après le premier principe $\Delta U = Q + \underbrace{W}_{=0} \Rightarrow Q =$

$$\Delta U = mc_h(T_f - T_i).$$

Soit $\Delta S = mc_h \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$ pour une phase condensée.

En combinant ces résultats, on obtient :

$$S_{c,1} = mc_h \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - mc_h \frac{T_f - T_i}{T_f} = mc_h \left(\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - 1 + \frac{T_i}{T_f} \right)$$

2. Montrer à partir du résultat obtenu que l’on a bien une entropie créée nulle lorsque $T_i = T_f$. Commenter.

Réponse :

Il convient de remplacer T_f par T_i dans l’expression précédente : $S_{c,1} = mc_h (\ln(1) - 1 + 1) = 0$ d’où le résultat. Il est en pratique rassurant de constater que faire passer un liquide d’une température initiale à T_i à une température finale $T_f = T_i$ est une transformation réversible ($S_{c,1} = 0$).

3. Réaliser alors l’application numérique pour $S_{c,1}$ puis justifier physiquement pourquoi l’on obtient un résultat non nul.

Réponse :

L’A.N. donne $S_c \approx 7,53\text{ J.K}^{-1}$. La transformation est irréversible car on effectue un transfert thermique entre deux sources de températures distinctes (T_f pour le thermostat et T_i pour l’huile à l’instant initial).

4. Démontrer que dans le cas général, on a bien $S_{c,1} \geq 0$ (pour des valeurs quelconques de T_i et T_f). Il pourra être judicieux d’exprimer $S_{c,1}$ en fonction de m , c_h et $x = T_f/T_i$ pour aboutir au résultat attendu.

Réponse :

On obtient ainsi $S_{c,1} = mc_h \left(\ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \right)$ et on cherche à montrer que cette fonction est strictement positive pour tous x différent de 1 ($T_i \neq T_f$).

On peut alors étudier ses variations : $S'_{c,1}(x) = mc_h \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = mc_h \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)$. On en déduit que la fonction qui à x associe $S_{c,1}(x)$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. On a de plus $S_{c,1}(x = 1) = 0$. On en déduit ainsi que $S_{c,1}(x) \geq 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$ donc que l’entropie créée est bien positive quelque soit les températures initiales et finales.

IV.B Transformation en deux étapes

Dans toute la suite de l’exercice, on note $x = T_f/T_i$, le rapport des températures à l’état final et à l’état initial. On cherche à réduire l’entropie créée au cours de cette transformation. On se propose pour cela d’effectuer deux étapes distinctes au lieu d’une seule comme dans la partie IV.A.

- Pour la première étape, on règle le thermostat sur $T = \Theta$ (avec $T_i < \Theta < T_f$) puis on attend que l’équilibre thermodynamique s’établisse pour l’huile.
- Pour la seconde étape, on règle le thermostat sur $T = T_f$ puis on attend encore une fois que l’équilibre thermodynamique s’établisse pour l’huile.

5. Montrer que l’entropie créée (notée $S_{c,2}$) au cours de la transformation complète (étape 1 + étape 2) peut se mettre sous la forme :

$$S_{c,2} = mc_h \left(\ln(x) - 2 + \frac{\Theta}{T_f} + \frac{T_i}{\Theta} \right)$$

Réponse :

La formule obtenue à la question 1 peut être réutilisée deux fois (pour $T_i \rightarrow \Theta$ puis pour $\Theta \rightarrow T_f$). En sommant les deux entropies créées, on obtient :

$$\begin{aligned} S_{c,2} &= S_{c,T_i \rightarrow \Theta} + S_{c,\Theta \rightarrow T_f} = mc_h \left(\ln \left(\frac{T_f}{\Theta} \right) - 1 + \frac{\Theta}{T_f} + \ln \left(\frac{\Theta}{T_i} \right) - 1 + \frac{T_i}{\Theta} \right) \\ &= mc_h \left(\ln(x) - 2 + \frac{\Theta}{T_f} + \frac{T_i}{\Theta} \right) \end{aligned}$$

d’où le résultat.

6. Exprimer Θ en fonction de T_i et T_f afin de minimiser l’entropie créée lors des deux étapes. Effectuer ensuite les applications numériques pour θ et $s_{c,2}(\theta)$ puis commenter ce dernier résultat.

Réponse :

On considère la fonction $S_c : \Theta \rightarrow S_c(\Theta)$ pour x fixé. Cette fonction est dérivable sur l’intervalle $]T_i, T_f[$ et possède un extrémum si sa dérivée s’annule donc si

$$\frac{1}{T_i} - \frac{T_f}{\Theta^2} = 0 \Rightarrow \Theta = \sqrt{T_i T_f}$$

L’A.N. donne $\Theta = 346\text{ K}$ puis $S_{c,2} = 200(\ln(4/3) - 2 + \sqrt{3}) = 3,95\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On obtient alors une entropie créée plus faible en ajoutant une étape intermédiaire

7. La transformation en deux étapes est-elle plus longue que celle en une étape ?

Réponse :
La montée en température du liquide est régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ainsi, pour chaque étape, on atteint le régime permanent au bout de quelques τ (disons 3 arbitrairement). Pour une étape, il faudra attendre 3τ tandis que pour deux étapes, il faudra attendre 3τ , puis changer la température du thermostat et ré-attendre 3τ soit au total 6τ . Il faudra donc un temps deux fois plus long pour deux étapes.

IV.C Généralisation dans le cas d’une transformation en n étapes

Passer d’une à deux étapes a permis de réduire l’entropie créée au cours de la transformation. On peut essayer de généraliser cette idée en utilisant n étapes associées à des températures $T_i = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n = T_f$. Comme le suggère le résultat obtenu à la question 6, on se propose d’utiliser une progression géométrique pour les températures T_k telles que $T_{k+1} = \alpha T_k, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, T_0 = T_i$ et $T_n = T_f$.

8. Exprimer α en fonction de $x = T_f/T_i$ et n . Vérifier ensuite que l’on retrouve bien le résultat obtenu dans la partie IV.B à la question 6 pour $n = 2$ en comparant T_1 et Θ .

Réponse :
On a $T_n = \alpha T_{n-1} = \alpha^n T_0 = \alpha^n T_i \Rightarrow \alpha = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)^{1/n} = x^{1/n}$
Pour $n = 2$, on obtient $\alpha = \sqrt{x}$ et on en déduit $T_1 = \sqrt{T_f/T_i} \times T_i = \sqrt{T_i T_f} = \Theta$. On retrouve bien le résultat obtenu à la question 6.

9. Exprimer ensuite l’entropie créée au cours de la transformation complète en fonction de m, c_h, x et n .

Réponse :
Pour chaque étape, on a entre les températures T_k et T_{k+1} :
$$S_{c,k/n} = mc_h \left(\ln \left(\frac{T_{k+1}}{T_k} \right) - 1 + \left(\frac{T_k}{T_{k+1}} \right) \right) = mc_h \left(\ln(\alpha) - 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

On remarque que ce résultat ne dépend pas de k . Il y a autant d’entropie créée lors de chaque étape. L’entropie totale créée s’obtient finalement en sommant la contribution des n étapes :

$$\begin{aligned} S_{c,n} &= \sum_{k=1}^n S_{c,k/n} = mc_h n S_{c,k/n} = mc_h \left(n \frac{\ln(x)}{n} + \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{1/n} - 1 \right) \times n \right) \\ &= mc_h \left(\ln(x) + n \left(\left(\frac{1}{x} \right)^{1/n} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

d’où le résultat.

10. Effectuer l’A.N. de l’entropie créée pour $n = 50$ étapes. A votre avis, quel est l’inconvénient de ce procédé ?

Réponse :
On a $\epsilon = \ln(x)/n \approx 5,75 \times 10^{-3} \ll 1$. On peut donc utiliser l’équivalent de l’entropie créée : $s_{c,50} = 0,166 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Cette valeur est bien inférieure à celles obtenues pour une et deux étapes. En augmentant le nombre d’étapes, on arrive à rendre la transformation réversible.
Malheureusement, chaque étape à la même durée (et cette dernière est indépendante de n), on obtient donc une transformation de plus en plus lente au fur et à mesure que n augmente. On est donc en train de réaliser une transformation quasi-statique au cours de laquelle la température du système est quasiment égale à celle du thermostat à chaque instant.

IV.D Lien avec la transformation quasi-statique

On souhaite maintenant réaliser une transformation entre T_i et T_f de manière quasi-statique en imposant au thermostat une température T variant très lentement de T_i à T_f .

11. Établir l’expression de l’entropie créée au cours de cette dernière transformation puis faire le lien avec les résultats obtenus précédemment. La température de surface variant au cours du temps, on pourra utiliser le premier et le second principe dans leurs versions différentielles :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_c \quad \text{et} \quad mc_h dT = dU = \delta Q + \delta W$$

avec $\Delta S = \int dS, S_c = \int \delta S_c$.

Réponse :
Il convient d’exprimer δQ à l’aide du premier principe puis de l’introduire dans le second principe :

$$dS = \frac{mc_h dT}{T} + \delta S_c \Rightarrow S_c = \Delta S - mc_h \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) = 0$$

On obtient ainsi une transformation réversible. En pratique, le modèle de la transformation quasi-statique peut être associé à la transformation en n étapes décrite dans la partie IV.C. En effet, dans les deux cas, la température du thermostat augmente très lentement et on attend que l’équilibre thermodynamique s’établisse à chaque étape. Cela correspond bien à la définition d’une transformation quasi-statique où chaque état intermédiaire est un état d’équilibre thermodynamique. Il est donc logique de retrouver le même résultat (transformation réversible).