

Physique - Devoir Surveillé 6

Le 07/02/2026

Sujet rouge

I Refroidissement d’atomes par LASER

Données :

- Masse molaire du césium : $M_{\text{Cs}} = 133 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Nombre d’Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Planck : $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- Charge de l’électron : $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$

I.A Première étape du refroidissement

On chauffe dans un four un gaz d’atome de césium à une température de 500 K. La relation entre l’énergie cinétique d’un atome de césium et la température est donnée par la formule :

$$E = \frac{3}{2} k_B T,$$

où $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et T la température en Kelvin.

1. Quelle est la vitesse d’un atome de césium à la sortie du four ?

Réponse :

On a $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 N_A k_B T}{M_{\text{Cs}}}} \approx 306 \text{ m/s}$

Attention à mettre la masse molaire en kg/mol.

2. Quelle est alors sa quantité de mouvement notée p_C ?

Réponse :

On a simplement $p_C = m v = \frac{M_{\text{Cs}} v}{N_A} = \sqrt{\frac{3 M_{\text{Cs}} k_B T}{N_A}} = 6,76 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

On considère pour simplifier que l’atome de césium possède deux niveaux d’énergie notés $E_0 = 1,2 \text{ eV}$ pour l’état fondamental et $E_1 = 2,66 \text{ eV}$ pour l’état excité. On allume alors un LASER de longueur d’onde λ dans la même direction que le déplacement de l’atome de césium mais dans le sens opposé.

3. Quelle longueur d’onde λ doit on choisir afin que les photons émis par le LASER puissent être absorbés par les atomes de césium ?

Réponse :

Un photon sera absorbé lorsque $\Delta E = h \nu = h \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h c}{E_1 - E_0} \approx 850 \text{ nm}$

4. Montrer alors que la quantité de mouvement d’un photon du laser notée p_p s’exprime selon

$$p_p = \frac{E_1 - E_0}{c}$$

puis réaliser l’application numérique.

Réponse :

On a $p_p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_1 - E_0}{c} \approx 7,8 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

5. En admettant que la quantité de mouvement totale se conserve, quelle sera la vitesse de l’atome de césium après avoir absorbé le photon ?

Réponse :

Avant le choc, on a $p_{\text{total}} = p_C - p_p$. Après le choc, on a $p_{\text{total}} = p'_C$. On en déduit que la quantité de mouvement de l’atome de césium diminue et donc $p'_C = p_C - p_p \Rightarrow v' = \frac{p_C - p_p}{m} = v - \frac{\Delta E N_A}{c M_{\text{Cs}}} \approx 306 \text{ m/s}$. En pratique, un seul photon ne permet pas de diminuer sensiblement la vitesse de l’atome de césium.

6. Combien de photons doit-il absorber pour s’arrêter ? Que se passe-t-il si trop de photons sont absorbés ?

Réponse :

On généralise le résultat précédent au cas de l’absorption de n photons : $v' = v - n \frac{p_p N_A}{M_{\text{Cs}}}$. L’atome sera stoppé

lorsque $v' = 0 \Rightarrow n = \frac{v c M_{\text{Cs}}}{\Delta E N_A} \approx 87000$.

Si l’atome absorbe trop de photons, il sera accéléré dans l’autre sens et donc son énergie cinétique va ré-augmenter.

I.B Piegage à effet Doppler

Pour éviter ce phénomène, on allume ensuite au total 6 lasers identiques dans les 3 directions de l’espace et pour chaque direction dans les 2 sens pour le piéger. On utilise une longueur d’onde λ_D très légèrement plus grande que λ et on considère l’effet Doppler.

