

Physique - Devoir Surveillé 7

Le 21/03/2026

Sujet rouge

Barème approximatif :

- Exercice I : 5 points
- Exercice II : 20 points
- Exercice III : 10 points
- Exercice IV : 22 points
- Soins et rigueur : 3 points

I Tirage de nappe

On considère une nappe, posée sur une table plate et fixée au sol. On considérera ici que la nappe peut glisser sur la table sans frottement. Quatre assiettes sont empilées au centre de la nappe.

Il s'agit d'un problème ouvert. N'hésitez pas à introduire les grandeurs qui vous semblent pertinentes ainsi que leurs valeurs numériques. Vos idées devront être rédigées et justifiées avec soin pour répondre au problème posé.

1. Avec quelle force \vec{F}_t doit-on tirer la nappe afin d'éviter que les assiettes présentes dessus ne tombent ?

Une expression littérale et une application numérique sont attendues.

Réponse :

L'idée générale porte autour du frottement solide exercé par la nappe sur la pile d'assiette. En effet, en absence de glissement (la pile suit la nappe), cette dernière est bornée par $\mu_0 R_N$. Si la nappe est tirée suffisamment vite, il y aura glissement des assiettes par rapport à la nappe, et ces dernières pourront rester "presque" en place.

Condition pour que les assiettes glissent

Bilan des forces pour la pile d'assiette de masse M :

- Le poids $\vec{P} = -Mg \vec{e}_z$
- La réaction normale de la nappe sur la pile $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_z$
- La réaction tangentielle $\vec{R}_T = R_T \vec{e}_x$ avec $|R_T| < \mu_0 |R_N|$

On applique ensuite le PFD à la pile dans le référentiel lié au sol (galiléen) : $M\vec{A} = MA\vec{e}_x = (R_N - Mg)\vec{e}_z + R_T\vec{e}_x$. La projection de cette équation selon l'axe \vec{e}_z donne $R_N = Mg$ puis selon \vec{e}_x : $MA = R_T$ avec \vec{A} , l'accélération de la pile d'assiettes.

Bilan des forces pour la nappe de masse m :

- la force $\vec{F}_t = F_t \vec{e}_x$ exercée par l'opérateur extérieur.
- Le poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$
- La réaction normale de la pile sur la nappe $-\vec{R}_N = -R_N \vec{e}_z = -Mg \vec{e}_z$ (Troisième loi de Newton).
- La réaction tangentielle $-\vec{R}_T = -R_T \vec{e}_x$ (Troisième loi de Newton).
- La réaction normale de la table sur la nappe $\vec{R}_{N,t} = R_{N,t} \vec{e}_z$
- absence de frottement entre la table et la nappe donc pas de réaction tangentielle dans ce cas.

On applique ensuite le PFD à la nappe dans le référentiel lié au sol (galiléen) : $m\vec{a} = ma\vec{e}_x = (-mg - Mg + R_{N,t})\vec{e}_z + (F_t - R_T)\vec{e}_x$. La projection de cette équation selon l'axe \vec{e}_x donne $ma = F_t - R_T$ avec \vec{a} l'accélération de la nappe.

On raisonne alors par l'absurde : Il y a adhérence (non-glissement et dans ce cas $a = A$), tant que $R_T \leq \mu_0 R_N$; ainsi, cette condition équivaut à :

$$R_T = MA = Ma = \frac{M}{m} F_t - R_T \leq \mu_0 R_N \iff F_t \leq \frac{m}{M} (R_T + \mu_0 R_N)$$

Il faut alors se débarrasser de R_T pour conclure. On a d'une part $R_T = MA = Ma$ et d'autre part, en combinant les deux PFD, $(m + M)a = F_t$ d'où $R_T = \frac{M}{M+m} F_t$ et au final :

$$F_t \leq \frac{m}{M} \times \frac{M}{m+M} F_t + \frac{m}{M} \mu_0 Mg \iff F_t \times \frac{m}{m+M} \leq \mu_0 mg \iff F_t \leq \mu_0 (m+M)g$$

Ainsi, pour une force de tirage supérieure à $\mu_0(m+M)g \approx 10\text{ N}$ en prenant $m+M \approx 1\text{ kg}$ et $\mu_0 = 1$ qui est la valeur maximale atteignable pour des surfaces lisses, la pile va glisser par rapport à la nappe et donc pourra "peut être" rester sur la table.

II Quantification de l'énergie en mécanique quantique

On considère dans ce problème le cas de plusieurs électrons.

- Un électron en interaction électrostatique avec un proton pour former un atome d'hydrogène.
- Un électron piégé dans une boîte dont la longueur l est choisie proche du diamètre de l'atome d'hydrogène dans son niveau fondamental .
- Un électron associé à un ressort pour former un oscillateur harmonique dont l'amplitude crête à crête des oscillations sera prise égale à l .

L'objectif étant de montrer que les énergies associées aux niveaux fondamentaux des trois systèmes sont proches les uns des autres. On notera dans toute la suite m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes et les données nécessaires aux applications numériques sont récapitulées dans le tableau ci dessous.

