

Physique - Devoir Surveillé 7

Le 21/03/2026

Sujet bleu

Barème approximatif :

- Exercice I : 10 points
- Exercice II : 20 points
- Exercice III : 10 points
- Exercice IV : 17 points
- Soins et rigueur : 3 points

I Questions de cours

1. Démontrez la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Réponse :

2. Obtention des expressions des deux vitesses cosmiques $v_1 = \sqrt{gR_T}$ (orbite basse) et $v_2 = \sqrt{2gR_T}$ (libération).

Réponse :

3. Retrouvez l'équation du mouvement pour le pendule simple de longueur l et de masse l avec frottement fluide ($\vec{F} = -\alpha\vec{v}$) en utilisant le théorème du moment cinétique.

Réponse :

4. Démontrez, à l'aide de la relation de Heisenberg, que l'énergie minimale d'un électron dans un puits de largeur L n'est pas nulle. Démontrez ensuite l'ODG (expression littérale attendue) de cette énergie en fonction de m, L et \hbar .

Réponse :

5. Retrouvez l'équation du mouvement pour un pendule de torsion de moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe O, \vec{e}_z soumis à un couple de rappel $\Gamma = -C\theta$.

Réponse :

II Quantification de l'énergie en mécanique quantique

On considère dans ce problème le cas de plusieurs électrons.

- Un électron en interaction électrostatique avec un proton pour former un atome d'hydrogène.
- Un électron piégé dans une boîte dont la longueur l est choisie proche du diamètre de l'atome d'hydrogène dans son niveau fondamental .
- Un électron associé à un ressort pour former un oscillateur harmonique dont l'amplitude crête à crête des oscillations sera prise égale à l .

L'objectif étant de montrer que les énergies associées aux niveaux fondamentaux des trois systèmes sont proches les unes des autres. On notera dans toute la suite m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes et les données nécessaires aux applications numériques sont récapitulées dans le tableau ci dessous.

$$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad | \quad \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad | \quad e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad | \quad m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad | \quad l = 0,1 \text{ nm}$$

II.A Étude de l'atome d'hydrogène**II.A.1 Modèle classique**

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel \mathcal{R} centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel \mathcal{R} sera noté \vec{L} .

1. Rappeler l'expression de la force électrostatique \vec{F} s'exerçant sur l'électron.

Réponse :

On a d'après le cours, et en repère sphérique centré sur le proton

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \rightarrow \infty$.

Réponse :

On a pour une force conservative, ce qui est le cas ici, $\vec{F} = F\vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{e}_r$ d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + C$$

avec C , une constante à déterminer. De plus, l'énoncé indique que $E_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$ d'où $C = 0$ et au

$$\text{final} \quad E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

Réponse :

Le moment de \vec{F} par rapport à O s'exprime selon $\rightarrow M_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. En effet, ces deux vecteurs sont colinéaires. Le TMC appliqué à M , par rapport à O et dans un référentiel galiléen indique alors que $\vec{L} = \rightarrow Cste$.

De plus, on a $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e \vec{v}$. On en déduit que \overrightarrow{OM} est constamment perpendiculaire à \vec{L} et donc que le mouvement est plan. Dans toute la suite, on se place dans le repère polaire tel que $\vec{L} = L\vec{e}_z$.

4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 + E_{P\text{eff}}(r)$$

où $E_{P\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et de la norme du moment cinétique orbital $L = \|\vec{L}\|$ de l'électron.

Réponse :

On a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ puis $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On en déduit que $L = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} \cdot \vec{e}_z = m_e r^2 \dot{\theta}$.

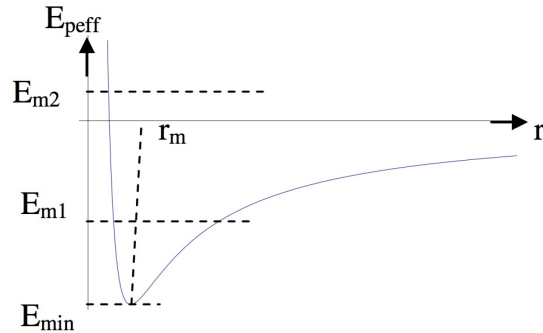
De plus, on a $E = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. On obtient finalement en combinant ces résultats

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}}_{E_{P\text{eff}}(r)}$$

5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique \vec{L} .

Réponse :

Voici la courbe dans le cas où $L \neq 0$.



