Physique - Devoir Surveillé 7

Le 22/03/2025

Barème final (quelques points bonus en plus à certaines questions si réponses vraiment bien justifiées) :

- I : 10 points
- II : 5 points
- III.A : 13 points
- III.B : 4 points
- III.C : 7 points
- IV : 12 points
- V : 6 points
- Soin, rigueur et rédaction : 3 points

Total de points : 60 ; total pour avoir 20/20 : 50 (donc 10 pts bonus) ; ramené à 20, la moyenne de classe est de 8,7/20 et la meilleure note à 16/20.

I Questions de cours

1. *On considère un électron de charge $-e$ et de masse m en orbite de rayon a autour d'un proton . Retrouver (en ordre de grandeur), l'expression de l'énergie cinétique minimale de ce dernier.*

Réponse :
Inégalité d'Heisenberg + cours

---

2. *On considère un électron de charge $-e$ et de masse m plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$.* ***On admet que la trajectoire de l'électron est circulaire****, dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. Retrouver le rayon R de la trajectoire en fonction des données du problème.*

Réponse :
Calcul classique en cours : $R = mv/(eB)$

---

3. *Retrouver les deux expressions des vitesses cosmiques pour un satellite de masse m par rapport à la Terre (rayon R_T, masse M_T).*

Réponse :
$E_m = -k/(2R_T)$ pour v_1 puis $E_m = 0$ pour v_2 ; suite dans le cours.

---

4. *On considère une tige rigide de moment d'inertie J_Δ suspendu à un fil vertical (axe $\Delta = Oz$). L'action du fil peut être modélisée par une force verticale (tension), ainsi qu'un couple de rappel $\Gamma = -C\theta$. Retrouvez l'équation du mouvement pour la tige.*

Réponse :
Équation de l'oscillateur harmonique ; détails dans le cours.

II Microscope à force atomique

La microscopie en champ proche tire profit de phénomènes physiques qui ont un effet notable sur des gammes de distances inférieures au micromètre. Il est ici proposé l'étude du microscope à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscope) permettant d'imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm.

La sonde de mesure d'un AFM est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixée une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via les forces de Van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres. Le mode oscillant permet, sans contact avec l'échantillon et donc sans risque de l'endommager, de mesurer le gradient de la force d'interaction entre la pointe et l'échantillon.

Les photographies de la figure II.1 représentent la pointe d'un microscope à force atomique. Elles ont été obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB). Au lieu d'être éclairés par de la lumière visible, comme c'est le cas dans un microscope optique traditionnel, les objets sont « éclairés » avec des électrons préalablement accélérés, avec une énergie cinétique $E_c \approx 5{,}0\,\text{keV}$.

Données :

- Masse d'un électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$;
- Charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{C}$;
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}\,\text{J.s}$;
- $1\,\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

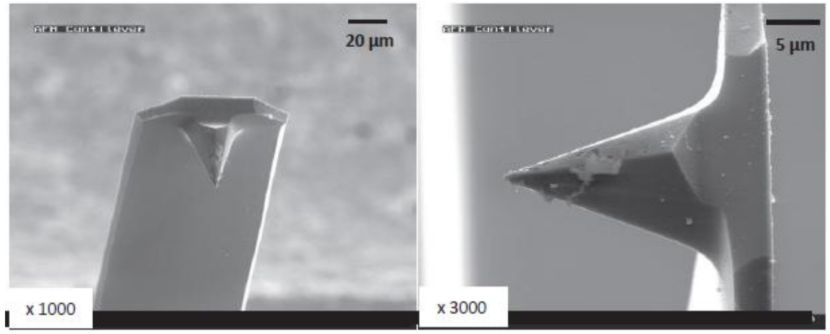


Figure II.1 – Images MEB d'une pointe AFM

1. *Évaluer la largeur et la hauteur de la pointe AFM ainsi que la largeur et l'épaisseur du levier. Confronter aux données de l'énoncé.*

Réponse :
À l'aide de l'échelle, on peut estimer la hauteur de la pointe à environ 20 µm, sa largeur à 8,3 µm, et l'épaisseur du levier à 3,5 µm. L'énoncé mentionne des dimensions micrométriques ; on est bon.
Il convient de plus de noter que la résolution (taille d'un pixel) est bien meilleure que le µm car même à l'extrémité de la pointe, on distingue encore des détails.

---

2. *Expliquer de manière qualitative pourquoi on ne peut pas obtenir cette image avec un microscope optique traditionnel.*

Réponse :
Le phénomène de diffraction des ondes lumineuses empêche de distinguer des détails (qui jouent le rôle de fentes pour la diffraction) à des échelles de l'ordre (ou inférieur) de la longueur d'onde, soit quelques centaines de nanomètres. La résolution de l'image permet de distinguer des détails dont la taille caractéristique est inférieure à la centaine de nm, ce qui serait donc impossible à l'aide d'un microscope optique traditionnel.

---

3. *Rappeler la définition de la longueur d'onde de De Broglie des électrons incidents.*

Réponse :

La longueur d'onde de De Broglie s'exprime : $\boxed{\lambda_{\text{DB}} = \dfrac{h}{mv}}$ où v est la vitesse des électrons incidents et m la masse d'un électron.

---

4. *En déduire son expression en fonction de l'énergie cinétique E_c des électrons et calculer sa valeur.*

Réponse :

Comme $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, on obtient $mv = \sqrt{2E_c m}$, donc : $\boxed{\lambda_{\text{DB}} = \dfrac{h}{\sqrt{2mE_c}}}$. L'application numérique donne : $\lambda_{\text{DB}} = 1,7 \times 10^{-11}\,\text{m} = 1,7 \times 10^{-2}\,\text{nm}$.

---

5. *Montrer que ce dispositif permet bien de dépasser les limitations du microscope optique.*

Réponse :

Le phénomène de diffraction associé au caractère ondulatoire de l'électron sera notable sur des échelles de l'ordre de λ_{DB}, qui est 4 ordres de grandeur plus faible que la longueur d'onde de la lumière visible. La résolution du MEB est donc bien meilleure que celle d'un microscope optique classique.