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad | \quad \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad | \quad e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad | \quad m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad | \quad l = 0,1 \text{ nm}$$

II.A Étude de l'atome d'hydrogène**II.A.1 Modèle classique**

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel \mathcal{R} centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel \mathcal{R} sera noté \vec{L} .

1. Rappeler l'expression de la force électrostatique \vec{F} s'exerçant sur l'électron.

Réponse :

On a d'après le cours, et en repère sphérique centré sur le proton

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \rightarrow \infty$.

Réponse :

On a pour une force conservative, ce qui est le cas ici, $\vec{F} = F\vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r$ d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + C$$

avec C , une constante à déterminer. De plus, l'énoncé indique que $E_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$ d'où $C = 0$ et au

final $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$

3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

Réponse :

Le moment de \vec{F} par rapport à O s'exprime selon $\rightarrow M_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. En effet, ces deux vecteurs sont colinéaires. Le TMC appliqué à M , par rapport à O et dans un référentiel galiléen indique alors que $\vec{L} = \rightarrow Cste$.

De plus, on a $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v}$. On en déduit que \overrightarrow{OM} est constamment perpendiculaire à \vec{L} et donc que le mouvement est plan. Dans toute la suite, on se place dans le repère polaire tel que $\vec{L} = L \vec{e}_z$.

4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{P\text{eff}}(r)$$

où $E_{P\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et de la norme du moment cinétique orbital $L = \|\vec{L}\|$ de l'électron.

Réponse :

On a $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, puis $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$. On en déduit que $L = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v} \cdot \vec{e}_z = m_e r^2 \dot{\theta}$.

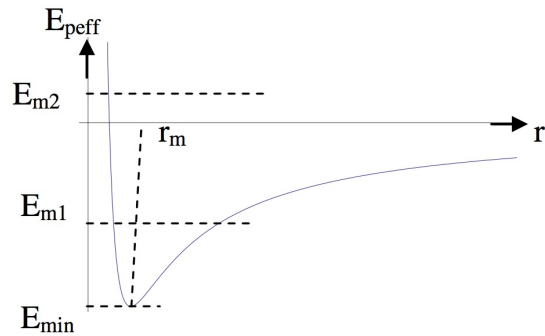
De plus, on a $E = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$. On obtient finalement en combinant ces résultats

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}}_{E_{P\text{eff}}(r)}$$

5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique \vec{L} .

Réponse :

Voici la courbe dans le cas où $L \neq 0$.



On peut observer, suivant le signe de E , des états de diffusion ($E \geq 0$) ou bien liés ($E < 0$). De plus, si le moment cinétique L est nul, seuls les états liés deviennent observables ; dans ce cas, l'électron va rentrer en collision avec le proton car le mouvement devient rectiligne.

6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Montrer que le rayon r_{oc} de l'orbite circulaire s'exprime selon

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$$

puis exprimer l'énergie mécanique E_{oc} de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L , e , m_e et ϵ_0 .

Réponse :

On obtient une orbite circulaire dès lors que l'énergie E_{oc} est égale au minimum local de l'énergie potentielle. Or ce minimum local existe uniquement si $L \neq 0$. On en déduit que

$$\frac{dE_{P\text{eff}}}{dr}(r_{oc}) = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{m_e r_{oc}^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{oc}^2} = 0 \Rightarrow r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$$

$$\text{De plus, on a } E_{oc} = E_{P\text{eff}}(r_{oc}) = \frac{L^2}{2m_e \left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 L^2}$$

II.A.2 Modèle de Bohr

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle "semi-classique" de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

7. Montrer que les rayons des orbites circulaires sont quantifiés. Déterminer la valeur numérique du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.

Réponse :

On reprend le résultat de la question précédente en remplaçant L par $n\hbar$ d'où

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e e^2} = \frac{a_0}{n^2}$$

Ces rayons dépendent d'un entier n et sont donc bien quantifiés. On obtient de plus par identification que

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,053 \text{ nm}$$

8. En déduire que les niveaux d'énergie E_n sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

Réponse :

De même, on obtient ici que

$$E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = E_n \text{ et } E_1 \approx -13,7 \text{ eV}$$

II.B Étude d'un électron piégé

On considère ici le cas d'un électron de masse, piégé dans une boîte quantique, unidimensionnelle, de longueur l . Ce dernier, ne peut donc pas quitter cette boîte et la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ de ce dernier peut être modélisé par la superposition de deux ondes progressives

$$\Psi(x, t) = a_+ \cos(\omega t - kx) + a_- \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

9. Justifier brièvement pourquoi on a $\Psi(0, t) = 0$ et $\Psi(l, t) = 0$.

Réponse :

La probabilité $dP = |\Psi|^2 dx$ d'observer l'électron est nulle pour $x < 0$ et $x > l$ or la fonction d'onde Ψ est continue. On en déduit alors les résultats proposés.