On peut observer, suivant le signe de E , des états de diffusion ($E \geq 0$) ou bien liés ($E < 0$). De plus, si le moment cinétique L est nul, seuls les états liés deviennent observables ; dans ce cas, l'électron va rentrer en collision avec le proton car le mouvement devient rectiligne.

6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Montrer que le rayon r_{oc} de l'orbite circulaire s'exprime selon

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$$

puis exprimer l'énergie mécanique E_{oc} de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L , e , m_e et ϵ_0 .

Réponse :

On obtient une orbite circulaire dès lors que l'énergie E_{oc} est égale au minimum local de l'énergie potentielle. Or ce minimum local existe uniquement si $L \neq 0$. On en déduit que

$$\frac{dE_{P\text{eff}}}{dr}(r_{oc}) = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{m_e r_{oc}^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_{oc}^2} = 0 \Rightarrow r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$$

$$\text{De plus, on a } E_{oc} = E_{P\text{eff}}(r_{oc}) = \frac{L^2}{2m_e \left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 L^2}$$

II.A.2 Modèle de Bohr

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle "semi-classique" de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

7. Montrer que les rayons des orbites circulaires sont quantifiés. Déterminer la valeur numérique du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.

Réponse :

On reprend le résultat de la question précédente en remplaçant L par $n\hbar$ d'où

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e e^2} = \frac{a_0}{n^2}$$

Ces rayons dépendent d'un entier n et sont donc bien quantifiés. On obtient de plus par identification que

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,053 \text{ nm}$$

8. En déduire que les niveaux d'énergie E_n sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

Réponse :

De même, on obtient ici que

$$E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = E_n \text{ et } E_1 \approx -13,7 \text{ eV}$$

II.B Étude d'un électron piégé

On considère ici le cas d'un électron de masse, piégé dans une boîte quantique, unidimensionnelle, de longueur l . Ce dernier, ne peut donc pas quitter cette boîte et la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ de ce dernier peut être modélisé par la superposition de deux ondes progressives

$$\Psi(x, t) = a_+ \cos(\omega t - kx) + a_- \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

9. Justifier brièvement pourquoi on a $\Psi(0, t) = 0$ et $\Psi(l, t) = 0$.

Réponse :

La probabilité $dP = |\Psi|^2 dx$ d'observer l'électron est nulle pour $x < 0$ et $x > l$ or la fonction d'onde Ψ est continue. On en déduit alors les résultats proposés.

10. Montrer que l'on obtient une onde stationnaire en appliquant la première condition limite en $x = 0$.

Réponse :
On a ici d'après la première CL :

$$\Psi(0, t) = 0 \Rightarrow a_+ \cos(\omega t) + a_- \cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$$

et on observe que $\{a_+ = -a_-; \varphi = 0\}$ convient. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= a_+ \cos(\omega t - kx) - a_+ \cos(\omega t + kx) \\ &= 2a_+ \sin(\omega t) \sin(kx) \end{aligned}$$

de la forme $\Psi(x, t) = f(x) \times g(t)$ ce qui correspond bien à une onde stationnaire.

11. Justifier rigoureusement pourquoi on ne peut avoir simultanément $a_+ = a_- = 0$ dans le cas d'une fonction d'onde Ψ .

Réponse :
On obtient dans ce cas $\Psi(x, t) = 0, \forall x$ et donc on en déduit que $\int_0^l |\Psi|^2 dx = 0 \neq 1$ ce qui est impossible!

12. Montrer alors que les longueurs d'ondes associées à l'électron peuvent s'exprimer en fonction de l et d'un entier n .

Réponse :
On applique alors la deuxième CL :

$$\Psi(l, t) = 0, \forall t \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, kl = n\pi$$

d'où l'on déduit que $\lambda = \frac{2l}{n}$

13. Montrer alors que les différents niveaux d'énergie de l'électron s'écrivent selon :

$$E'_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e l^2}$$

Réponse :
On peut appliquer la relation de de Broglie à l'électron pour obtenir sa quantité de mouvement $p = h/\lambda = \hbar n/(2l)$ puis en déduire son énergie cinétique $E_c = p^2/(2m_e)$. De plus, l'électron piégé ne possède pas d'énergie potentielle d'où :

$$E'_n = E_c = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e l^2}$$

14. Effectuer l'application numérique pour E'_1 . L'ordre de grandeur obtenu est-il comparable au niveau d'énergie fondamental $|E_1|$ de l'atome d'hydrogène ? De même, pourquoi a-t-on utilisé cette valeur pour l à votre avis ?