III L'ascenseur spatial

Imaginé par Constantin Tsiolkovski en 1895, l'ascenseur spatial a depuis été évoqué dans de nombreuses oeuvres de science-fiction (Arthur C. Clarke, Kim Stanley Robinson, Liu Cixin, ...). Il s'agit d'ériger un câble amarré au sol - au niveau de l'équateur - jusqu'au-delà de l'orbite géostationnaire de la Terre.
Ce câble est maintenu vertical grâce à l'effet d'entraînement créé par sa partie située au-delà de l'orbite géostationnaire.

On étudiera le dimensionnement (partie III.A) d'un ascenseur spatial, sur Terre ou sur Mars, avant de s'intéresser à sa stabilité (partie III.B). Pour cela, on vérifiera que ce dernier retourne à l'équilibre vertical en cas de légère perturbation extérieure et ainsi, ne s'effondre pas au sol !
L'étude énergétique de la mise en orbite d'un satellite à partir de l'ascenseur spatial sera finalement réalisée dans la dernière partie (III.C) de ce problème.

III.A Conception et dimensionnement d'un ascenseur spatial

On considère un ascenseur spatial, érigé autour de la Terre (masse $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$ et rayon $R_T = 6380\,\text{km}$) en rotation uniforme autour de l'axe $(O, \vec{e}_z)$ à la vitesse angulaire $\Omega = 72{,}7 \times 10^{-6}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Le câble de hauteur H représenté sur le schéma de la figure III.1 est réalisé à l'aide d'un matériau de masse volumique ρ et de section S.

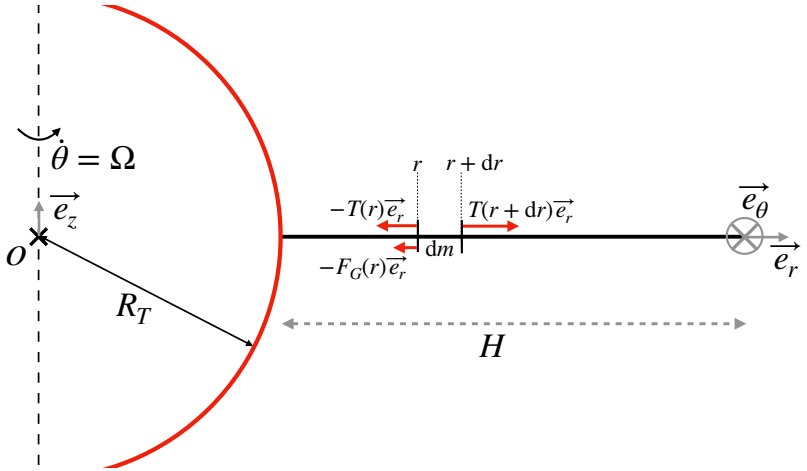


FIGURE III.1 – Modélisation de l'ascenseur spatial.

On considère que la portion de câble (notée Σ) comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ et de masse $\mathrm{d}m = \rho S \mathrm{d}r$ est soumise à trois forces :

— L'interaction gravitationnelle : $-F_G(r)\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{M_T \mathrm{d}m}{r^2}\vec{e}_r$
— La tension exercée par le câble situé sous la portion étudiée : $-T(r)\vec{e}_r$
— La tension exercée par le câble situé au dessus de la portion étudiée : $T(r+\mathrm{d}r)\vec{e}_r$

On rappelle de plus que Σ effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon r autour de la Terre.
On prendra pour les applications numériques $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{U}\cdot\text{S}\cdot\text{I}\cdot$

III.A.1 Expression de la tension le long du câble

1. *Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de Σ en fonction de r, Ω et des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de la base polaire.*

Réponse :
On a $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r}$ puis en dérivant, $\boxed{\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\theta}$ et $\boxed{\vec{a} = -r\Omega^2\vec{e}_r}$.
En effet, on a bien $\Omega = cste$ (vitesse angulaire de rotation de la Terre).

---

2. *Appliquer le principe fondamental de la dynamique à Σ puis en déduire une équation différentielle sur la tension du câble $T(r)$ dans la limite où $\mathrm{d}r \to 0$.*

Réponse :
L'application du PFD à Σ dans le référentiel galiléen géocentrique donne en projection selon $\vec{e}_r$:

$$-\mathrm{d}m r\Omega^2 = T(r+\mathrm{d}r) - T(r) - \mathcal{G}\frac{M_T \mathrm{d}m}{r^2}$$

De plus, on sait d'après l'énoncé que $\mathrm{d}m = \rho S \mathrm{d}r$ et on en déduit en remarquant que $\lim_{\mathrm{d}\to 0} \frac{T(r+\mathrm{d}r)-T(r)}{\mathrm{d}r} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}(r)$

$$-\rho S r\Omega^2 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} - \mathcal{G}\frac{M_T \rho S}{r^2}$$

On en déduit au final

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \rho S\left(\mathcal{G}\frac{M_T}{r^2} - r\Omega^2\right)} \qquad \text{(III.1)}$$

Pour aller plus loin :
Il peut être "tentant" de bidouiller pour répondre à cette question ! Pour rappel

- Il est interdit de faire des équivalents à zéro donc ne surtout pas écrire $T(r+\mathrm{d}r-T(r) \approx 0$. On peut plutôt effectuer un DL1 et écrire $T(r+\mathrm{d}r) = T(r)+\mathrm{d}rT'(r)+o((\mathrm{d}r)^2)$ d'où l'on obtient $T(r+\mathrm{d}r-T(r) \approx \mathrm{d}rT'(r)$
- La masse de Σ est bien donnée par l'énoncé ; c'est $\mathrm{d}m$ et non m. Pour rappel, $\mathrm{d}m = \rho S\mathrm{d}r \to 0$ lorsque $\mathrm{d}r \to 0$.
- Si $T(r)$ disparait de votre équation, ce n'est pas une bonne chose au vu de la question, et de la suivante !

---

3. *Dresser le tableau de variation de $T(r)$ et montrer que la tension passe par un maximum en $r = R_G = \left(\frac{\mathcal{G}M_T}{\Omega^2}\right)^{1/3}$*

   Réaliser alors l'application numérique pour R_G et commenter le résultat obtenu.

Réponse :

La valeur extrémale de la tension est obtenue lorsque la dérivée change de signe soit pour $\boxed{R_G = \left(\frac{\mathcal{G}M_T}{\Omega^2}\right)^{1/3}}$.