10. Montrer que l'on obtient une onde stationnaire en appliquant la première condition limite en $x = 0$.

Réponse :

On a ici d'après la première CL :

$$\Psi(0, t) = 0 \Rightarrow a_+ \cos(\omega t) + a_- \cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$$

et on observe que $\{a_+ = -a_-; \varphi = 0\}$ convient. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= a_+ \cos(\omega t - kx) - a_+ \cos(\omega t + kx) \\ &= 2a_+ \sin(\omega t) \sin(kx) \end{aligned}$$

de la forme $\boxed{Psi(x, t) = f(x) \times g(t)}$ ce qui correspond bien à une onde stationnaire.

11. Justifier rigoureusement pourquoi on ne peut avoir simultanément $a_+ = a_- = 0$ dans le cas d'une fonction d'onde Ψ .

Réponse :

On obtient dans ce cas $\Psi(x, t) = 0, \forall x$ et donc on en déduit que $\int_0^l |\Psi|^2 dx = 0 \neq 1$ ce qui est impossible!

12. Montrer alors que les longueurs d'ondes associées à l'électron peuvent s'exprimer en fonction de l et d'un entier n .

Réponse :

On applique alors la deuxième CL :

$$\Psi(l, t) = 0, \forall t \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, kl = n\pi$$

d'où l'on déduit que $\lambda = \frac{2l}{n}$

13. Montrer alors que les différents niveaux d'énergie de l'électron s'écrivent selon :

$$E'_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e l^2}$$

Réponse :

On peut appliquer la relation de de Broglie à l'électron pour obtenir sa quantité de mouvement $p = \hbar/\lambda = \hbar n/(2l)$ puis en déduire son énergie cinétique $E_c = p^2/(2m_e)$. De plus, l'électron piégé ne possède pas d'énergie potentielle d'où :

$$\boxed{E'_n = E_c = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e l^2}}$$

14. Effectuer l'application numérique pour E'_1 . L'ordre de grandeur obtenu est-il comparable au niveau d'énergie fondamentale $|E_1|$ de l'atome d'hydrogène ? De même, pourquoi a-t-on utilisé cette valeur pour l à votre avis ?

Réponse :

On obtient $\boxed{E'_1 \approx 38eV}$ soit une énergie du même ODG que celle du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène (13,7 eV). La longueur l à été choisi de manière à s'approcher justement de la taille de l'atome d'hydrogène. L'énergie obtenue est tout de même différente car dans l'atome d'hydrogène, il y a une interaction électrostatique entre le proton et l'électron, ce qui modifie les équations à résoudre.

II.C Oscillateur harmonique

On s'intéresse finalement d'un électron fixé à l'extrémité d'un ressort avec une constante de raideur k et la pulsation propre associée $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$. On considère de plus que la longueur à vide du ressort est nulle.

On se place en base cartésienne et on note $x(t)$ l'abscisse de l'électron.

15. Démontrer la formule donnant l'énergie potentielle de l'électron en fonction de x et k . En déduire que pour un mouvement d'amplitude A , on a en ordre de grandeur

$$\langle E_p \rangle \approx \frac{1}{2} k A^2$$

Réponse :

On a $\vec{F} = -kx \vec{e}_x \Rightarrow \delta W = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2} kx^2 + c\right) = -dE_p$ d'où l'on déduit par identification et en prenant

$$c = 0 \text{ que } \boxed{E_p = \frac{1}{2} kx^2}.$$

De plus, on a $\langle x^2 \rangle \approx A^2$ en ordre de grandeur d'où le résultat.

Pour aller plus loin :

Pour $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$, on a $\langle x^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$. Le facteur 1/2 peut être oublié en ordre de grandeur.

16. Démontrer ensuite que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ de l'électron s'exprime selon $\langle E_c \rangle \approx \frac{\hbar^2}{8m_e A^2}$ en utilisant l'inégalité de Heisenberg saturée en fonction de A , m_e et \hbar .

Réponse :

On a $\Delta x \times \Delta p_x \approx \hbar/2$. De plus, dans le cas d'un mouvement oscillant, on a $\Delta x \approx A$ et $\Delta p_x \approx p_x$. On en déduit au final que

$$\boxed{E_c = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8m_e A^2}}$$

On considère que l'énergie fondamentale de l'oscillateur correspond au minimum de l'énergie mécanique $E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$ par rapport à A . On cherche donc à obtenir l'amplitude A_m qui minimise l'énergie mécanique de l'électron et $E_m = E(A_m)$, l'énergie correspondante.

17. Montrer que l'on obtient $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{km}}$ puis que $E_m = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

Réponse :

On a $E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{\hbar^2}{8m_e A^2} + \frac{1}{2} k A^2$ d'où l'on déduit en dérivant que :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dA}(A_m) = 0 &\Rightarrow -2 \frac{\hbar^2}{8m_e A_m^3} + k A_m = 0 \\ &\Rightarrow A_m^4 = \frac{\hbar^2}{4m_e k} \end{aligned}$$

d'où $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_e k}}$. On obtient alors ensuite l'énergie minimale :

$$E_m = E(A_m) = \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m_e}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

18. Exprimer alors la pulsation ω_0 en fonction de m_e , \hbar et A_m et en déduire une valeur numérique pour E_m en eV en considérant par analogie avec les questions précédentes que $A_m = l/2$.