Réponse :
On obtient $E'_1 \approx 38 \text{ eV}$ soit une énergie du même ODG que celle du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène (13,7 eV). La longueur l à été choisi de manière à s'approcher justement de la taille de l'atome d'hydrogène. L'énergie obtenue est tout de même différente car dans l'atome d'hydrogène, il y a une interaction électrostatique entre le proton et l'électron, ce qui modifie les équations à résoudre.

II.C Oscillateur harmonique

On s'intéresse finalement d'un électron fixé à l'extrémité d'un ressort avec une constante de raideur k et la pulsation propre associée $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$. On considère de plus que la longueur à vide du ressort est nulle.

On se place en base cartésienne et on note $x(t)$ l'abscisse de l'électron.

15. Démontrer la formule donnant l'énergie potentielle de l'électron en fonction de x et k . En déduire que pour un mouvement d'amplitude A , on a en ordre de grandeur

$$\langle E_p \rangle \approx \frac{1}{2} k A^2$$

Réponse :
On a $\vec{F} = -kx \vec{e}_x \Rightarrow \delta W = -kx dx = -d(\frac{1}{2} kx^2 + c) = -dE_p$ d'où l'on déduit par identification et en prenant

$$c = 0 \text{ que } E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

De plus, on a $\langle x^2 \rangle \approx A^2$ en ordre de grandeur d'où le résultat.

Pour aller plus loin :
Pour $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$, on a $\langle x^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$. Le facteur 1/2 peut être oublié en ordre de grandeur.

16. Démontrer ensuite que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ de l'électron s'exprime selon $\langle E_c \rangle \approx \frac{\hbar^2}{8m_e A^2}$ en utilisant l'inégalité de Heisenberg saturée en fonction de A, m_e et \hbar .

Réponse :
On a $\Delta x \times \Delta p_x \approx \hbar/2$. De plus, dans le cas d'un mouvement oscillant, on a $\Delta x \approx A$ et $\Delta p_x \approx p_x$. On en déduit au final que

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8m_e A^2}$$

On considère que l'énergie fondamentale de l'oscillateur correspond au minimum de l'énergie mécanique $E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$ par rapport à A . On cherche donc à obtenir l'amplitude A_m qui minimise l'énergie mécanique de l'électron et $E_m = E(A_m)$, l'énergie correspondante.

17. Montrer que l'on obtient $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{km}}$ puis que $E_m = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

Réponse :
On a $E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{\hbar^2}{8m_e A^2} + \frac{1}{2} k A^2$ d'où l'on déduit en dérivant que :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dA}(A_m) &= 0 \Rightarrow -2 \frac{\hbar^2}{8m_e A_m^3} + k A_m = 0 \\ \Rightarrow A_m^4 &= \frac{\hbar^2}{4m_e k} \end{aligned}$$

d'où $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_e k}}$. On obtient alors ensuite l'énergie minimale :

$$E_m = E(A_m) = \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m_e}} + \frac{\hbar}{4} \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

18. Exprimer alors la pulsation ω_0 en fonction de m_e , \hbar et A_m et en déduire une valeur numérique pour E_m en eV en considérant par analogie avec les questions précédentes que $A_m = l/2$.

Réponse :

On a $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_e k}} = \frac{\hbar}{2m_e \omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\hbar}{2m_e A_m^2}$. Au final, on obtient :

$$E_m = \frac{\hbar^2}{4m_e A_m^2} = \frac{\hbar^2}{m_e l^2} \approx 7,7 \text{ eV}$$

Pour aller plus loin :

Encore une fois, pour une même longueur, l'ODG pour l'énergie minimale est le même que dans les autres configurations.

III Sismographe

Lors d'un tremblement de terre, les vibrations du sol font que ce dernier n'est plus galiléen le temps de la secousse sismique. On peut donc détecter les vibrations du sol par les effets non galiléens qui sont engendrés. Pour cela, on considère un pendule homogène de masse m et de longueur l . Ce pendule est lié en O à un bâti solide du sol (voir figure III.1) par une liaison pivot supposée parfaite. Le mouvement (supposé plan) du pendule autour de l'axe passant par O et parallèle à \vec{u}_z est repéré par l'angle θ que fait la barre avec la verticale, \vec{u}_z étant un vecteur unitaire venant vers le lecteur. On note $J = \frac{1}{3}ml^2$ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz) . Le pendule est freiné par un couple de frottement $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$.