Ainsi, lorsque l’atome de césium avance vers un LASER, il perçoit une fréquence $\nu_+ = (1 + v/c) \nu_D$ avec $\nu_D = c/\lambda_D$. Lorsque l’atome s’en éloigne, il perçoit une fréquence $\nu_- = (1 - v/c) \nu_D$

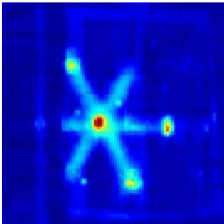
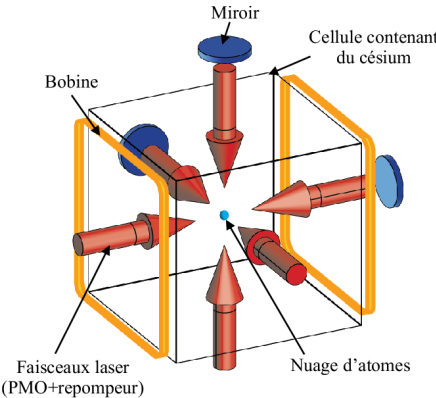


FIGURE I.1 – A gauche, schéma représentant les trois paires d’onde laser utilisées pour capturer et refroidir des atomes de césium. A droite, photographie en caméra infra-rouge du nuage d’atomes Source : Thèse de M. Lepers au laboratoire PhLAM à Lille.

7. Bien que le système de refroidissement est basé sur l’utilisation de deux LASER par directions, justifier brièvement qu’à l’arrêt, l’atome ne sera sensible à aucun des LASER.

Réponse :
A l’arrêt, on a $v = 0$ donc $\nu_{\pm} = \nu_D = c/\lambda_D \neq c/\lambda$. Ainsi le photon ne sera pas accordé en fréquence avec la transition atomique et donc le photon ne sera pas absorbé.

8. Montrer de même qu’en cas de déplacement à la vitesse v vers un des deux LASER, l’atome sera effectivement freiné (Aucune application numérique n’est attendue ici).

Réponse :
Lorsque le photon se déplace, il va percevoir deux fréquences distinctes (une par LASER) et une seule sera accordée à sa transition atomique. En effet, l’atome va percevoir une fréquence $\nu_- < \nu_D \Rightarrow \lambda_- > \lambda_D > \lambda$ de la part du LASER dont il s’éloigne. Il n’y aura donc pas d’absorption et donc pas d’accélération (le photon pousserait l’atome dans ce cas). De plus, l’atome va percevoir une fréquence $\nu_+ > \nu_D \Rightarrow \lambda_+ < \lambda_D \approx \lambda$ de la part du LASER dont il se rapproche. Il va donc pouvoir absorber un (ou plusieurs) photons qui vont ainsi le ralentir.

Une fois un photon absorbé, l’atome de césium peut en émettre un autre, de même énergie, mais dans une direction aléatoire. Ainsi, on considère qu’au minimum, la norme de la quantité de mouvement de l’atome de césium sera en moyenne égale à celle des photons soit $p_m = \frac{E_1 - E_0}{c}$.

9. A quelle température minimale peut on alors obtenir le gaz de césium ?

Réponse :
On obtient alors

$$E_c = \frac{p_m^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow T = \frac{(\Delta E)^2}{3k_B m c^2} = 64 \text{ nK}$$

II Piégage de particules dans un champ magnétique

La Terre est entourée de zones, appelées "ceintures de Van Allen", où des particules chargées, de haute énergie, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Dans ces zones, les trajectoires des particules s’enroulent autour des lignes de champ terrestre.

Au fur et à mesure que les particules se rapprochent des pôles magnétiques de la terre, les trajectoires se resserrent et la composante longitudinale de la vitesse des particules le long des lignes de champ diminue ; elle peut finir même par s’annuler et les particules correspondantes repartent alors en sens inverse vers l’autre pôle où le même rebroussement se produit. Ces particules chargées oscillent ainsi entre deux points M_0 et M'_0 appelés points miroirs (figure 1).

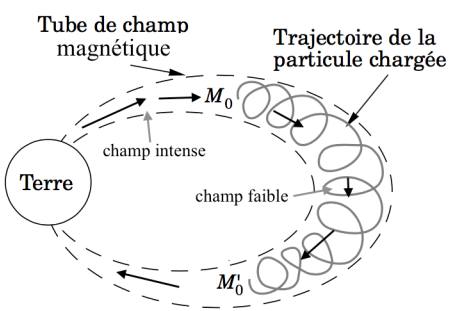


FIGURE II.1 –

Le problème qui suit se propose d’expliquer la présence des ceintures de Van Allen autour de la terre. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que la force magnétique.

On donne les valeurs suivantes :

- $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (charge du proton)
- $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (masse du proton)
- $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ (masse de l’électron)
- $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{19} \text{ J}$
- $\int_{x=0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$

II.A Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule, de masse m et de charge q , est soumise à l’action d’un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent (indépendant du temps), dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen muni du repère $(Oxyz)$. On appelle respectivement $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires associés axes Ox , Oy et Oz .

Le champ magnétique $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{e}_z$: $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $(B > 0)$. On pose $\omega = \frac{qB}{m}$. La vitesse $\vec{v}$ de la particule a pour composantes v_x, v_y et v_L : $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_L\vec{e}_z$; on pose $\vec{v}_{\perp} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$ et $\vec{v}_L = v_L\vec{e}_z$; $\vec{v}_{\perp}$ et $\vec{v}_L$ désignent ainsi les composantes de la vitesse $\vec{v}$ respectivement perpendiculaire et parallèle au champ $\vec{B}$. La norme du vecteur $\vec{v}_{\perp}$ est notée $v_{\perp}$: $\|\vec{v}_{\perp}\| = v_{\perp}$. A l’instant initial, la particule se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{\perp,0}\vec{e}_x + v_{L,0}\vec{e}_z$ avec $(v_{\perp,0} > 0$ et $v_{L,0} > 0)$.

1. Montrer que l’énergie cinétique E_c de la particule est une constante du mouvement.

Réponse :
La particule est soumise à la seule force $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Par application du théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}$, $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$. L’énergie cinétique est une constante du mouvement.
Remarque :
Beaucoup trop d’entre vous ont essayé de me raconter une histoire plutôt que d’écrire une démonstration à base d’équation...
En sciences, on utilise des théorèmes et des équations pour prouver ce que l’on avance, pas des longues phrases !

2. Montrer que $\vec{v}_L$ est constant. En déduire que $v_\perp$ est également constant au cours du mouvement. On pose $E_{c,\perp} = \frac{1}{2}mv_\perp^2$

Réponse :

La particule est uniquement soumise à $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{e}_z$. Il n'y a donc aucune force suivant $\vec{e}_z$. On peut ainsi appliquer le PFD suivant cette axe à la particule dans $\mathcal{R}$:

$$m \frac{d^2 v_L}{dt^2} = 0 \Rightarrow v_L = Cste$$

On sait de plus que l'énergie cinétique de la particule est constante d'où $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\underbrace{v_x^2 + v_y^2}_{=v_\perp^2} + v_L^2 \right)$.

On en déduit :

$$v_\perp^2 = E_c - \frac{1}{2}mv_L^2 = Cste'$$

On étudie dans les questions suivantes (3 à 8) la projection du mouvement de la particule dans le plan $P_\perp$ perpendiculaire à $\vec{B}$.

3. Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de la particule en fonction de $v_{\perp,0}$, ω et t .

Réponse :

Toujours d'après le PFD, on a $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge (B\vec{e}_z)$ soit en projection suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$(1) \quad m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \quad (II.1)$$

$$(2) \quad m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \Rightarrow \ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0 \quad (II.2)$$

$$(II.3)$$

(On a combiné les deux équations différentielles couplées).

Avec les conditions initiales : $v_x = v_{\perp,0} \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t)$ et $v_y = \beta \sin(\omega t)$

(1) $\Rightarrow \alpha = 0$ (2) $\Rightarrow \beta = -v_{\perp,0}$. On en déduit

$$v_x = v_{\perp,0} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad v_y = -v_{\perp,0} \sin(\omega t)$$

Remarque :

D'autre méthode ont été vue en classe et en TD (utilisation de $\underline{c} = v_x + jv_y$ ou bien intégration de ces équations entre $t = 0$ et $t = t$). J'ai remarqué des réponses correctes avec ces trois méthodes donc félicitation à ceux qui ont réussi.

Pour les autres, il s'agit d'une question déjà abordée plusieurs fois cette année qui doit être impérativement être maîtrisée pour la suite.

4. En déduire les coordonnées x et y de la particule à l'instant t .

Réponse :

Par intégration par rapport au temps et compte-tenu des conditions initiales :

$$x = \frac{v_{\perp,0}}{\omega} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad y = \frac{v_{\perp,0}}{\omega} (-1 + \cos(\omega t))$$

5. Montrer que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan $P_\perp$ est un cercle Γ de centre C (appelé centre guide) et de rayon a (appelé rayon de giration). Déterminer les coordonnées x_c et y_c de C , le rayon a ainsi que la période de révolution T_1 de la particule sur ce cercle en fonction de $v_{\perp,0}$ et ω .

Réponse :

La trajectoire de la particule est un cercle d'équation cartésienne $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = a^2$, de rayon a , de centre C de coordonnées x_c et y_c tels que :

$$x_c = 0, \quad y_c = -\frac{v_{\perp,0}}{\omega}, \quad a = \left| \frac{v_{\perp,0}}{\omega} \right|$$

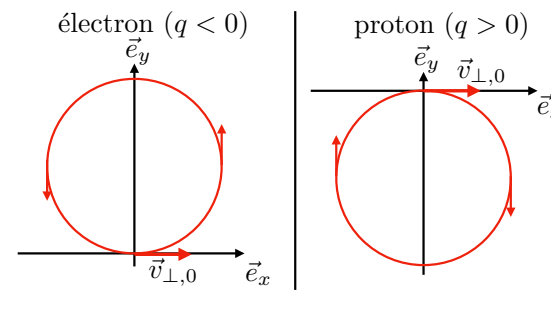
Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire $|\omega|$ soit une période

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

6. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan $P_\perp$, dans le cas d'un proton, puis dans le cas d'un électron. Préciser en particulier les sens de parcours de chaque particule sur Γ .

Réponse :

Dans le cas du proton, on a $q > 0$ et donc $y_c < 0$ tandis que pour l'électron, on a $q < 0$ puis $y_c > 0$



7. Montrer que la quantité $\mu = iS$ appelée moment magnétique où i désigne le courant engendré par le déplacement de la particule chargée et S la surface du disque Γ de centre C et de rayon a peut se réécrire :

$$\mu = \frac{E_{c,\perp}}{B}$$

Réponse :

On a $i = \frac{q}{T_1}$ et $S = \pi a^2$ d'où l'on déduit $\mu = \frac{q\omega}{2\pi} \pi a^2 = \frac{q}{\omega} \frac{1}{2} v_\perp^2 = \frac{E_{c,\perp}}{B}$

8. Application numérique : $B = 0,5 \mu\text{T}$. On suppose $v_{L,0}^2 = \frac{v_{\perp,0}^2}{10}$. Calculer, pour un électron d'énergie cinétique $E_c = 55 \text{ keV}$, le module v de sa vitesse, le rayon a et la période T_1 ; que pensez-vous de la valeur de v ? Mêmes questions pour un proton d'énergie cinétique $E_c = 0,55 \text{ MeV}$.

Réponse :

Pour l'électron, $v = 1,4 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ La valeur de v est élevée (de l'ordre de $c/2$)

On obtient avec $v_{\perp,0} = \sqrt{\frac{10}{11}}v$, soit :

$$a = 1,5 \times 10^3 \text{ m}, \quad T_1 = 7,1 \times 10^{-5} \text{ s}$$

Pour un proton $v = 1,0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit :

$$a = 2,0 \times 10^5 \text{ m}, \quad T_1 = 1,3 \times 10^{-1} \text{ s}$$

9. Quelle est alors la trajectoire globale de la particule chargée ? Expliquer pourquoi elle s'enroule autour du champ $\vec{B}$.

Réponse :
La trajectoire de la particule est une hélice d'axe parallèle à (z) passant par le point C, de pas constant $b = v_L T_1$, de rayon a . Il s'agit d'une hélice droite pour une particule de charge négative, d'une hélice gauche pour une particule de charge positive.
 $\vec{B}$ étant aussi colinéaire à $\vec{e}_z$, on en déduit que la particule s'enroule autour de $\vec{B}$.

10. On peut décomposer le mouvement de la particule en un mouvement sur un cercle dont le centre C se déplace à la vitesse v_L le long de Oz . Quelle distance b parcourt le centre C sur Oz durant la période T1 ? Exprimer b en fonction de v_L et ω . Comparer b et a dans le cas où $v_{L,0}^2 = \frac{v_{\perp,0}^2}{10}$

Réponse :

$$b = v_L T_1 = v_L \frac{2\pi}{|\omega|}$$

Avec $a = \left| \frac{v_{\perp,0}}{\omega} \right|$, on obtient $b = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} a$, soit $b = 1,98a$

II.B Mouvement d’une particule chargée dans un champ non uniforme

On suppose que le champ $\vec{B}$ n'est plus tout à fait uniforme, ses variations restant très faibles sur une distance de l'ordre du rayon de giration a ou de la distance b . Le champ B présente la symétrie de révolution autour de l'axe Oz ; en outre, on admet que la composante B_z du champ $\vec{B}$ ne dépend que de z dans la zone située au voisinage de l'axe Oz où se déplace la particule chargée. On suppose en outre B_z positive. Un point M de cette zone est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Une étude du champ magnétique permet de montrer que $B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = 0$ puis que $B_r = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = -\frac{1}{2}r \frac{dB_z}{dz}$

En considérant le champ $\vec{B}$ « localement » uniforme, on peut utiliser certains résultats de la partie précédente : dans ce champ, une particule chargée décrit un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$, autour d'un centre guide C se déplaçant le long de Oz ; mais, puisque $\vec{B}$ varie d'un point à un autre, le rayon a du cercle, la période T_1 de révolution (dont les expressions trouvées à la partie précédente restent valables en remplaçant B par B_z) varient également au cours du mouvement et le déplacement de C sur Oz n'est plus uniforme (les vitesses v_L et $v_\perp$ ne sont plus constantes) bien que la particule continue de s'enrouler localement autour du champ magnétique $\vec{B}$.

11. Montrer que la composante F_z sur l'axe Oz de la force qui agit sur la particule chargée a pour expression :

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz} \quad \text{avec } v_\perp \text{ défini dans la partie précédente}$$

Réponse :
 $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
Si $\vec{v} = \vec{v}_\perp + v_L \vec{e}_z$, pour une particule chargée négativement et d'après son sens de parcours, la composante $F_z = -qB_r v_\perp = \frac{q}{2} a \frac{dB_z}{dz} v_\perp = \frac{q}{2} \frac{v_\perp}{|\omega|} \frac{dB_z}{dz} v_\perp$ soit

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z} \frac{dB_z}{dz}$$

Pour une particule chargée positivement, le sens de parcours est opposé $F_z = qB_r v_\perp$ et on retrouve la même expression.

12. En réutilisant l'expression de μ obtenue dans la partie précédente dans laquelle B est remplacé par B_z , calculer $\frac{d\mu}{dt}$.
En déduire que μ est une constante du mouvement.

Réponse :
On a $\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B_z} \frac{dE_{c\perp}}{dt} - \frac{1}{B_z^2} E_{c\perp} \frac{dB_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{B_z} \left(\frac{dE_{c\perp}}{dt} + E_{c\perp} v_L \left(\frac{2F_z}{mv_\perp^2} \right) \right) \Rightarrow \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B_z} \left(\frac{dE_{c\perp}}{dt} + v_L F_z \right)$.
Par application du PFD suivant $\vec{e}_z$, on a aussi $F_z = m \frac{dv_L}{dt} \Rightarrow v_L F_z = \frac{d(\frac{1}{2}mv_L^2)}{dt}$. On en déduit $\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B_z} \frac{d}{dt} \left(E_{c\perp} + \frac{1}{2}mv_L^2 \right) = \frac{1}{B_z} \frac{dE_c}{dt}$.
On sait de plus que l'énergie cinétique est constante car $\vec{B} \perp \vec{v} \forall t$ (puissance nulle) donc on obtient finalement $\frac{d\mu}{dt} = 0$. Il s'agit bien d'une constante du mouvement.

13. Montrer ensuite que l'énergie cinétique E_c peut s'exprimer sous la forme $E_c = B_z \mu + \frac{1}{2}mv_L^2$.

Réponse :
On a simplement $E_c = \underbrace{\frac{1}{2}mv_\perp^2}_{=E_{c\perp}} + \frac{1}{2}mv_L^2 = B_z \mu + \frac{1}{2}mv_L^2$

14. En déduire que la particule chargée ne peut entrer dans une zone où la composante B_z du champ dépasse une valeur maximale $B_{\max}$ que l'on exprimera en fonction de E_c et μ

Réponse :
On peut entrer dans une zone dès lors que $v_L > 0$ soit pour $E_c - B_z \mu > 0 \Rightarrow B_z < B_{\max} = \frac{E_c}{\mu}$

II.C Cas d’un champ magnétique présentant un minimum local

On modélise la composante B_z du champ magnétique terrestre le long du tube de champ représenté à la figure II.1 par la courbe représentée sur la courbe II.2 ci-contre.

$B_{\max}$ a été défini dans la partie précédente et $2L$ représente la longueur typique du tube de champ représenté sur la figure II.1.

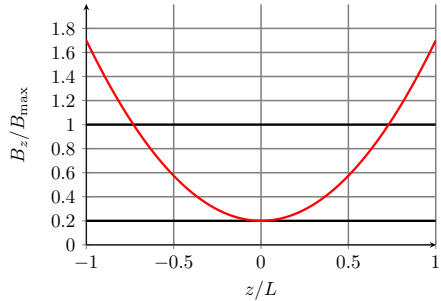


FIGURE II.2 –

15. On suppose qu’une particule se retrouve captive du tube de champ représenté sur la figure II.1. Reproduire l'allure de la courbe II.2 et indiquer clairement les zones qui lui sont accessibles. Justifier ensuite que le centre guide C va osciller entre deux points M_A et M_B symétriques par rapport M_0 ($z = 0$).

Réponse :
D’après la partie précédente, la particule ne peut entrer dans une zone où B est supérieure à $B_{\max}$. Sa trajectoire est alors confinée entre les points M_A et M_B tels que $B(M_A) = B(M_B) = B_{\max}$. La courbe étant symétrique par rapport à M_0 , il en va de même pour les points M_A et M_B .

16. Montrer ensuite que la période T_2 de ces oscillations peut s’écrire :

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_A} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B(z)}}$$

Réponse :
 $E_c = \frac{1}{2}mv_L^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = \frac{1}{2}mv_L^2 + \mu B_z$
D'où

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_c - \mu B_z)} \Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dz}{\sqrt{E_c - \mu B_z}} \text{ pour } B_z e q \frac{E_c}{\mu} \tag{II.4}$$
$$\Rightarrow dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2\mu}} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B_z}} \tag{II.5}$$

La période T_2 du mouvement correspond à deux allers-retours depuis 0 jusqu'en $|z| = z_A$. D' où :

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_A} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B_z}}$$

On peut approximer la composante B_z du champ magnétique par un polynôme du deuxième degré (à l’aide d’un développement limité par exemple) et on obtient :

$$B_z(z) \approx B_0 + \alpha z^2 \quad \text{avec } \alpha > 0$$

17. En déduire l’expression de T_2 en fonction de μ , m et α .

Réponse :
On en déduit :

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_A} \frac{dz}{\sqrt{B_{\max} - B_0 - \alpha z^2}} = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu\alpha}} \int_0^{z_A} \frac{dz}{\sqrt{\underbrace{(B_{\max} - B_0)/\alpha}_{=z_A^2} - z^2}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{\mu\alpha}}$$

18. Expliquer finalement pourquoi le champ magnétique créé par la Terre permet de protéger cette dernière des particules cosmiques ionisées présentes dans l’espace.

Réponse :
Ces particules sont naturellement présente dans l’espace (émise par le soleil, ou bien même par des étoiles plus lointaines lors de leurs explosions). Certaines d’entre elles peuvent donc ce diriger vers la Terre et seront soit déviées par le champ magnétique créé par cette dernière, soit être captées et osciller comme montré dans la figure II.1.
La plupart d’entre elles ne vont jamais atteindre la surface terrestre !

III Capteur piézoélectrique

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu’on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l’action d’une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications.

III.A Mesure de l’intensité d’une force s’exerçant sur une lame piézoélectrique

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.
On suppose qu’une force $\vec{F}$ régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l’apparition d’une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu’à la force $\vec{F}$ exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l’intensité de la force $\vec{F}$.