Réponse :

On a $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_e k}} = \frac{\hbar}{2m_e \omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\hbar}{2m_e A_m^2}$. Au final, on obtient :

$$E_m = \frac{\hbar^2}{4m_e A_m^2} = \frac{\hbar^2}{m_e l^2} \approx 7,7 \text{ eV}$$

Pour aller plus loin :

Encore une fois, pour une même longueur, l'ODG pour l'énergie minimale est le même que dans les autres configurations.

III Sismographe

Lors d'un tremblement de terre, les vibrations du sol font que ce dernier n'est plus galiléen le temps de la secousse sismique. On peut donc détecter les vibrations du sol par les effets non galiléens qui sont engendrés. Pour cela, on considère un pendule homogène de masse m et de longueur l . Ce pendule est lié en O à un bâti solide du sol (voir figure III.1) par une liaison pivot supposée parfaite. Le mouvement (supposé plan) du pendule autour de l'axe passant par O et parallèle à \vec{u}_z est repéré par l'angle θ que fait la barre avec la verticale, \vec{u}_z étant un vecteur unitaire venant vers le lecteur. On note $J = \frac{1}{3}ml^2$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz) . Le pendule est freiné par un couple de frottement $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$.

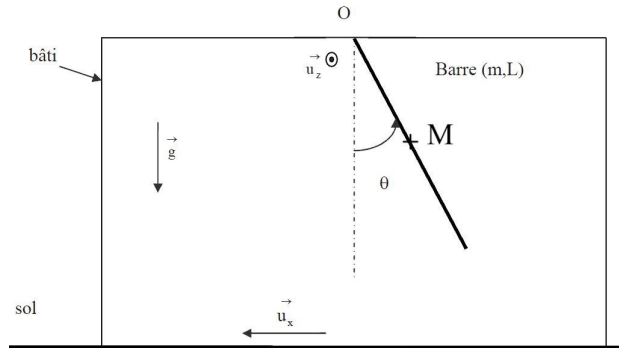


FIGURE III.1 – Principe du sismographe

On suppose que le sol vibre horizontalement, la vibration étant caractérisée par une accélération horizontale du sol $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$, \vec{u}_x étant un vecteur unitaire horizontal dirigé vers la gauche (voir figure III.1). On notera par conséquent \vec{u}_y la verticale descendante telle que $\vec{g} = g\vec{u}_y$.

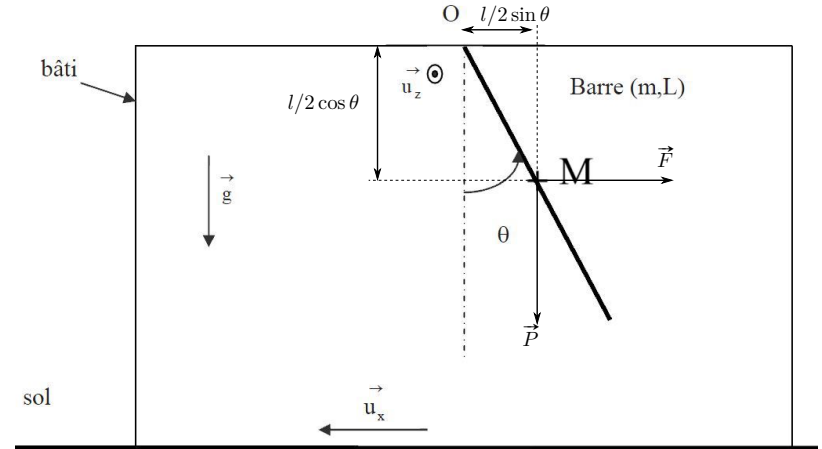
Lors de la vibration du sol, on peut étudier le mouvement du pendule dans le référentiel lié au sol (ou au bâti) même s'il n'est pas galiléen à condition d'ajouter la force $\vec{F} = -m\vec{a}(t)$ qui s'applique au niveau du centre de masse de la tige, au bilan des forces.

1. Faire le bilan des actions s'exerçant sur la tige de centre de masse M .

Réponse :

Dans le référentiel lié au sol non galiléen, on a le bilan des actions suivant :

- Poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$ (s'applique en G , centre d'inertie de la tige)
- Réaction de la liaison pivot parfaite : s'applique en O et de moment nul par rapport à (Oz)
- Couple de frottements $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$
- Force $\vec{F} = -m\vec{a}(t) = -ma(t)\vec{u}_x$ (s'applique en M , centre d'inertie de la tige)



2. Quel est le signe de la constante α ?

Réponse :

On a simplement $\alpha > 0$, car la puissance du couple de frottement $P = \Gamma\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2$ doit être négative.