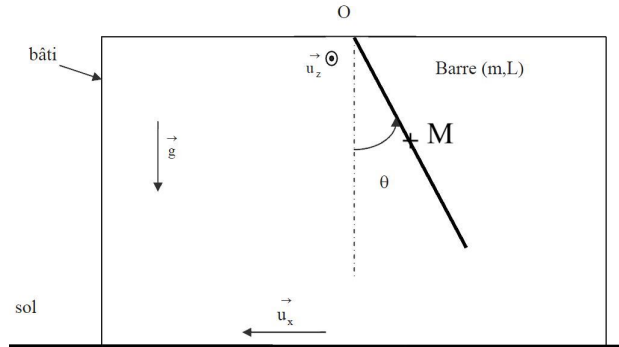


FIGURE III.1 – Principe du sismographe

On suppose que le sol vibre horizontalement, la vibration étant caractérisée par une accélération horizontale du sol $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$, \vec{u}_x étant un vecteur unitaire horizontal dirigé vers la gauche (voir figure III.1). On notera par conséquent \vec{u}_y la verticale descendante telle que $\vec{g} = g\vec{u}_y$.

Lors de la vibration du sol, on peut étudier le mouvement du pendule dans le référentiel lié au sol (ou au bâti) même s'il n'est pas galiléen à condition d'ajouter la force $\vec{F} = -m\vec{a}(t)$ qui s'applique au niveau du centre de masse de la tige, au bilan des forces.

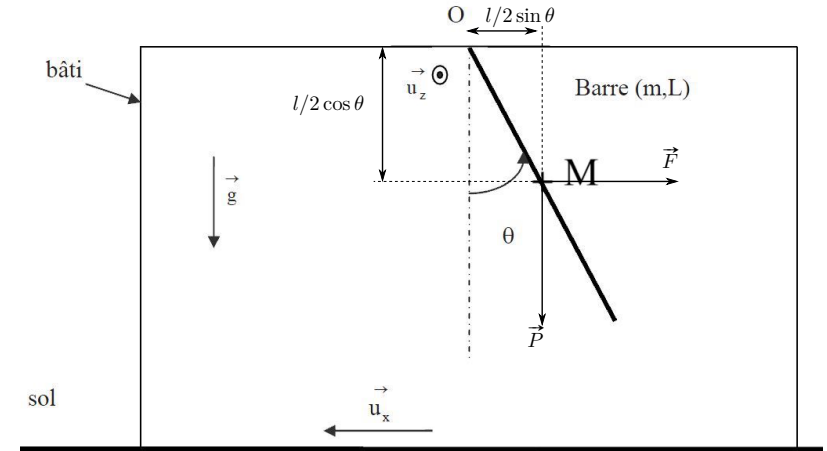
1. Faire le bilan des actions s'exerçant sur la tige de centre de masse M .

Réponse :

Dans le référentiel lié au sol non galiléen, on a le bilan des actions suivant :

- Poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$ (s'applique en G , centre d'inertie de la tige)

- Réaction de la liaison pivot parfaite : s'applique en O et de moment nul par rapport à (Oz)
- Couple de frottements $\Gamma = -\alpha\dot{\theta}$
- Force $\vec{F} = -m\vec{a}(t) = -ma(t)\vec{u}_x$ (s'applique en M , centre d'inertie de la tige)



2. Quel est le signe de la constante α ?

Réponse :

On a simplement $\alpha > 0$, car la puissance du couple de frottement $P = \Gamma\dot{\theta} = -\alpha\dot{\theta}^2$ doit être négative.

3. Calculer le moment $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$ de la force d'inertie \vec{F} par rapport à l'axe (Oz) .

Réponse :

Par définition

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = \pm d \|\vec{F}\|$$

où d est le bras de levier.

Comme la force s'exerce au point M situé au centre de la tige, $d = \frac{l}{2} \cos \theta$. De plus, si $a(t) > 0$, la force \vec{F} est dirigée suivant $-\vec{u}_x$ et tend à faire tourner le pendule dans le sens trigonométrique. Son moment par rapport à (Oz) est donc positif. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) = \frac{ml}{2} \cos(\theta) a(t)$$

4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ au cours du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3}{2l} (g \sin \theta - a(t) \cos \theta) = 0$$

Réponse :

D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la tige par rapport au point O dans le référentiel non galiléen lié au bâti, on a :

$$\frac{d\sigma_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) + \Gamma \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = \pm dmg$$

avec d le bras de levier, égal à $\frac{l}{2} \sin \theta$ car le poids s'applique au point M .

Comme le poids tend à faire tourner le pendule dans le sens horaire lorsque $\theta > 0$ et $\sin \theta > 0$, le moment du poids est négatif. On a donc

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -\frac{l}{2} \sin \theta mg$$

Enfin, à l'aide de définition du moment cinétique d'un solide $\sigma_{(Oz)} = J\omega = J\dot{\theta}$, on obtient au final :

$$\frac{dJ\dot{\theta}}{dt} = \frac{ml}{2} \cos \theta a(t) - \frac{l}{2} \sin \theta - \alpha \dot{\theta} \Rightarrow J\ddot{\theta} = \frac{ml}{2} \cos \theta a(t) - \frac{l}{2} \sin \theta - \alpha \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3}{2l}(g \sin \theta - a(t) \cos \theta) = 0}$$

5. En déduire, dans le cas où $a(t) = a$ est constante, l'angle θ_e lorsque le pendule trouve une position d'équilibre par rapport au bâti. On exprimera θ_e en fonction de a et g . Commenter l'expression obtenue.

Réponse :

À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$, on a donc

$$g \sin \theta_e = a \cos \theta_e \Rightarrow \tan \theta_e = \frac{a}{g}$$

Comme $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, il n'y a qu'une solution possible $\boxed{\theta_e = \arctan \frac{a}{g}}$.

On voit que ce résultat est en accord avec l'intuition, puisque si a est nulle, alors on retrouve $\theta_e = 0$ et si $a \gg g$, alors $\theta_e \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

L'hypothèse a constante n'est pas réaliste dans le cas d'un tremblement de terre. On va donc envisager un cas plus réaliste d'ondes sismiques où a varie suivant la forme $a = a_0 \cos(\omega t)$ où a_0 et ω sont des constantes. Il est conseillé d'utiliser les amplitudes complexes $\underline{a} = a_0$ et $\underline{\theta} = \theta_0 e^{j\varphi}$ avec $a(t) = \Re(\underline{a} e^{j\omega t})$ et $\theta(t) = \Re(\underline{\theta} e^{j\omega t})$.

6. Déterminer, dans le cas des petites oscillations, l'amplitude θ_0 des oscillations forcées du sismographe en fonction de a_0 , ω , m , l , α et g .

Réponse :

Dans le cas de petites oscillations, on a $\sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$, on a donc l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ml^2} \dot{\theta} + \frac{3g}{2l} \theta = \frac{3a}{2l} \iff \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = \frac{3a(t)}{2l}$$

avec, par identification entre les deux formes :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{ml}{\alpha} \sqrt{\frac{gl}{6}}$$

On passe ensuite en complexe (Régime sinusoïdal forcé) en utilisant l'équivalence temporelle/fréquentielle $\frac{d\underline{X}}{dt} = j\omega \underline{X}$:

$$(j\omega)^2 \underline{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{\theta} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \frac{3a}{2l} \Rightarrow \underline{\theta} = \frac{3a/2l}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega} \quad \text{puis} \quad \theta_0 = |\underline{\theta}| = \frac{3a_0/2l}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$$

Ainsi, on observe un comportement de type passe bas d'ordre deux pour la relation liant l'accélération extérieure $a(t)$ à l'angle θ .

7. On considère des ondes sismiques de fréquence très faible. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude de l'accélération a_0 du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable ?

Réponse :

Lorsque ω est négligeable par rapport à $\omega_0 = \sqrt{3g/(2l)}$, on a $\underline{\theta} \sim \frac{3a/2l}{\frac{3g}{2l}}$ d'où $\boxed{\theta_0 = \frac{a_0}{g}}$.

On a donc bien $\theta_0 \propto a_0$, le coefficient de proportionnalité étant égal à $\frac{1}{g}$.

Pour faire cette approximation, on doit avoir $\boxed{\omega \ll \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$

8. On considère des ondes sismiques de fréquence très élevée. Montrer que θ_0 est alors proportionnel à l'amplitude du déplacement du sol. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Quelle(s) condition(s) doit vérifier ω pour que l'hypothèse soit valable ?

Réponse :

Lorsque $\boxed{\omega \gg \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$, on a $\underline{\theta} \sim \frac{3a/2l}{-\omega^2}$ d'où $\boxed{\theta_0 = \frac{3a_0}{2l\omega^2}}$

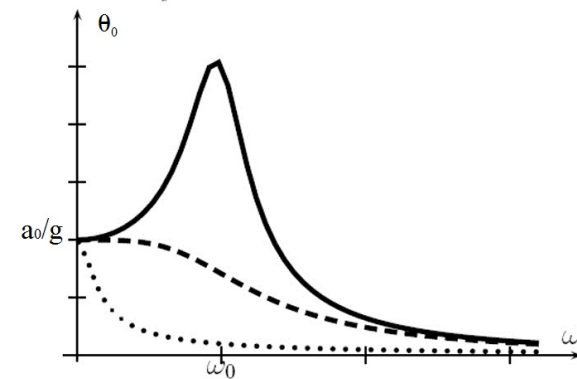
Le déplacement du sol est décrit par $\underline{x_s}$ tel que $\frac{d^2 \underline{x_s}(t)}{dt^2}$ soit en complexe $(j\omega)^2 \underline{x_s} = \underline{a}$. L'amplitude du déplacement du sol est $x_{s0} = \frac{a_0}{\omega^2}$.

On a donc $\theta_0 \propto x_{s0}$ avec un coefficient de proportionnalité de $\frac{3}{2l}$

9. Représenter l'allure générale de l'amplitude θ_0 en fonction de la pulsation ω .

Réponse :

On a donc l'allure suivante, avec (si $Q > 1/\sqrt{2}$) ou sans (si $Q < 1/\sqrt{2}$) résonance suivant la valeur de α :



IV Étude du Large Hadron Collider du CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.



FIGURE IV.1 – Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC

masse du proton	$m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg
masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8$ m.s ⁻¹
constante de Planck	$h_p = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s

Précision sur l'énoncé : dans tout le problème, "exprimer" signifie donner l'expression littérale et "calculer" signifie donner la valeur numérique.

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

IV.A Particule dans un champ électrique constant et uniforme

1. Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?

Réponse :

Le proton subit la force $\vec{F} = q\vec{E} = e\vec{E}$

2. Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. On prendra $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Réponse :

On a $P = m_p g \approx 10^{-27} \times 10 \approx 1 \times 10^{-26}$ N. De même, on a $F = eE \approx 10^{-19} \times 10^5 \approx 1 \times 10^{-14}$ N.

Ainsi $P \ll F$ et peut donc négliger le poids.

3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .

Réponse :

Le Principe Fondamental de la Dynamique indique $m_p \vec{a} = \vec{F} = e\vec{E}$, d'où $\vec{a} = \frac{e}{m_p} \vec{E}$

4. La zone de l'espace dans lequel règne le champ \vec{E} a une longueur L . En considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, exprimer le potentiel V_L du plan $x = L$.

Réponse :

On a $\vec{E} = E \vec{e}_x$. On sait que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -E dx$. Ainsi,

$$V_L - V_0 = V_L = \int_{V_0}^{V_L} dV = \int_{x=0}^{x=L} -E dx \Rightarrow \boxed{V_L = -EL}$$

5. En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de E puis de V_L .

Réponse :

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point d'entrée dans la zone accélératrice et le point de sortie :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}) = -\Delta E_p = -\Delta(qV) \quad (\text{IV.1})$$

$$\Rightarrow E_{c_f} - E_{c_0} = -e(V_L - V_0) \Rightarrow \boxed{E_{c_f} = -eV_L = eEL} \quad (\text{IV.2})$$

IV.B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

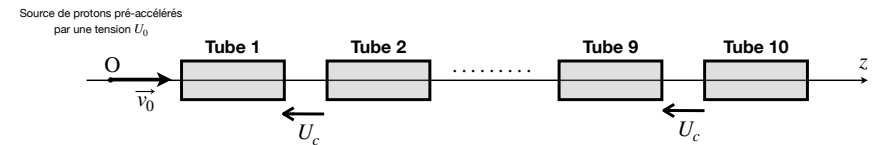


FIGURE IV.2 – Schéma du Linac 2.

6. Quel doit être le signe de U_c pour que les protons soient effectivement accélérés ?

Réponse :

Afin que les protons soient accélérés, il faut que le champ électrique soit orienté selon $+\vec{e}_z$. Or comme le champ électrique descend les potentiels, il faut que $U_c > 0$.

7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

Réponse :

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a comme dans la question précédente $\Delta E_c = eU_c$

8. Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .

Réponse :

L'énergie cinétique initiale est $E_c = eU_0$. À la sortie du n -ième tube, on a traversé $n - 1$ zones accélératrices et donc gagné $(n - 1)\Delta E_c$, d'où l'énergie cinétique finale : $E_c = eU_0 + e(n - 1)U_c$

9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10ème tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.

Réponse :

$$\text{On a } \frac{1}{2}m_p v^2 = eU_0 + e(n - 1)U_c \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m_p}[eU_0 + e(n - 1)U_c]}$$

L'application numérique donne $v = 6.10^7$ m/s

10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Réponse :

$v \approx c/5 < c/3$ donc ces protons ne sont pas relativistes.

IV.C Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le synchrotron à proton (PS) a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

Le synchrotron à proton est constitué de plusieurs éléments permettant d'une part, d'accélérer les protons (comme étudié dans la partie précédente) et d'autre part de les dévier (comme étudié dans cette partie). Ces éléments sont ensuite synchronisés afin de permettre aux protons de suivre une trajectoire circulaire tout en étant globalement accélérés.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_A est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

11. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .

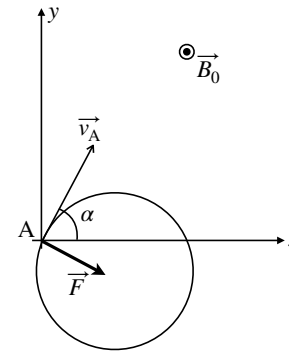
Réponse :

$$\text{Il s'agit de la force de Lorentz } \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

12. Reproduire la Figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la force subie à l'instant initial dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Réponse :



À l'instant initial, $\vec{v}_A = v_A \cos(\alpha)\vec{e}_x + v_A \sin(\alpha)\vec{e}_y$. Ainsi, le résultat du produit vectoriel donne :

$$\vec{F} = ev_A B_0 (\sin(\alpha)\vec{e}_x - \cos(\alpha)\vec{e}_y)$$

13. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

Réponse :

La puissance de cette force est nulle car $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{F} \perp \vec{v}$ d'après l'expression du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Ainsi, d'après le théorème de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = 0 \Rightarrow E_c = \text{cte} \Rightarrow v = \text{cte}$

14. Établir les équations différentielles portant sur v_x , v_y et v_z les composantes du vecteur vitesse dans le repère cartésien. Identifier les équations couplées. On pourra introduire ω_c la pulsation cyclotron, à exprimer en fonction de e , B_0 , et m_p .

Réponse :

On applique le PFD. Avec $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$, la force de Lorentz s'écrit : $\vec{F} = e(v_y B_0 \vec{e}_x - v_x B_0 \vec{e}_y)$. En projetant le PFD dans la base cartésienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

en posant $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$. Les équations selon \vec{e}_x et \vec{e}_y sont bien couplées.

15. Montrer alors que v_x et v_y sont solutions d'une même équation différentielle classique. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

Réponse :

À partir des équations couplées, en dérivant l'une par rapport au temps et en la combinant avec la seconde, on obtient les équations suivantes :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0$$

Les équations portant sur v_x et v_y sont des équations différentielles d'oscillateur harmonique, de pulsation propre ω_c .

16. On admet que la trajectoire du proton est un cercle. Représenter ce cercle sur votre figure et indiquer dans quel sens il est parcouru.

Réponse :

Il a déjà été représenté sur la figure précédente, il est parcouru dans le sens horaire. ou anti-trigonométrique

17. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_A .

Réponse :

On se place dans la base polaire de centre le centre C le centre du cercle décrit par le proton.

On a alors $\overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r$, avec R constant d'où $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et ainsi, le mouvement étant uniforme et circulaire, on en déduit que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

Par ailleurs, $\vec{F} = e\vec{v} \wedge B_0\vec{e}_z = ev_A B_0\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = ev_A B_0\vec{e}_r$ On applique alors le PDF : $m_p\vec{a} = \vec{F}$ qui donne en projection sur \vec{e}_r :

$$-m_p R \dot{\theta}^2 = m_p \frac{v_A^2}{R} = ev_A B_0 \Rightarrow \boxed{R = -\frac{v_A m_p}{e B_0}}$$

ainsi, on obtient un rayon négatif, typique d'une rotation dans le sens horaire.