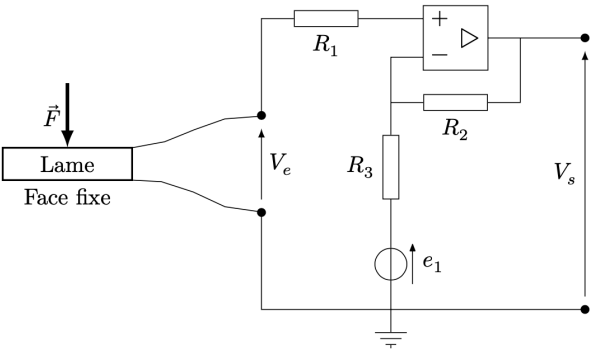


FIGURE III.1

1. Exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances (figure III.1).

Réponse :
On observe que $i_+ = 0$ donc $V_e = V_+$. De même, on peut appliquer un pont diviseur de tension avec les deux résistors R_3 et R_2

$$U_{R3} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}(V_s - e_1)$$

Au final, on a aussi $V_- = 0 + e_1 + U_{R3}$. On obtient alors en combinant ces résultats sachant que $V_+ = V_-$

$$V_e = e_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3}(V_s - e_1) = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$$

Pour aller plus loin :
On peut aussi retrouver ce résultat en appliquant la loi des noeuds en terme de potentiel à la borne inverseuse de l’ALI.

2. On donne : $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 6,5\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0\text{ k}\Omega$ et $e_1 = 100\text{ mV}$. On mesure $V_s = 6,50\text{ V}$, en déduire V_e .

Réponse :
On trouve $V_e \approx 0,95\text{ V}$

3. Sachant que $C = 8,0 \times 10^{-13}$ F et que $K = 1,0 \times 10^{-12}$ CN⁻¹, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur la lame.

Réponse :
L'application numérique donne $F \approx 0,76$ N

III.B Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure III.2.

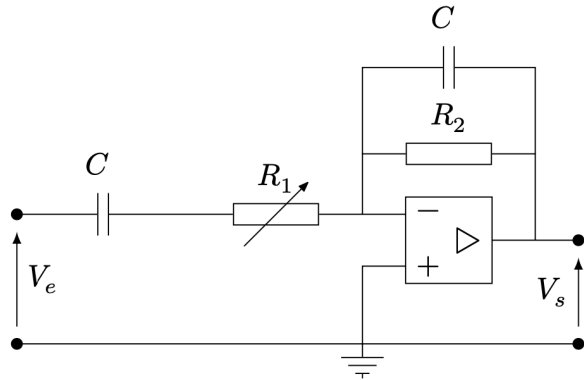


FIGURE III.2

4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure III.2. et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)}$$

en précisant les expressions de A , ω_1 et ω_2 en fonction de R_1 , R_2 , C .

Réponse :
On nomme $Z_1 = R_1 + jC\omega$ l'impédance du bloc de gauche et $1/Z_2 = 1/R_2 + jC\omega$ l'admittance du bloc de droite. On obtient alors $H = -\frac{Z_2}{Z_1}$ comme dans le cours.
On obtient après calculs

$$H = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + j\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\omega - \frac{1}{C(R_1 + R_2)}\omega}$$

On en déduit par identification que

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \quad \omega_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$$

5. Indiquer quelle est la nature de ce filtre.

Réponse :
On a $H \rightarrow 0$ en BF et HF. Il s'agit donc d'un filtre passe bande.

6. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2 .

Réponse :
Le gain (module de la fonction de transfert) passe par un maximum lorsque son dénominateur est minimal soit lorsque $\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

7. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération.

Réponse :
On peut utiliser un oscilloscope double voies en mode XY. Les deux signaux sont en opposition de phase lorsque l'on obtient une droite de pente -1 .

8. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1,0 \times 10^2$ k Ω , $C = 25$ nF et qu'il a fallu régler R_1 à 10 k Ω de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

Réponse :
L'application numérique donne $\omega \approx 1264$ rad/s lorsque les signaux sont en opposition de phase donc $f \approx 200$ Hz.