3. Calculer le moment $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$ de la force d'inertie \vec{F} par rapport à l'axe (Oz) .

Réponse :

Par définition

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = \pm d \|\vec{F}\|$$

où d est le bras de levier.

Comme la force s'exerce au point M situé au centre de la tige, $d = \frac{l}{2} \cos \theta$. De plus, si $a(t) > 0$, la force \vec{F} est dirigée suivant $-\vec{u}_x$ et tend à faire tourner le pendule dans le sens trigonométrique. Son moment par rapport à (Oz) est donc positif. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = \frac{ml}{2} \cos(\theta) a(t)$$

4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ au cours du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3}{2l} (g \sin \theta - a(t) \cos \theta) = 0$$

Réponse :

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la tige par rapport au point O dans le référentiel non galiléen lié au bâti, on a :

$$\frac{d\sigma_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) + \Gamma \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = \pm dm g$$

avec d le bras de levier, égal à $\frac{l}{2} \sin \theta$ car le poids s'applique au point M .

Comme le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens horaire lorsque $\theta > 0$ et $\sin \theta > 0$, le moment du poids est négatif. On a donc

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -\frac{l}{2} \sin \theta m g$$

Enfin, à l'aide de définition du moment cinétique d'un solide $\sigma_{(Oz)} = J\omega = J\dot{\theta}$, on obtient au final :

$$\frac{dJ\dot{\theta}}{dt} = \frac{ml}{2} \cos \theta a(t) - \frac{l}{2} \sin \theta - \alpha \dot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} = \frac{ml}{2} \cos \theta a(t) - \frac{l}{2} \sin \theta - \alpha \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3}{2l} (g \sin \theta - a(t) \cos \theta) = 0}$$

5. En déduire, dans le cas où $a(t) = a$ est constante, l'angle θ_e lorsque le pendule trouve une position d'équilibre par rapport au bâti. On exprimera θ_e en fonction de a et g . Commenter l'expression obtenue.

Réponse :

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$, on a donc

$$g \sin \theta_e = a \cos \theta_e \Rightarrow \tan \theta_e = \frac{a}{g}$$

Comme $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, il n'y a qu'une solution possible $\boxed{\theta_e = \arctan \frac{a}{g}}$.

On voit que ce résultat est en accord avec l'intuition, puisque si a est nulle, alors on retrouve $\theta_e = 0$ et si $a \gg g$, alors $\theta_e \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

L'hypothèse a constante n'est pas réaliste dans le cas d'un tremblement de terre. On va donc envisager un cas plus réaliste d'ondes sismiques où a varie suivant la forme $a = a_0 \cos(\omega t)$ où a_0 et ω sont des constantes. Il est conseillé d'utiliser les amplitudes complexes $\underline{a} = a_0$ et $\underline{\theta} = \theta_0 e^{j\varphi}$ avec $a(t) = \Re(\underline{a} e^{j\omega t})$ et $\theta(t) = \Re(\underline{\theta} e^{j\omega t})$.

6. Déterminer, dans le cas des petites oscillations, l'amplitude θ_0 des oscillations forcées du sismographe en fonction de a_0 , ω , m , l , α et g .

Réponse :

Dans le cas de petites oscillations, on a $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$, on a donc l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3g}{2l} \theta = \frac{3a}{2l} \iff \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{3a(t)}{2l}$$

avec, par identification entre les deux formes :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{ml}{\alpha} \sqrt{\frac{gl}{6}}$$

On passe ensuite en complexe (Régime sinusoïdal forcé) en utilisant l'équivalence temporelle/fréquentielle

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = j\omega \underline{X} :$$

$$(j\omega)^2 \underline{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{\theta} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \frac{3a}{2l} \Rightarrow \underline{\theta} = \frac{3a/2l}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} \quad \text{puis} \quad \theta_0 = |\underline{\theta}| = \frac{3a_0/2l}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$$

Ainsi, on observe un comportement de type passe bas d'ordre deux pour la relation liant l'accélération extérieure $a(t)$ à l'angle θ .

7. On considère des ondes sismiques de fréquence très faible. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude de l'accélération a_0 du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable ?

Réponse :

Lorsque ω est négligeable par rapport à $\omega_0 = \sqrt{3g/(2l)}$, on a $\underline{\theta} \sim \frac{3a/2l}{3g/2l}$ d'où $\boxed{\theta_0 = \frac{a_0}{g}}$.

On a donc bien $\theta_0 \propto a_0$, le coefficient de proportionnalité étant égal à $\frac{1}{g}$.

Pour faire cette approximation, on doit avoir $\boxed{\omega \ll \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$

8. On considère des ondes sismiques de fréquence très élevée. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude du **déplacement** du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable ?