De plus, on remarque que la dérivée est positive pour $r < R_G$ et négative sinon. On en déduit que R_G correspond bien à un maximum.

L'application numérique donne $R_G \approx 42{,}2 \times 10^3\,\mathrm{km}$ = et cela correspond à l'orbite géostationnaire.

Pour aller plus loin :
Ainsi, les parties du cable sous R_g sont globallement attirée par la Terre (gravitation > force centrifuge) tandis que les parties au-dessus sont repoussées.

---

4. *Déduire de ce qui précède que la tension admet pour expression*

$$T(r) = T(R_T) + \rho S\mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} + \frac{R_T^2 - r^2}{2R_G^3}\right)$$

   avec $T(R_T)$, la tension au niveau du sol.

Réponse :
On intègre l'équation III.1 entre les rayons R_T et r et on obtient :

$$T(r) - T(R_T) = -\rho S\left(\mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right) + \frac{R_T^2 - r^2}{2}\Omega^2\right)$$

En effet, il est plus simple d'intégrer (en choisissant judicieusement les bornes) que de primitiver puis de trouver la constante à l'aide d'une condition limite).

De plus, on remarque que $\Omega^2 = \mathcal{G}M_T/R_G^3$. On en déduit alors le résultat attendu

$$\boxed{T(r) = T(R_T) + \rho S\mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r} + \frac{R_T^2 - r^2}{2R_G^3}\right)}$$

---

5. *Afin de maintenir le câble tendu, il faut s'assurer que $T(R_T) \geq 0$. À votre avis, que se passerait-il si cette condition n'est pas vérifiée ?*

Réponse :
Dans ce cas, le câble ne serait pas tendu et il s'effondrerait sur lui-même. À l'inverse, si $T(R_T) > 0$, c'est que le sol doit effectuer une force sur le câble pour l'empêcher de partir ; ce dernier va donc bien rester tendu (on peut faire le lien avec une fronde en rotation).

On se place alors dans le cas limite où $T(R_T) = 0$ dans toute la suite du problème. On cherche ensuite à déterminer une expression théorique pour H, la hauteur minimale du câble lui permettant de se maintenir à l'équilibre vertical.

De plus, **et pour cette partie uniquement**, l'équilibre mécanique de l'extrémité du câble en $r = R_T + H$ implique que $T(R_T + H) = 0$.

6. *Montrer que les conditions limites énoncées en $r = R_T$ et en $r = R_T + H$ pour la tension T impliquent que*

$$\alpha(\alpha + 1) = 2\left(\frac{R_G}{R_T}\right)^3$$

   avec $\alpha = (R_T + H)/R_T$, la hauteur du câble adimensionnée. En déduire l'expression de α puis réaliser les applications numériques pour α et H, la hauteur du câble correspondante.

Réponse :
La première condition limite en $r = R_T$ donne simplement $T(R_T) = 0$ et la seconde implique alors

$$T(R_T + H) = \rho S\mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H} + \frac{R_T^2 - (R_T + H)^2}{2R_G^3}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H} = \frac{(R_T + H)^2 - R_T^2}{2R_G^3}$$

De plus, on a $R_T + H = \alpha R_T$ et on obtient :

$$\frac{1}{R_T} - \frac{1}{\alpha R_T} = \frac{\alpha^2 R_T^2 - R_T^2}{2R_G^3} \Rightarrow \frac{1}{R_T}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = R_T^2\frac{\alpha^2 - 1}{2R_G^3}$$
$$\Rightarrow 2\frac{R_G^3}{R_T^3}\frac{\alpha - 1}{\alpha} = (\alpha + 1)(\alpha - 1)$$
$$\Rightarrow \boxed{2\frac{R_G^3}{R_T^3} = \alpha(\alpha + 1)}$$

On obtient donc un polynôme d'ordre 2 donc α est solution et une seule racine est positive ; on en déduit finalement après calculs

$$\boxed{\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{R_G}{R_T}\right)^3}}{2} \approx 23{,}6}$$

De plus, on a $H = R_T(\alpha - 1) \approx 144 \times 10^3\,\mathrm{km}$

Pour aller plus loin :
Au vu de la valeur de $2R_G^3/R_T^2 \gg 1$, on en déduit que $\alpha(\alpha + 1) \gg 1$ et donc que $\alpha \approx \alpha + 1$. Ainsi, on peut gagner un peu de temps en approximant α par $\alpha \approx \sqrt{2R_G^3/R_T^3} \approx 23,9$.

Afin de déterminer quel matériau utiliser pour la réalisation du câble, il convient d'étudier les contraintes maximales que ce dernier va endurer. On considère pour cela que le câble risque de céder si la force spécifique définie par $f = T/(\rho S)$ dépasse un certain seuil f_{rupture} qui dépend du matériau utilisé.

matériau	Acier	Kevlar	Nanotube de carbone
f_{rupture} $[\mathrm{MPa/(kg/m^3)}]$	0,63	2,5	100

7. *Effectuer l'application numérique concernant la force spécifique maximale $f_{\max} = T(R_G)/(\rho S)$ et préciser quel(s) matériau(x) peuvent convenir pour la réalisation du câble afin d'éviter que ce dernier ne cède suite à une tension trop importante.*

Réponse :
On a $f_{\max} = T(R_G)/(\rho S) = \mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_G} + \frac{R_T^2 - R_G^2}{2R_G^3}\right) \approx 48{,}4 \times 10^6\,\mathrm{N\cdot m^{-2}/(kg\cdot m^{-3})} = 48{,}4\,\mathrm{MPa/(kg\cdot m^{-3})}$. Ainsi, seuls les nanotubes de carbone peuvent convenir pour la réalisation du câble.