Réponse :

Lorsque $\boxed{\omega \gg \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$, on a $\underline{\theta} \sim \frac{3a/2l}{-\omega^2}$ d'où $\boxed{\theta_0 = \frac{3a_0}{2l\omega^2}}$

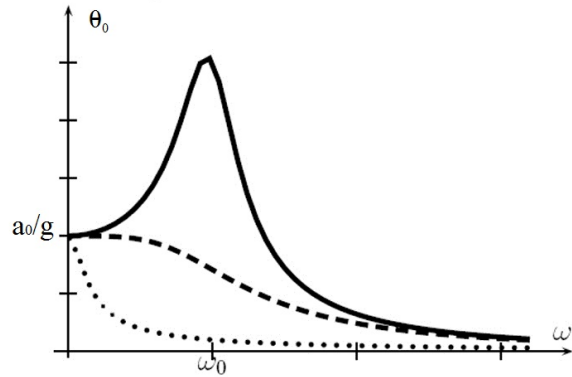
Le déplacement du sol est décrit par \underline{x}_s tel que $\frac{d^2 \underline{x}_s(t)}{dt^2}$ soit en complexe $(j\omega)^2 \underline{x}_s = \underline{a}$. L'amplitude du déplacement du sol est $x_{s0} = \frac{a_0}{\omega^2}$.

On a donc $\theta_0 \propto x_{s0}$ avec un coefficient de proportionnalité de $\frac{3}{2l}$

9. Représenter l'allure générale de l'amplitude θ_0 en fonction de la pulsation ω .

Réponse :

On a donc l'allure suivante, avec (si $Q > 1/\sqrt{2}$) ou sans (si $Q < 1/\sqrt{2}$) résonance suivant la valeur de α :



IV Satellites de télécommunication Mines-Ponts MP 2007

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de masse M_T , de rayon R_T et de centre O , immobile dans l'espace, sans rotation propre.

On donne les valeurs numériques suivantes :

\mathcal{G}	R_T	M_T
$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$	6370 km	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

IV.A Couverture d'un réseau de satellite

1. Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O , à une altitude $h = 800 \text{ km}$. Établir la relation entre la période de révolution T et h . Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et h puis effectuer les applications numériques pour T et v .

Réponse :

Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$ avec $k = GM_T M_S$. On a de plus $r = R_T + h$. On peut ainsi appliquer le PFD au satellite dans le repère polaire O, \vec{e}_r, \vec{e}_z :

$$\begin{aligned} -M_S r \dot{\theta}^2 &= -\frac{k}{r^2} \\ M_S r \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient $\dot{\theta} = cste \Rightarrow v = r\dot{\theta} = cste$. On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale $a_r = -v^2/r$ d'où :

$$M_S \frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

De plus, on sait que $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent $T = 6,07 \times 10^2 \text{ s}$ et $v = 7,46 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2E_c + E_p = 0$.

Réponse :

L'énergie potentielle a pour expression $E_p(r) = -\frac{k}{r}$. On a $2E_c + E_p = M_S v^2 - \frac{GM_T M_S}{r} = M_S \left(\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r} \right) = 0$ d'où le résultat.

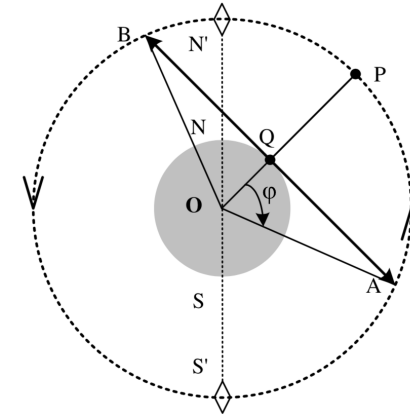


FIGURE IV.1 – N est le pôle Nord et S le pôle Sud. Satellite P , point Q et ligne des horizons AB . Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est $N'S'$).

3. À chaque position P du satellite correspondent un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire.

Pour un observateur situé en Q , la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. IV.1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de φ et T puis montrer que

$$\tau = 2 \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right) f(h)$$

et donner l'expression de $f(h)$.

Réaliser l'application numérique toujours pour $h = 800 \text{ km}$ sachant que $\arccos(R_T/(R_T + h)) \approx 0,5$.

Réponse :

Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle φ tel que $\cos(\varphi) = R_T/(R_T + h)$. La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit $\tau = \frac{2\varphi}{2\pi}T$ soit au final :

$$\tau = 2 \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right) \underbrace{\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}}_{f(h)}$$

L'application numérique donne $\tau = 9,2 \times 10^2 \text{ s}$

4. Calculer T/τ . Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre comme sur la figure IV.1) un ensemble de satellites, identiques, appelé « train de satellites ».

Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

Réponse :

On a simplement $\frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{2\varphi} = \frac{\pi}{\arccos\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)} \approx 6,6$. Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).

5. Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

Réponse :

D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc $\lceil 7/2 \rceil = 4$ trains suffisent ce qui permet d'aboutir à un total de $7 \times 4 = 28$ satellites.

6. La prise en compte de la rotation de la Terre modifie le résultat de la question précédente. Dans cette question, on s'interroge sur la pertinence d'utiliser plutôt un satellite géostationnaire. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4 ?

Réponse :

Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite vaut la période de révolution de la terre $T_T \approx 86 \times 10^3$ s.

On peut utiliser la 3ième loi de Kepler :

$$\frac{T_T^2}{(R_T + h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad h_g = \left(\frac{GM_T T_T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T \approx 35\,700 \text{ km}$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. Il ne faut pas utiliser la formule de la question 4 pour la durée de visibilité, car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de φ est incorrect dans ce cas !!). Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission.

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires.

IV.B Influence des frottements aérodynamiques

7. La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement \vec{f}_a créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{f}_a = -\alpha M_S v \vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α puis appliquer ensuite

le théorème de la puissance mécanique en supposant que le théorème du Viriel établi à la question 2 reste valable en présence de \vec{f}_a . En déduire finalement que :

$$\frac{dh}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h} \tag{IV.1}$$

Réponse :

On a $[F] = M.L.T^{-2} = [\alpha]M.L^2.T^{-2}$. On en déduit par identification que $[\alpha] = L^{-1}$.

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{dE_c + E_p}{dt} = -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2} \frac{dE_p}{dt}$$

De plus, $v^2 = 2E_C/M_S = -E_P/M_S = GM_T/(R_T + h)$. On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \left(\frac{GM_T}{R_T + h} \right)^{3/2} = \dot{h} \frac{GM_S M_T}{2(R_T + h)^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h}$$

8. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte de l'équation (IV.1) (obtenue par intégration de cette équation). Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

Réponse :

Entre le début et la fin de la révolution, $R_T + h$ n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors h_0 l'altitude initiale du satellite) :

$$\Delta h = -2\alpha \underbrace{\Delta t}_{=T} \sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0} \Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T+h_0)^2} \approx 1,53 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1}$$

En dix années, on a effectué $n = \frac{\Delta T}{T} = 10 \frac{T_T}{T} \approx 52000$ orbites donc au premier ordre (en supposant Δh identique à chaque période), on a $\Delta h \approx -52$ km.

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables) :

$$\frac{dh}{\sqrt{R_T+h}} = -2\alpha\sqrt{GM_T}dt \Rightarrow 2(\sqrt{R_T+h_1} - \sqrt{R_T+h_0}) = -2\alpha\sqrt{GM_T}\Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta h = h_1 - h_0 = \left(\sqrt{R_T+h_0} - \alpha\sqrt{GM_T}\Delta T \right)^2 - R_T - h_0 \approx -51,3 \text{ km}$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée.

9. En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de

la question 8 (pendant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β .

Réponse :

On observe que $\frac{dh}{dt} \propto \alpha(h)$, car les autres facteurs varient peu. On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{dh}{dt}(h = h_{haut})}{\frac{dh}{dt}(h = h_{bas})} = \left(\frac{h_{bas}}{h_{haut}}\right)^\beta = \frac{1/T_T}{2/T_T'} \Rightarrow \beta = \frac{\log(T_T'/(2T_T))}{\log(h_{bas}/h_{haut})}$$

avec T_T' la période de révolution à 400 km d'altitude telle que $T_T'/T = \left(\frac{R_T+h_{bas}}{R_T+h_{haut}}\right)^{3/2} \approx 0,917$. On en déduit au final $\beta \approx 1,13$ puis $\gamma = h_{haut}^\beta \times \alpha(h_{haut}) \approx 7,2 \times 10^{-9}$ SI. En pratique, la valeur de γ est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir β et seuls son ordre de grandeur à du sens.

IV.C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIIème, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur $2l$.

Le centre de masse S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire uniforme de rayon $r_0 = R_T + h$ avec $l \ll r_0$. Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen.

On appelle θ l'angle de $\overline{M_1M_2}$ avec l'axe Ox' de (R') . On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements dans toute cette partie.

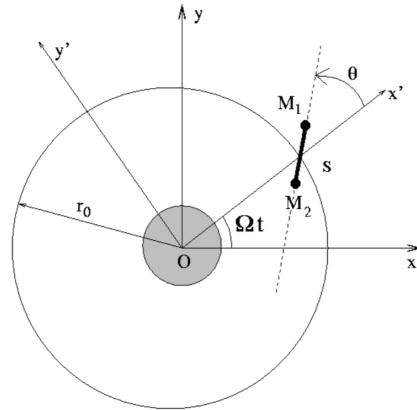


FIGURE IV.2 – Le satellite composé des points M_1 et M_2 reliés par une tige de longueur $2l$.

10. Exprimer les distances $r_1 = \|\overline{OM_1}\|$ et $r_2 = \|\overline{OM_2}\|$ en fonction de r_0 , l et θ

Réponse :

On a $\overline{OM_1} = \overline{OS} + \overline{SM_1} \Rightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2 + l^2 + 2r_0l \cos(\theta)}$. De même, on trouve $r_2 = \sqrt{r_0^2 + l^2 - 2r_0l \cos(\theta)}$

On rappelle le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x)$$

De plus, on admet que l'énergie cinétique E_c du satellite s'exprime selon $E_c = \frac{1}{2}M_S l^2 \dot{\theta}^2$ (démonstration peu évidente dans le corrigé).