---

8. *Reprendre les applications numériques pour α, H et $f_{\max}$ dans le cas d'un ascenseur spatial construit sur la planète Mars. On donne pour cela $R_M = 3{,}39 \times 10^3\,\mathrm{km}$ et $M_M = 6{,}42 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$ et $\Omega_M \approx \Omega$. En effet, les planètes Terre et Mars ont sensiblement la même vitesse angulaire.*

Réponse :
On commence par calculer $R_G \approx 20{,}1 \times 10^3\,\mathrm{km}$. On en déduit que $\alpha_{\text{Mars}} = 19{,}9$ puis que $H_{\text{Mars}} \approx 62{,}1 \times 10^3\,\mathrm{km}$.
De même, on trouve $f_{\max,\text{Mars}} \approx 9{,}47\,\mathrm{MPa/(kg\cdot m^{-3})}$. Encore une fois, et bien que la force spécifique maximale soit plus faible que dans le cas de l'ascenseur spatial terrestre, seuls les nanotubes de carbone peuvent convenir.

III.A.2 Ajout d'un contrepoids arrimé à l'extrémité du câble

On décide d'arrimer une station de masse M jouant le rôle de contrepoids à l'extrémité du câble afin de réduire la hauteur minimale H de ce dernier.
La station effectue alors un mouvement circulaire uniforme de rayon $R_T + H$ autour de la Terre et à la vitesse angulaire Ω.

9. *On note alors $-T(R_T+H)\vec{e}_r \neq \vec{0}$, la tension exercée par le câble sur la station. Justifier brièvement ce résultat puis appliquer le principe fondamental de la dynamique à la station pour en déduire l'expression de $T(R_T+H)$ en fonction de M, R_G, M_T, $\mathcal{G}$, R_T et α*

On rappelle que la hauteur adimensionnée α a pour expression $\alpha = \frac{R_T+H}{R_T}$

Réponse :
L'extrémité du câble se trouve au rayon $r = R_T + H$ et la tension exercée par le câble sur la base est dirigé vers la Terre d'où le signe négatif.

L'accélération de la base a pour expression $-(R_T+H)\Omega^2\vec{e}_r$ et cette dernière est soumise à la force gravitationelle exercée par la terre ainsi qu'à la tension du cable. On en déduit par application du P.F.D. en projection selon le vecteur $\vec{e}_r$

$$-M(R_T+H)\Omega^2 = -T(R_T+H) - \mathcal{G}\frac{M_T M}{(R_T+H)^2} \Rightarrow T(R_T+H) = M(R_T+H)\Omega^2 - \mathcal{G}\frac{M_T M}{(R_T+H)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(R_T+H) = \mathcal{G}\frac{MM_T}{R_T^2}\frac{\left(\frac{\alpha R_T}{R_G}\right)^3 - 1}{\alpha^2}}$$

La prise en compte de cette nouvelle condition limite pour la tension T en $r = R_T + H$ permet d'aboutir à une équation dont la résolution permet d'exprimer la hauteur minimale adimensionnée α en fonction de la masse M :

$$\phi\frac{R_G}{R_T}\left[\left(\alpha\frac{R_T}{R_G}\right)^3 - 1\right] = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{R_T}{R_G}\right)^3\alpha^2(1-\alpha^2) \text{ avec } \phi = \frac{M}{\rho S R_G}$$

où $\rho S R_G$ est une masse représentative de celle du câble.
S'agissant d'une équation polynomiale difficile à résoudre, la méthode de résolution numérique de la sécante a été utilisée pour exprimer α puis H en fonction de ϕ et le résultat est représenté sur la figure III.2.

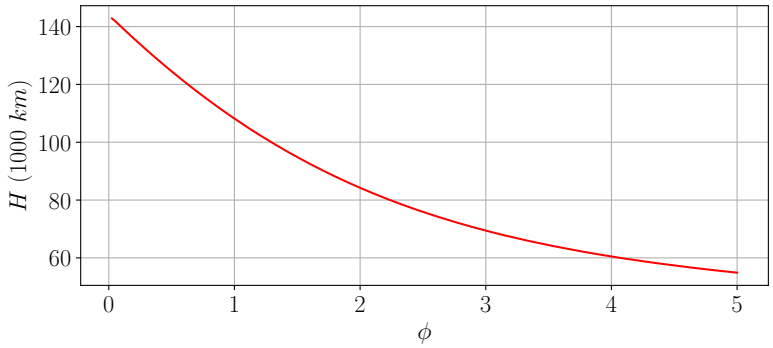


FIGURE III.2 – Hauteur minimale H du câble en fonction de la masse adimensionnée de la station $\phi = \frac{M}{\rho S R_G}$.

10. *En vous aidant de la courbe présentée sur la figure III.2, expliquer l'intérêt de placer une station à l'extrémité du câble. De plus, justifier brièvement que la force spécifique maximale $f_{\max} = T(R_G)/(\rho S)$ ne va pas varier avec la masse M de la station.*

Réponse :
L'ajout de la station permet de diminuer la hauteur minimale permettant de maintenir le câble à l'équilibre vertical (effet fronde). On constate que lorsque M augmente, la hauteur du câble tend vers R_G. En effet, placer la station sous l'orbite géo-stationnaire ne permettrait pas de compenser la gravitation lors d'une révolution géo-synchrone.

De plus, l'expression de la tension maximale $T(R_G)$ obtenue dans la partie précédente ne dépend pas de la hauteur H du câble et donc de M d'où le résultat.

III.B Stabilité pendulaire de l'ascenseur spatial

L'étude générale de la stabilité verticale du câble est une tâche complexe qui ne peut être traitée rigoureusement dans le cadre de cette étude. Aussi, on se propose d'étudier un modèle simplifié dont un schéma est représenté dans la figure III.3.
On effectue pour cela les hypothèses suivantes :

— L'ascenseur spatial assimilé à une tige indéformable de moment d'inertie J par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_z)$.

— On suppose que la résultante de la force de gravitation $\vec{F}_g = -mg^*\vec{e}_x$ s'applique au niveau du centre de masse G tel que $\overrightarrow{OG} = (H/2)\vec{e}_r$ où g^* tient compte du fait que le champ de pesanteur varie avec l'altitude.

— Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen à condition d'introduire une nouvelle force centrifuge prenant compte le mouvement de rotation terrestre : $\vec{F}_c = \int_0^H \rho S r\Omega^2\vec{e}_x\mathrm{d}r = m\frac{H}{2}\Omega^2\vec{e}_x$. On suppose de plus que cette force s'applique au point A tel que $\overrightarrow{OA} = a\vec{e}_r$.

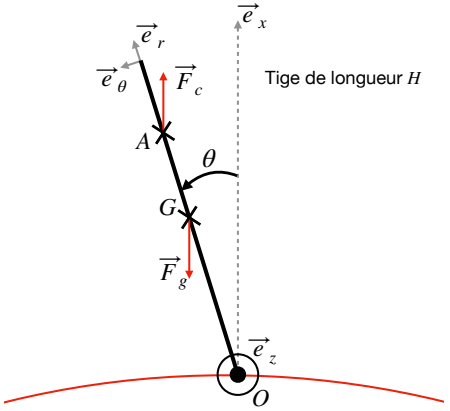


FIGURE III.3 – Représentation du modèle simplifié de l'ascenseur spatial rigidifié.

11. *Comme indiqué dans la partie III.A, la tension exercée par le sol sur le câble est nulle. En déduire une relation reliant H, Ω et g^* lorsque le câble est à l'équilibre vertical ($\theta = 0$).*
On supposera que cette relation reste valable dans toute la suite du mouvement.

Réponse :
Attention, on change ici de référentiel, on considère le terrestre et non le géocentrique. Ce dernier n'étant pas Galiléen l'énoncé propose de considérer une force supplémentaire pour régler le problème. A l'équilibre, on a bien la somme des forces qui est nulle.

Un rapide bilan des forces extérieures indique que $\vec{F}_c + \vec{F}_g + \vec{0} = \vec{0}$ à l'équilibre. On en déduit que $mg^* = m(H/2)\Omega^2 \Rightarrow \boxed{g^* = \dfrac{H\Omega^2}{2}}$.

---

12. *Montrer que l'équation du mouvement de la tige s'exprime selon*

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + m\frac{H}{2J}\Omega^2\left(a - \frac{H}{2}\right)\sin(\theta) = 0$$

en appliquant le théorème du moment cinétique à cette dernière.

Réponse :
On considère la tige dans le référentiel terrestre supposé galiléen (c.f. énoncé et prise en compte de la force centrifuge). Le bilan des actions extérieures indique
— $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_g) = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_g = \frac{H}{2}\vec{e}_r \wedge (-mg^*)\vec{e}_x = \frac{H}{2}mg^*\sin(\theta)\vec{e}_z$
— $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_c) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_c = a\vec{e}_r \wedge m(H/2)\Omega^2\vec{e}_x = -a\frac{H}{2}m\Omega^2\sin(\theta)\vec{e}_z$
On peut alors appliquer le TMC à la tige par rapport à l'axe $(O\vec{e}_z)$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\begin{aligned} J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{H}{2}mg^*\sin(\theta) - a\frac{H}{2}m\Omega^2\sin(\theta) \\ \Rightarrow J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= m\left(\frac{H}{2}\right)^2\Omega^2\sin(\theta) - a\frac{H}{2}m\Omega^2\sin(\theta) \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + m\frac{H}{2J}\Omega^2\left(a - \frac{H}{2}\right)\sin(\theta) = 0} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

---

13. *À quelle condition portant sur a et H la position d'équilibre verticale de la tige sera stable ? Que risque-t-il de se produire si cette condition n'est pas remplie ?*

Réponse :
En cas de légère perturbation, on a $|\theta| \ll 1$ et donc $\sin(\theta) \approx \theta$. L'équation précédente est donc du type oscillateur harmonique si $m\frac{H}{2J}\Omega^2\left(a - \frac{H}{2}\right) > 0$ soit si $\boxed{a > \dfrac{H}{2}}$.

Le cas échéant, si la force centrifuge s'applique sous le centre de masse G de la tige, une petite perturbation sera amplifiée et la tige risque de tomber ce qui, au vu de sa longueur, peut être très dangereux !

On se propose finalement d'établir l'expression de a afin de pouvoir conclure quant à la stabilité. On rappelle pour cela que le moment de la force centrifuge peut aussi s'exprimer selon :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_c) = \int_0^H \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\vec{F}_c = \int_0^H r\vec{e}_r \wedge \rho S r\Omega^2\vec{e}_x \mathrm{d}r$$

14. *Déduire de ce qui précède l'expression de a en fonction de H et conclure quant à la stabilité de la tige.*

Réponse :
On calcule donc le moment de la force centrifuge des deux manières proposées. On a d'une part

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_c) = -a\frac{H}{2}m\Omega^2\sin(\theta)$$

comme établi précédemment. De plus, la formule de l'énoncé donne

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_c) = -\int_0^H \sin(\theta)\rho S\Omega^2 r^2\mathrm{d}r = -\sin(\theta)\rho S\Omega^2\frac{H^3}{3}$$

or $m = \rho SH$ d'où au final

$$-a\frac{H^2}{2}\rho S\Omega^2\sin(\theta) = -\sin(\theta)\rho S\Omega^2\frac{H^3}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}H}$$

On obtient donc bien $a > H/2$ et donc la position verticale de la tige sera stable d'après la question précédente.

III.C Mise en orbite de satellites depuis l'ascenseur spatial

Dans cette partie, on souhaite étudier la mise en orbite de satellites à différentes altitudes, et ce, depuis l'ascenseur spatial ou depuis le sol au niveau de l'équateur.

15. *On considère un satellite de masse m en orbite autour de la Terre. Montrer que sa trajectoire est nécessairement plane.*

Réponse :
Le satellite n'est soumis qu'à une unique force centrale $\vec{F}_g = -k/r^2\vec{e}_r$ dont le moment par rapport au centre de la Terre est nul. On en déduit que le moment cinétique du satellite $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est constant donc le vecteur position $\vec{v}$ reste perpendiculaire à un vecteur constant au cours du mouvement du satellite. La trajectoire est donc plane (contenue dans le plan $\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0$.

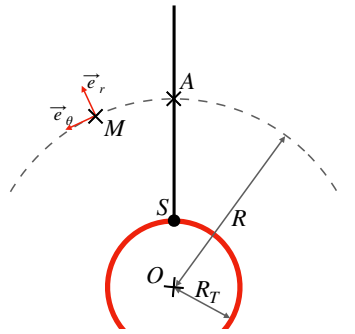


FIGURE III.4 – Schéma reprsentant la mise en orbite d'un satellite M depuis l'ascenseur spatial.

16. *On admet ensuite que la trajectoire du satellite est circulaire de rayon R comme représentée sur la figure III.4. Montrer que cette dernière est uniforme puis exprimer la norme de la vitesse du satellite v en fonction de R, $\mathcal{G}$ et M_T.*

Réponse :
Dans le cas d'un mouvement circulaire, le vecteur position s'exprime selon $\vec{r} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ puis le vecteur accélération $\vec{a} = -R(\dot{\theta})^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Il convient alors d'appliquer le principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen

$$-mR(\dot{\theta})^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R^2}\vec{e}_r$$

d'où l'on déduit par projection suivant $\vec{e}_\theta$ que $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{v = R\dot{\theta} = cste}$ et on obtient bien un mouvement uniforme.
De plus, la projection du PFD selon $\vec{e}_r$ donne

$$-mR(\dot{\theta})^2 = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R^2} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R}}}$$

17. *En déduire les expressions des énergies cinétique, potentielle et mécanique $E_{m,o}$ du satellite en orbite de rayon R autour de la terre et montrer en particulier que $E_{m,o} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2R}$.*

Réponse :
On a $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{2R}$ puis $E_p = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R}$ et finalement $E_m = E_c + E_p = \mathcal{G}mM_T\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right)$ d'où au final

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2R}}$$

---

18. *Justifier ensuite que l'énergie mécanique $E_{m,s}$ du satellite lorsque ce dernier s'apprête à décoller au niveau sol (point S) s'exprime selon*

$$E_{m,s} = \frac{1}{2}m\left(R_T\Omega\right)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$$

Réponse :
On a alors $E_{m,s} = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}m\left(R_T\Omega\right)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$ car la vitesse du satellite est égale à la vitesse d'entraînement du sol terrestre au niveau de l'équateur (rayon R_T) soit $\vec{v}_s = \Omega R_T\vec{e}_\theta$.

---

19. *Établir finalement l'expression de l'énergie mécanique $E_{m,a}$ du satellite lorsque ce dernier se trouve arrimé à l'ascenseur spatial (point A), en rotation (rayon R) synchrone autour de la Terre.*

Réponse :
Cette fois ci, on a $E_{m,a} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R} + \frac{1}{2}m\Omega^2R^2$ car la vitesse du satellite vaut alors $\vec{v}_a = \Omega R\vec{e}_\theta$.

On note W_s l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour le placer en orbite de rayon R depuis le sol et W_a, l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour le placer sur la même orbite depuis l'ascenseur spatial.

20. *Exprimer alors l'écart $e = W_s - W_a$ entre les coûts énergétiques des deux trajets puis montrer que $e > 0$. Justifier alors l'intérêt de l'utilisation d'un ascenseur spatial pour la mise en orbite d'un satellite.*

Réponse :
On a d'une part $W_s = E_m - E_{m,s}$ (théorème de l'énergie mécanique) et $W_a = E_m - E_{m,a}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
e = E_{m,a} - E_{m,s} &= -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R} + \frac{1}{2}m\Omega^2R^2 - \frac{1}{2}m\left(R_T\Omega\right)^2 + \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T} \\
&= \mathcal{G}mM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2}m\Omega^2\left(R^2 - R_T^2\right) \\
&= \mathcal{G}mM_T\frac{R - R_T}{R_TR} + +\frac{1}{2}m\Omega^2\left(R - R_T\right)\left(R + R_T\right) \\
\Rightarrow &\boxed{e = m(R - R_T)\left(\frac{\mathcal{G}M_T}{R_TR} + \frac{1}{2}\Omega^2(R + R_T)\right) > 0}
\end{aligned}$$

Et on obtient bien le résultat attendu. On vient alors de démontrer que l'énergie à fournir au satellite pour un lancement depuis le sol W_s est toujours supérieure à celle à fournir depuis l'ascenseur spatial W_a. Ce dernier permet donc de réaliser des économies en termes de carburant.

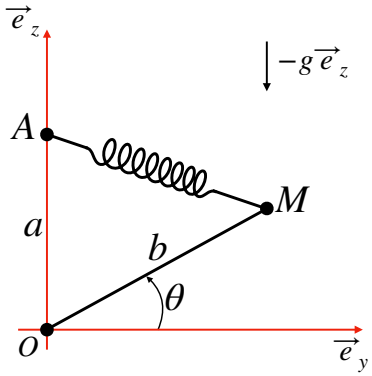
---

21. *À votre avis, pourquoi n'a-t-on pas pris en compte dans le bilan énergétique précédent l'énergie à fournir au satellite pour le faire monter le long de l'ascenseur spatial jusqu'au point A ?*

Réponse :
L'énergie nécessaire à ce trajet (qui est en faite égale à e) peut être fournie par une source d'énergie extérieure au satellite et transmise par exemple sous forme électrique ou optique (LASER) le long du câble. Elle n'implique donc pas d'adapter le dimensionnement du satellite à une quantité de carburant supplémentaire.

IV Gravimètre

On étudie un dispositif permettant de mesurer l'accélération de la pesanteur $g = \|\vec{g}\|$, appelé gravimètre à ressort.



Ce système est constitué d'une tige OM, de longueur fixe b, de masse négligeable, pouvant tourner autour d'un axe horizontal $(O, \vec{e}_x)$ et supportant une masse ponctuelle m en M.
De plus, M est soumis à l'action d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, fixé au point A. La longueur OA est notée a et reste constante au cours du mouvement.

On suppose que $mg < ka$.

1. *Exprimer la longueur au carré $\|\overrightarrow{AM}\|^2$ du ressort en fonction de a, b et θ. On pourra utiliser judicieusement la relation de Chasles et vérifier le résultat obtenu à l'aide de cas particuliers.*

Réponse :
On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ et on en déduit

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{AM}\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\theta)}$$

On obtient alors pour $\theta = \pi/2$, $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (a-b)^2$ et pour $\theta = -\pi/2$, on a $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = (a+b)^2$.
Ces deux résultats sont en accord avec le schéma.
Pour aller plus loin :
Comme la question l'indique, il faut bien faire une démonstration générale, et seulement après vérifier à l'aide d'exemple. On ne peut pas déduire un résultat général à partir d'exemples, sous risque de se tromper.
On est ici au début de l'exercice et toute erreur sera vraiment dommageable.

---

2. *Montrer que le système est conservatif et que son énergie potentielle peut se mettre sous la forme*

$$E_p(\theta) = b(mg - ka)\sin\theta + \frac{1}{2}k(a^2 + b^2)$$

Réponse :
La seule force non conservative est celle exercée par la tige sur le point M. Or cette force s'exerce selon le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et donc sa puissance est nulle (car la vitesse est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$). Le système a donc une évolution conservative.
De plus, on a $E_{p,p} = +mgz = mgb\sin(\theta)$. On en déduit l'expression de l'énergie potentielle totale en ajoutant la contribution liée au ressort :

$$\begin{aligned} E_p = E_{p,p} + E_{p,el} &= mgb\sin(\theta) + \frac{1}{2}k\|\overrightarrow{AM}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(a^2 + b^2\right) + (mg - ka)b\sin(\theta) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

---

3. *On considère que $\theta \in]-\pi, \pi]$. Déterminer les deux positions d'équilibre du système notées θ_1 et θ_2 avec $\theta_2 > \theta_1$.*

Réponse :
Le système est à l'équilibre lorsque $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$ soit lorsque

$$\underbrace{(ka - mg)b}_{\neq 0}\cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi/2 \text{ et } \theta_1 = -\pi/2$$

---

4. *Préciser pour chacune des positions d'équilibre si elles sont stables ou instables. Interpréter physiquement en comparant au cas du pendule simple rigidifié.*

Réponse :
Ces positions sont stables lorsque $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{eq}) > 0$. On a ici

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = (ka - mg)b\sin(\theta)$$

Pour $\theta = \theta_1 = -\pi/2$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_1) = (mg - ka)b < 0$ car $mg < ka$. Cette position d'équilibre est donc instable.
Pour $\theta = \theta_2 = \pi/2$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_2) = (ka - mg)b > 0$. Cette position d'équilibre est donc stable.
Dans le cas du pendule rigide, il n'y a pas de ressort ($k = 0$, donc $mg > ka$, condition opposée à celle de l'énoncé) et on retrouve donc les même positions d'équilibre mais avec des stabilités inversées.

On se place maintenant au voisinage des positions d'équilibre, et on étudie l'écart à l'équilibre, caractérisé par la variable u telle que $\theta = \theta_{eq} + u$ avec $|u| \ll |\theta_{eq}|$. On rappelle la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction $f : x \mapsto f(x)$ au voisinage de a :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2),$$

où $f'(a)$ et $f''(a)$ les dérivées première et seconde de f en $x = a$.

5. *En utilisant un développement limité à l'ordre deux de l'énergie potentielle, déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction de u, $\dot{u}$, θ_{eq}, l'énergie mécanique à l'instant initial et des paramètres de l'énoncé.*

Réponse :
Le mobile a pour vecteur vitesse $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et donc pour énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$. On en déduit pour l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mb^2\left(\frac{\mathrm{d}(\theta_{eq} + u)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(a^2 + b^2\right) + (mg - ka)b\sin(\theta_{eq} + u)$$

On obtient alors à l'aide d'un DL2 de la fonction sinus :

$$\frac{1}{2}mb^2\dot{u}^2 + \frac{1}{2}k\left(a^2 + b^2\right) + (mg - ka)b\left(\sin(\theta_{eq}) + \underbrace{\cos(\theta_{eq})}_{=0}u - \sin(\theta_{eq})\frac{u^2}{2}\right)$$

---

6. *Montrer alors que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme suivante*

$$\ddot{u} + \sin(\theta_{eq})\left(\frac{ka}{mb} - \frac{g}{b}\right)u = 0 \tag{IV.1}$$

Réponse :

On applique le TPM au point M dans le référentiel galiléen lié au bâti

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P_{\text{nc}} = 0 \Rightarrow mb^2\ddot{u}\dot{u} + (ka - mg)b\sin(\theta_{eq})\dot{u}u = 0$$

On simplifie alors par $\dot{u}$ (qui n'est pas identiquement nul, sauf en cas d'absence de mouvement, cas trivial) et on ré-écrit l'équation sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{ka}{mb} - \frac{g}{b}\right)\sin(\theta_{eq})u = 0$$

d'où le résultat.

Remarque :

Tant que le signe de $(ka - mg)\sin(\theta_{eq})$, on ne peut pas dire s'il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique. En effet, cela serait le cas uniquement si l'expression considérée est strictement positive.

---

7. *Retrouver l'état de stabilité des positions d'équilibre $\theta_{eq} = \theta_1$ et $\theta_{eq} = \theta_2$ à partir d'une étude de l'équation IV.1.*

Réponse :

Pour $\theta_{eq} = \theta_1 = -\pi/2$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\left(\frac{g}{b} - \frac{ka}{mb}\right)}_{<0}u = 0$$

Cette équation n'est pas celle de l'oscillateur harmonique donc l'équilibre est instable.

Pour $\theta_{eq} = \theta_2 = \pi/2$, on a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\left(\frac{ka}{mb} - \frac{g}{b}\right)}_{>0}u = 0$$

Cette équation est celle de l'oscillateur harmonique donc l'équilibre est stable. On retrouve alors bien les résultats de la question 4.

---

8. *Dans le cas stable, exprimer la pulsation propre ω_0 des petites oscillations autour de cette position d'équilibre et en déduire la période propre T_0 associée. Donner ensuite la période propre des oscillations T_0' du pendule simple rigidifié.*

Réponse :

On a dans le cas stable ($\theta_{eq} = \pi/2$), $\omega_0 = \sqrt{\frac{ka}{mb} - \frac{g}{b}}$ et on en déduit

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = \frac{2\pi\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{ka}{m} - g}}$$

De même, dans le cas du pendule simple, on a $T_0' = 2\pi\sqrt{b/g}$

On souhaite alors modifier la valeur de a de manière à avoir $\frac{ka}{mb} \approx \frac{g}{b}$.

9. *Comment peut-on faire en pratique pour arriver à ce résultat ?*

Réponse :

Lorsque cette condition est remplie, on observe que la période des petites oscillations tend vers l'infini (oscillations très lentes). Il convient donc de modifier la hauteur a de manière à obtenir des oscillations les plus lentes possibles, ce qui est simple à réaliser, même sans chronomètre.

Cependant, si la hauteur a est trop augmentée, la position haute devient instable et il convient de re-diminuer cette valeur.

---

10. *En quoi ce système est-il plus adapté qu'un pendule pesant pour mesurer l'accélération de la pesanteur g ?*

Réponse :

Comme la période des oscillations peut être réglée de façon à être très grande, elle peut être mesurée avec une grande précision relative, ce qui permet de mesurer g très précisément, connaissant k, a et b.

De plus, en cas de petit changement de g, la période des petites oscillations va grandement varier pour le système considéré dans cet exercice et beaucoup moins dans le cas du pendule pesant Considérons les deux exemples suivants pour $ka/m = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $b = 1\,\mathrm{m}$:

$g\ (m/s^2)$	9.8	9.85
$T_{\text{ressort}}(s)$	14,05	16,22
$T_{\text{simple}}(s)$	2,00708	2,00198

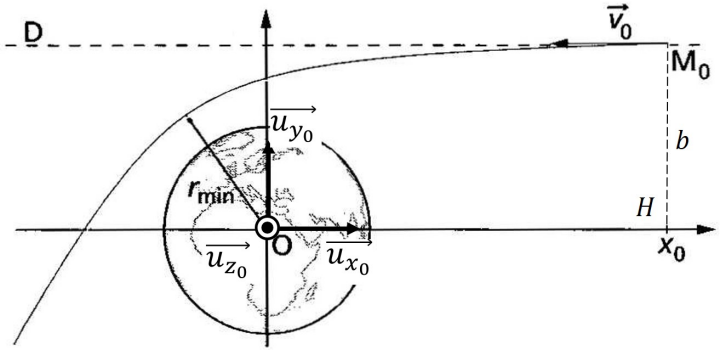
Dans le cas du pendule simple, la variation de la période est donc très faible et difficile à mesurer. Pour le pendule avec ressort, la variation peut être mesurée beaucoup plus simplement. Ce système est donc capable de détecter des petites variations de g.

V Distance minimale de passage d'un astéroïde

Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = (O, x_0, y_0, z_0)$ est supposé galiléen, et on néglige les effets gravitationnels du Soleil.

Un astéroïde de masse m (négligeable devant la masse M_T de la Terre) est repéré initialement en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que l'influence gravitationnelle de cette dernière est négligeable.

On mesure son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{u_{x_0}}$. On note H la projection de M_0 sur $\overrightarrow{u_{x_0}}$. La distance M_0H est notée b, et est appelée paramètre d'impact.



1. *Montrer que l'énergie mécanique $E_m(M)$ et le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M)$ se conservent. Exprimer ces deux constantes du mouvement en fonction des données initiales.*

Réponse :
La seule force considérée ici est la force centrale conservative d'interaction gravitationnelle donc il n'y a pas de forces non-conservatives appliquées au système astéroïde et on peut lui appliquer le théorème de la puissance mécanique dans le référentiel géocentrique galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_m = \text{cste}$$

A $t = 0$, l'astéroïde est à l'infini ($E_{p,p} = 0$ par choix arbitraire mais commun) donc $\boxed{E_m = E_c(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2}$.

De même, $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} = \vec{0}$ (la force est centrale) donc d'après le théorème du moment cinétique appliqué à l'astéroïde par rapport au point O (toujours dans le même référentiel galiléen), on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}$$

A $t = 0$, on obtient par ailleurs

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v_0} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge -v_0\,\vec{e}_x == (x\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y) \wedge -v_0\,\vec{e}_x = L_O\overrightarrow{u_z} \quad \text{avec} \quad L_O = mbv_0$$

---

2. *Exprimer l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}$ en fonction de $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle, m, M_T, b, v_0 et r.*

Réponse :
On a, à un instant quelconque, $E_m = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)$. Or $L_O = mr^2\dot{\theta}$. On en déduit :

$$E_m = \underbrace{-\frac{k}{r} + \frac{L_O^2}{2mr^2}}_{E_{p,\text{eff}}} + \frac{1}{2}m(\dot{r})^2$$

Soit, finalement, $\boxed{E_{p,\text{eff}} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r} + \frac{L_O^2}{2mr^2} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r} + \frac{mb^2v_0^2}{2r^2}}$
Au vu de la première question, il vaut mieux se débarrasser de la constante L_O au profit de son expression en fonction des données du problème.

---

3. *Déterminer la distance minimale r_{min} à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre. On utilisera très utilement l'énergie potentielle effective obtenue à la question précédente. Simplifier ensuite le résultat obtenu sachant que $b \ll \mathcal{G}M_T/v_0^2$. On réalisera pour ce faire un développement limité au premier ordre. On rappelle que*

$$\sqrt{1+X} \underset{X\to 0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}X$$

Réponse :
Au point où l'astéroïde est le plus proche de la Terre, l'énergie cinétique radiale sera nulle (car $\dot{r} = 0$ en ce point) et on a $E_m = E_{p,\text{eff}}$ soit :

$$-\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_{min}} + \frac{m(v_0b)^2}{2{r_{min}}^2} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{V.1}$$

Il s'agit d'une équation polynomiale en r_{min} que l'on peut résoudre : $r_{min}^2 + \frac{2\mathcal{G}M_T}{v_0^2}r_{min} + b^2 = 0$ d'où le obtient $\Delta = 4(\mathcal{G}^2M_T^2/v_0^4 + b^2)$ puis :

$$r_{min,\pm} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

parmi ces deux solutions, une seule est positive :

$$\boxed{r_{\min} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} + \sqrt{\mathcal{G}^2M_T^2/v_0^4 + b^2}}$$

On peut ensuite effectuer un DL à l'ordre 1 de cette expression :

$$r_{\min} \sim \frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\left(-1 + 1 + \frac{v_0^4b^2}{2\mathcal{G}^2M_T^2}\right) \sim \frac{v_0^2b^2}{2\mathcal{G}M_T}$$

---

4. *À quelle condition l'astéroïde s'écrase-t-il sur la Terre ?*

Réponse :
Il y aura collision si $r_{\min} < R_T$ soit si

$$\frac{v_0^2b^2}{2\mathcal{G}M_T} < R_T \quad \Rightarrow \quad b < \sqrt{\frac{2\mathcal{G}R_TM_T}{v_0^2}}$$