Démonstration :

On a par définition $E_c = E_{c,1} + E_{c,2} = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2)$. De plus, on sait que $\vec{v}_1 = \frac{d\overline{OM_1}}{dt} = \frac{d\overline{OS}}{dt} + \frac{d\overline{SM_1}}{dt} = \vec{v}_g + l(\dot{\theta} + \Omega)\vec{e}_{\theta'}$ puis que $\vec{v}_2 = \vec{v}_g - l(\dot{\theta} + \Omega)\vec{e}_{\theta'}$. On en déduit que :

$$E_c = \frac{1}{2}m(2v_g^2 + 2l^2\dot{\theta}^2 + 0) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}M_S(r_0\Omega)^2 + \frac{1}{2}M_S l^2(\dot{\theta} + \Omega)^2$$

Remarques :

- Le vecteur $\vec{S}M_1$ tourne en effet à la vitesse angulaire $\Omega + \dot{\theta}$ par rapport au repère fixe dans \mathcal{R} d'où le résultat.
- Cependant, cette expression de l'énergie cinétique complique beaucoup la suite du problème. En utilisant toutefois la conservation du moment cinétique $L_0 = (\overline{OM_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overline{OM_2} \wedge m\vec{v}_2) \cdot \vec{e}_z = M_S r_0^2 \Omega + M_S l^2(\Omega + \dot{\theta})$

implique $\frac{dL_0}{dt} = 0 \Rightarrow r_0^2 \dot{\Omega} = -l^2(\ddot{\theta} + \dot{\Omega})$, on peut établir que

$$\frac{dE_c}{dt} = M_S r_0^2 \dot{\Omega} \Omega + M_S l^2(\ddot{\theta} + \dot{\Omega})(\dot{\theta} + \Omega) = M_S l^2 \ddot{\theta}(\ddot{\theta} + \dot{\Omega}) \approx M_S l^2 \ddot{\theta} \dot{\theta}$$

car $\dot{\Omega} = \frac{\ddot{\theta}}{1+(r_0/l)^2} \Rightarrow \dot{\Omega} \ll \ddot{\theta}$ (toujours via l'expression du moment cinétique).

- On peut alors ré-intégrer cette relation pour obtenir :

$$E_c = \frac{1}{2}M_S l^2 \dot{\theta}^2$$

- Ces résultats impliquent que le mouvement du centre de masse du satellite n'est pas exactement uniforme. D'après la conservation du moment cinétique, une variation de $\dot{\theta}$ entraîne une variation de Ω . Cette variation est toutefois très faible (de l'ordre de $(l/r_0)^2$)

11. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit en procédant aux approximations qui s'imposent ($l \ll r_0$) :

$$E_m \approx -\frac{GM_T M_S}{r_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r_0}\right)^2 (3 \cos^2(\theta) - 1)\right) + \frac{1}{2}M_S l^2 \dot{\theta}^2$$

Réponse :

On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle $E_{p,i} = -k/r_i$ avec $k = GM_T m$. On obtient ainsi en posant $\epsilon = l/r_0$:

$$E_{p,12} = -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + l^2 \pm 2r_0l \cos(\theta)}} = -\frac{k}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \pm 2\epsilon \cos(\theta)}}$$

$$\Leftrightarrow E_{p,12} = -\frac{k}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2}(\epsilon^2 \pm 2\epsilon \cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\epsilon^2 \pm 2\epsilon \cos(\theta))^2\right) + o(\epsilon^2)$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$E_{p,1} + E_{p,2} = -\frac{k}{r_0} (2 - \epsilon^2 + 3\epsilon^2 \cos^2(\theta)) + o(\epsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique obtenue à la question précédente :

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{GM_T M_S}{r_0} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r_0}\right)^2 (3 \cos^2(\theta) - 1)\right) + \frac{1}{2}M_S l^2 \dot{\theta}^2$$

car $m = M_S/2$, d'où le résultat !

12. En déduire l'équation du mouvement. Indiquer les positions d'équilibre et préciser, pour celle(s) qui sont stable(s), la pulsation des petites oscillations autour de ces dernières. Conclure.

Réponse :

On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} = 0 &\Rightarrow -\frac{GM_T}{r_0} \left(\frac{l}{r_0}\right)^2 3 \cos(\theta)(-\sin(\theta))\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3} \sin(2\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} = 0} \end{aligned}$$

On est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ soit ici pour $\theta = p\frac{\pi}{2}$, $p \in \mathbb{N}$.

- Pour $\theta = 0 + x$ avec $x \ll 1$, on a comme équation du mouvement $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- Pour $\theta = \pi/2 + x$, on a maintenant $\ddot{x} - \omega_0^2 x$. Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- Pour $\theta = \pi + x$, on a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation ω_0
- Pour $\theta = 3\pi/2 + x$, on obtient au final $\ddot{x} - \omega_0^2 x$: équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre.