

Physique - Devoir Surveillé 06

Le 08/02/2025

I Étude du Large Hadron Collider du CERN

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde.

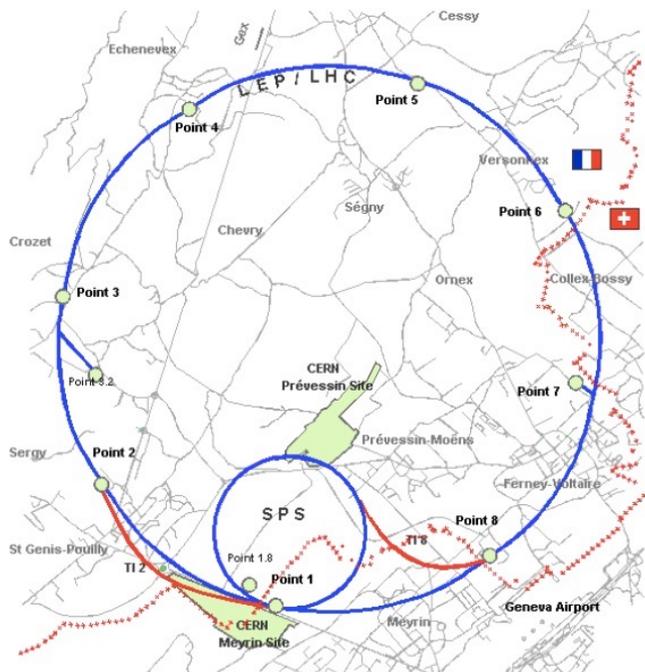


FIGURE I.1 – Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC

masse du proton	$m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg
masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg
charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C
célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8$ m.s ⁻¹
constante de Planck	$h_p = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s

Précision sur l'énoncé : dans tout le problème, "exprimer" signifie donner l'expression littérale et "calculer" signifie donner la valeur numérique.

Dans cette partie, nous étudions la trajectoire des protons dans le Large Hadron Collider. Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite.

Tous les accélérateurs de particules sont composés de la même façon : une source de particules, des champs électriques accélérateurs, des champs magnétiques de guidage et finalement des détecteurs pour observer les particules et leurs collisions.

I.A Particule dans un champ électrique constant et uniforme

- Quelle est la force que subit un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} ?

Réponse :

Le proton subit la force $\vec{F} = q\vec{E} = e\vec{E}$

- Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force générée par un champ $E = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. On prendra $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Réponse :

On a $P = m_p g \approx 10^{-27} \times 10 \approx 10^{-26}$ N.

On a $F = eE \approx 10^{-19} \times 10^5 \approx 10^{-14}$ N.

On voit donc que $P \ll F$, on peut donc négliger le poids.

- En utilisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à un proton, exprimer l'accélération que ressent un proton dans une zone de l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} .

Réponse :

Le PFD s'écrit $m_p \vec{a} = \vec{F} = e\vec{E}$, d'où $\vec{a} = \frac{e}{m_p} \vec{E}$

- La zone de l'espace où règne le champ \vec{E} a une longueur L . En considérant que le potentiel V_0 du plan $x = 0$ est nul, exprimer le potentiel V_L du plan $x = L$.

Réponse :

On a $\vec{E} = E \vec{e}_x$. On sait que $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -Edx$. Ainsi,

$$V_L - V_0 = V_L = \int_{V_0}^{V_L} dV = \int_{x=0}^{x=L} -Edx \Rightarrow \boxed{V_L = -EL}$$

- En supposant que le proton entre dans la zone de champ avec une énergie cinétique négligeable, exprimer l'énergie cinétique du proton sortant de la zone d'accélération, en fonction de E puis de V_L .

Réponse :

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point d'entrée dans la zone accélératrice et le point de sortie :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}) = -\Delta E_p = -\Delta(qV) \quad (\text{I.1})$$

$$\Rightarrow E_{cf} - E_{c0} = -e(V_L - V_0) \Rightarrow \boxed{E_{cf} = -eV_L = eEL} \quad (\text{I.2})$$

I.B Un accélérateur linéaire de particules : le Linac 2

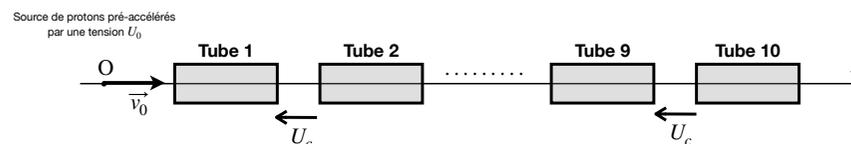


FIGURE I.2 – Schéma du Linac 2.

6. Quel doit être le signe de U_c pour que les protons soient effectivement accélérés ?

Réponse :

Afin que les protons soient accélérés, il faut que le champ électrique soit orienté selon $+\vec{e}_z$. Or comme le champ électrique descend les potentiels, il faut que $U_c > 0$.

7. Quel est l'accroissement d'énergie cinétique de ces protons au passage entre deux tubes voisins ?

Réponse :

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a comme dans la question précédente $\Delta E_c = eU_c$

8. Exprimer leur énergie cinétique à la sortie du n -ième tube en fonction de U_c et U_0 .

Réponse :

L'énergie cinétique initiale est $E_c = eU_0$. A la sortie du n -ième tube, on a traversé $n - 1$ zones accélératrices donc gagné $(n - 1)\Delta E_c$, d'où l'énergie cinétique finale : $E_c = eU_0 + e(n - 1)U_c$

9. Calculer la valeur de la vitesse des protons à la sortie du 10ème tube pour $U_0 = 200$ kV, $U_c = 2000$ kV.

Réponse :

$$\text{On a } \frac{1}{2}m_p v^2 = eU_0 + e(n - 1)U_c \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m_p} [eU_0 + e(n - 1)U_c]}$$

L'application numérique donne $v = 6.10^7$ m/s

10. Sachant qu'une particule est considérée comme relativiste lorsque sa vitesse atteint le tiers de la vitesse de la lumière, ces protons sont-ils relativistes ?

Réponse :

$v \approx c/5 < c/3$ donc ces protons ne sont pas relativistes.

I.C Du linac 2 au synchrotron à protons (PS)

Pendant une courte période de l'histoire des grands instruments, le synchrotron à proton (PS) a été l'accélérateur produisant les plus hautes énergies du monde. Aujourd'hui, il sert principalement à alimenter le LHC.

Le synchrotron à proton est constitué de plusieurs éléments permettant d'une part, d'accélérer les protons (comme étudié dans la partie précédente) et d'autre part de les dévier (comme étudié dans cette partie). Ces éléments sont ensuite synchronisés afin de permettre aux protons de suivre une trajectoire circulaire tout en étant globalement accélérés.

On considère un proton injecté en A dans le synchrotron où règne un champ magnétique statique et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. À $t = 0$ sa vitesse \vec{v}_A est perpendiculaire au champ magnétique conformément à la figure 4.

11. Donner le nom et l'expression vectorielle de la force que subit le proton soumis au champ magnétique \vec{B}_0 .

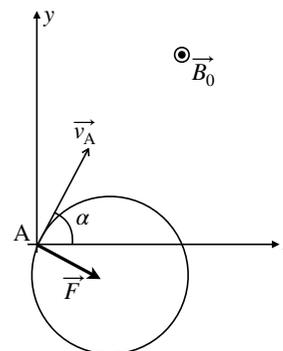
Réponse :

$$\text{Il s'agit de la force de Lorentz } \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Pour les questions suivantes, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

12. Reproduire la Figure 4 sur votre copie afin de représenter la force magnétique subie par le proton en A. Exprimer la force subie à l'instant initial dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Réponse :



À l'instant initial, $\vec{v}_A = v_A \cos(\alpha) \vec{e}_x + v_A \sin(\alpha) \vec{e}_y$.
Ainsi, le résultat du produit vectoriel donne :

$$\vec{F} = e v_A B_0 (\sin(\alpha) \vec{e}_x - \cos(\alpha) \vec{e}_y)$$

13. Montrer que le travail associé à cette force est nul. En déduire que le mouvement du proton est uniforme.

Réponse :

La puissance de cette force est nulle car $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{F} \perp \vec{v}$ d'après l'expression du produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$.

Ainsi, d'après le théorème de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P} = 0 \Rightarrow E_c = \text{cte} \Rightarrow v = \text{cte}$

14. Établir les équations différentielles portant sur v_x , v_y et v_z les composantes du vecteur vitesse dans le repère cartésien. Identifier les équations couplées. On pourra introduire ω_c la pulsation cyclotron, à exprimer en fonction de e , B_0 , et m_p .

Réponse :

On applique le PFD. Avec $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$, la force de Lorentz s'écrit : $\vec{F} = e(v_y B_0 \vec{e}_x - v_x B_0 \vec{e}_y)$.
En projetant le PFD dans la base cartésienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

en posant $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$. Les équations selon \vec{e}_x et \vec{e}_y sont bien couplées.

15. Montrer alors que v_x et v_y sont solutions d'une même équation différentielle classique. On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.

Réponse :

À partir des équations couplées, en dérivant l'une par rapport au temps et en la combinant avec la seconde, on obtient les équation suivantes :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0$$

Les équations portant sur v_x et v_y sont des équation différentielles d'oscillateur harmonique, de pulsation propre ω_c .

16. On admet que la trajectoire du proton est un cercle. Représenter ce cercle sur votre figure et indiquer dans quel sens il est parcouru.

Réponse :

Il a déjà été représenté sur la figure précédente, il est parcouru dans le sens horaire.

17. Exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m_p , B_0 , e et v_A .

Réponse :

On se place dans la base polaire de centre le centre C le centre du cercle décrit par le proton.

On a alors $\vec{CM} = R\vec{e}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ Ainsi, $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

Par ailleurs, $\vec{F} = e\vec{v} \wedge B_0\vec{e}_z = -ev_A B_0\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = -ev_A B_0\vec{e}_r$ On applique alors le PDF : $m_p\vec{a} = \vec{F}$ qui donne en projection sur \vec{e}_r :

$$-m_p R\dot{\theta}^2 = -m_p \frac{v_A^2}{R} = -ev_A B_0 \Rightarrow R = \frac{v_A m_p}{e B_0}$$

II Étude d'un filtre en peigne de fréquence

On s'intéresse au montage représenté dans la figure ci-dessous. On supposera que les ALI sont idéaux. On suppose $0 < \beta < 1$.

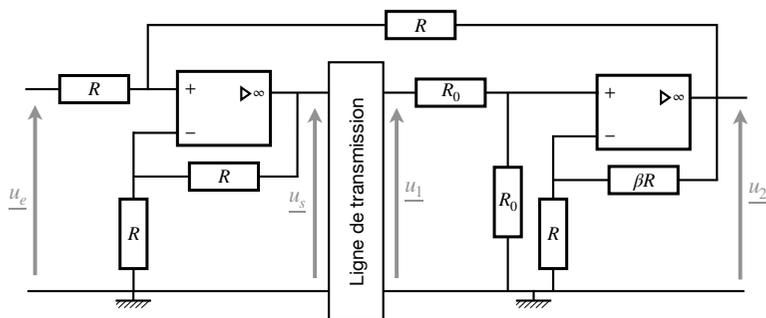


FIGURE II.1 – Schéma du filtre en peigne de fréquence.

La fonction de transfert de la ligne de transmission est de la forme

$$\underline{H}_L(j\omega) = \frac{u_1}{u_s} = e^{-j\omega\tau}$$

où τ est une constante de temps caractéristique de la ligne.

1. Quel est l'effet de la ligne sur le signal u_s ? Cet élément du montage est également appelé "ligne à retard". Justifier cette dénomination. On pourra s'intéresser au module et à la phase de la fonction de transfert $\underline{H}_L(j\omega)$.

Réponse :

La fonction de transfert a un module égal à 1 et n'induit donc qu'un déphasage de $-\omega\tau$ au signal u_s .

Si l'on note $u_s = U_s e^{j\omega t}$, alors :

$$u_1 = \underline{H}_L(j\omega)u_s = U_s e^{j\omega(t-\tau)}$$

Tout comme lors d'une propagation de signal, le signal de sortie u_1 est égal au signal d'entrée u_s mais décalé d'un retard τ (dû à la propagation dans la ligne à retard).

On s'intéresse maintenant au bloc représenté dans la Figure ??.

2. Justifier que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

Réponse :

La présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse indique un possible régime linéaire.

3. Exprimer le potentiel V_+ de l'entrée non-inverseuse en fonction de u_1 . On pourra identifier un pont diviseur de tension, ou appliquer une loi des nœuds exprimée en termes de potentiels.

Réponse :

Comme l'ALI est idéal, le courant i_+ en entrée de la borne non-inverseuse est nul, donc les deux résistances

R_0 sont en série. En appliquant un pont diviseur de tension, on trouve que $V_+ = \frac{R_0}{R_0 + R_0} u_1 = \frac{u_1}{2}$.

4. Exprimer le potentiel V_- en fonction de la u_2 .

Réponse :

Un raisonnement similaire à la question précédente permet d'obtenir : $V_- = \frac{R}{R + \beta R} u_2 = \frac{1}{1 + \beta} u_2$.

5. En déduire l'expression de $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{u_2}{u_1}$, que l'on exprimera uniquement en fonction de $\alpha = \frac{1 + \beta}{2}$.

Réponse :

Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $V_- = V_+$, d'où :

$$\frac{1}{1 + \beta} u_2 = \frac{u_1}{2} \Rightarrow \underline{H}_2(j\omega) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1 + \beta}{2} = \alpha$$

On s'intéresse au dernier bloc du filtre, représenté dans la Figure ???. On supposera que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

6. En étudiant le montage de la Figure ??, montrer que l'on a

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e + \underline{u}_2.$$

Réponse :

À l'aide d'une loi des nœuds exprimée en termes de potentiels au niveau de l'entrée non-inverseuse, on obtient :

$$\frac{u_e - V_+}{R} + \frac{u_2 - V_+}{R} = i_+ = 0 \implies 2V_+ = u_e + u_2$$

Ensuite, à l'aide d'un pont diviseur de tension (ou avec une autre loi des nœuds en terme de potentiels), on obtient au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\underline{V}_- = \frac{R}{R+R} u_s \implies 2\underline{V}_- = u_s$$

Ainsi, comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $\underline{V}_- = \underline{V}_+$, d'où $\underline{u}_s = \underline{u}_e + \underline{u}_2$.

7. En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'exprime :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}$$

Réponse :

Sachant que $\underline{u}_1 = \underline{u}_s e^{-j\omega\tau}$ et $\underline{u}_2 = \alpha \underline{u}_1 = \alpha \underline{u}_s e^{-j\omega\tau}$, on obtient :

$$\underline{u}_e + \alpha \underline{u}_s e^{-j\omega\tau} = \underline{u}_s \implies \underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}$$

8. Montrer que l'on a :

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}$$

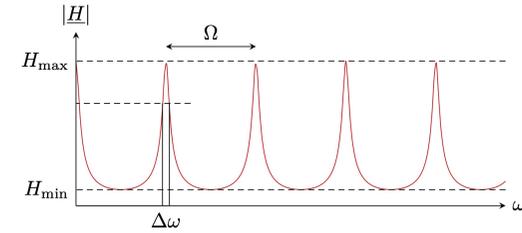
Réponse :

Comme $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - (\alpha \cos(-\omega\tau) + j\alpha \sin(-\omega\tau))} = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau)) + j\alpha \sin(\omega\tau)}$, alors :

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau))^2 + (\alpha \sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega\tau) + \alpha^2 \cos^2(\omega\tau) + \alpha^2 \sin^2(\omega\tau)}$$

On obtient bien alors : $|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}$

La représentation graphique du module de la fonction de transfert $|\underline{H}(j\omega)|$ est donnée dans la figure ci-dessous.



9. Déterminer les expressions de H_{\max} et H_{\min} en fonction de α , puis l'expression de Ω , la période de $|\underline{H}(j\omega)|$, en fonction de τ .

Réponse :

Le maximum de $|\underline{H}(j\omega)|$ est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = 1$, d'où $H_{\max} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

Le minimum est atteint pour $\cos(\omega\tau) = -1$, d'où $H_{\min} = \frac{1}{1 + \alpha}$.

On cherche Ω tel que $|\underline{H}(j(\omega + \Omega))| = |\underline{H}(j\omega)|$, soit tel que $\cos((\omega + \Omega)\tau) = \cos(\omega\tau)$. Comme \cos est 2π -périodique, on obtient $\Omega\tau = 2\pi$ soit $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

10. Montrer que la largeur de la bande-passante s'exprime :

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau} \text{Arccos} \left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha} \right)$$

Réponse :

Il faut déterminer la pulsation de coupure telle que $|\underline{H}(j\omega_c)| = H_{\max}/\sqrt{2}$, soit :

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c\tau)} = \frac{1}{2(1 - \alpha)^2}$$

En simplifiant, on obtient : $\cos(\omega_c\tau) = \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}$. La plus faible pulsation de coupure ω_c nous donnera la demi largeur de la bande passante (car le premier maximum de $|\underline{H}(j\omega)|$ est centré en $\omega = 0$), soit

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \text{Arccos} \left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha} \right) \implies \Delta\omega = \frac{2}{\tau} \text{Arccos} \left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha} \right)$$

11. En entrée du filtre, on envoie un signal composé

– d'un signal d'intérêt périodique de période T , et

– d'un bruit modélisé par un ensemble de signaux sinusoïdaux $\{u_i\}$ de fréquences $f_i \neq \frac{1}{T}$.

Comment choisir τ pour éliminer le bruit ?

Réponse :

Compte tenu de l'allure de $|\underline{H}(j\omega)|$, le filtre laisse passer toutes les pulsations multiples de Ω (soit les fréquences multiples de $\Omega/2\pi$). Comme le signal d'intérêt est périodique de période T , cela signifie que sa décomposition en série de Fourier est composée uniquement de fréquences multiples de $1/T$.

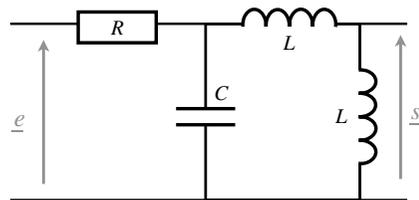
Ainsi, pour que le filtre ne transmette que les harmoniques du signal d'intérêt (et élimine le bruit), il faut que :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \implies \tau = T$$

III Filtre de Hartley

On étudie le montage ci-contre appelé filtre de Hartley (en sortie ouverte).

Dans un premier temps, on cherchera à déterminer les valeurs des composants. Ensuite, on s'intéressera aux réponses du filtre à divers signaux d'entrée.

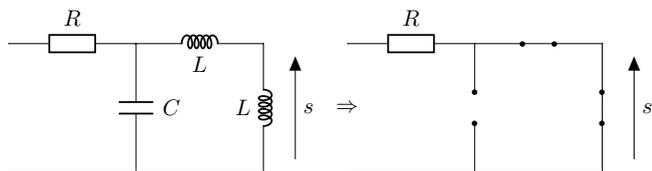


III.A Caractérisation du filtre

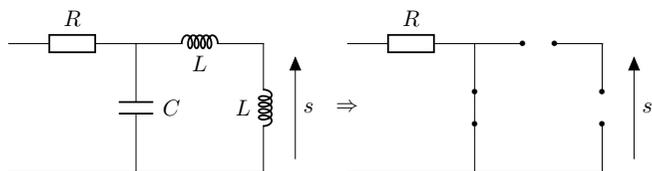
1. Prévoir qualitativement mais à l'aide d'arguments précis la nature probable du filtre.

Réponse :

On a les circuits équivalents suivants en BF et HF :



La tension s est la tension aux bornes d'un fil : elle est nécessairement nulle, soit $s = 0$



Par symétrie, les tensions aux bornes des deux bobines sont identiques. En HF, ces dernières sont court-circuitées par le condensateur (équivalent à un fil) donc $s + s = 0 \Rightarrow s = 0$

On a donc affaire à un filtre passe-bande.

2. Montrer que la fonction de transfert du filtre s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{1}{2 + j2RC\omega + \frac{R}{jL\omega}}$$

Justifier ensuite brièvement que cette dernière est cohérente avec le type de filtre étudié.

Réponse :

On va procéder en deux étapes en introduisant la tension u_c aux bornes du condensateur. Dans la partie de droite, on reconnaît un pont diviseur de tension d'où :

$$\frac{s}{u_c} = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} = \frac{1}{2}$$

Il convient maintenant d'exprimer u_c en fonction de e . Pour cela, on appelle $Z_{//}$ l'impédance résultante des deux bobines et du condensateur :

$$\frac{1}{Z_{//}} = jC\omega + \frac{1}{j2L\omega}$$

puis on applique un pont diviseur de tension :

$$\frac{u_c}{e} = \frac{Z_{//}}{R + Z_{//}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{//}}} = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{1}{j\frac{2L}{R}\omega}}$$

On en déduit au final $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{s}{u_c} \frac{u_c}{e}$ soit :

$$\underline{H} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{1}{j\frac{2L}{R}\omega}} = \frac{1}{2 + j2RC\omega + \frac{R}{jL\omega}}$$

d'où le résultat.

On constate que cette fonction de transfert tend vers zéro si $\omega \rightarrow 0$ et si $\omega \rightarrow \infty$, ce qui est compatible avec un filtre passe-bande.

3. Mettre cette fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

en notant $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite. Donner la valeur de H_0 . On exprimera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de R , L et C .

Réponse :

Il convient de faire apparaître un "1" au dénominateur avant d'identifier avec la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1/2}{1 + jRC\omega + \frac{R}{j2L\omega}} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

On en déduit $H_0 = 1/2$, $Q/\omega_0 = RC$ et $Q\omega_0 = \frac{R}{2L}$ d'où finalement $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ puis $Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$.

4. Établir les expressions littérales des équations des asymptotes en gain (dB) en basses et hautes fréquences du filtre en fonction de x , H_0 et Q .

Réponse :

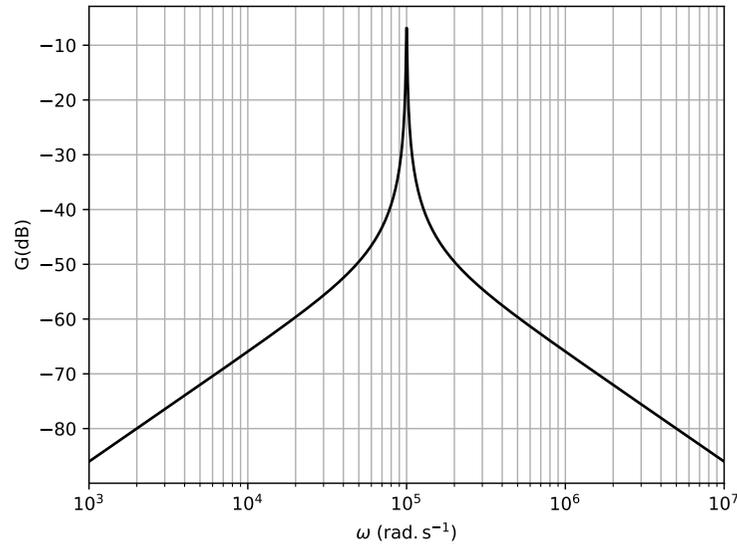
On a $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$ donc :

$$\underline{H} \sim_{HF} \frac{H_0}{jQx} \Rightarrow G_{dB,BF} = 20 \log(H_0) - 20 \log(Q) - 20 \log(x) \quad (\text{III.1})$$

$$\underline{H} \sim_{BF} \frac{jxH_0}{Q} \Rightarrow G_{dB,HF} = 20 \log(H_0) - 20 \log(Q) + 20 \log(x) \quad (\text{III.2})$$

D'où une asymptote BF de pente 20 dB/dec à BF, et une asymptote HF de -20 dB/dec.

Le diagramme de Bode en amplitude de ce filtre est donné ci-dessous :



5. À l'aide d'une étude graphique rigoureusement justifiée, obtenir les valeurs numériques de H_0 et Q et ω_0 . En déduire les valeurs de L et C sachant que $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Réponse :

À résonance (gain max), on a $x = 1$ donc $\omega = \omega_0$. On lit graphiquement $\omega_0 = 1 \times 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. De plus, on a $\underline{H}(\omega_0) = H_0 \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(H_0)$. Graphiquement, on obtient $G_{dB}(\omega_0) \approx -6 \text{ dB} \Rightarrow H_0 \approx 0,5$.

De plus, les asymptotes BF et HF se croisent lorsque $x = 1$ d'où $20 \log(H_0/Q) = -46 \text{ dB}$ (par lecture graphique). On en déduit $H_0/Q \approx 0,005$ soit $Q \approx 100$.

On peut combiner les expressions obtenues précédemment pour en déduire les valeurs de L et C :

$$C = \frac{Q}{R\omega_0} \approx 100 \text{ nF} \quad (\text{III.3})$$

$$L = \frac{R}{2Q\omega_0} \approx 0,5 \text{ mH} \quad (\text{III.4})$$

6. Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase. Pour cela, on déterminera la valeur de cette dernière pour $x \ll 1$ (BF), $x = 1$ et pour $x \gg 1$ (HF).

Réponse :

On peut repartir des expressions asymptotiques de la fonction de transfert :

— à basse fréquence ($x \rightarrow 0$ ou $x \ll 1$), $\underline{H} \sim \frac{jH_0x}{Q}$, soit une phase $\varphi = \arg(\underline{H}) \sim \arg\left(j\frac{H_0x}{Q}\right)$. Or

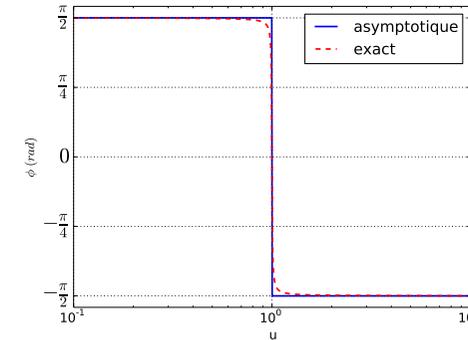
l'argument d'un nombre imaginaire pur de partie imaginaire positive est $\frac{\pi}{2}$: $\varphi(x \ll 1) \sim +\frac{\pi}{2}$.

— à haute fréquence ($x \rightarrow +\infty$ ou $x \gg 1$), $\underline{H} \sim -j\frac{H_0}{Qx}$, soit une phase $\varphi = \arg(\underline{H}) \sim \arg\left(-j\frac{H_0}{Qx}\right)$. Or

l'argument d'un nombre imaginaire pur de partie imaginaire négative est $-\frac{\pi}{2}$: $\varphi(x \gg 1) \sim -\frac{\pi}{2}$.

Enfin pour $x = 1$, on a : $\underline{H}(1) = H_0$ et $\varphi(1) = \arg(H_0) = 0$ (argument d'un réel positif).

On peut donc tracer le diagramme asymptotique :



7. Ce filtre peut-il servir d'intégrateur ou de dérivateur ? Si oui, dans quelle bande de fréquence ? Justifier. Quel inconvénient présente néanmoins ce montage utilisé pour réaliser ces opérations ?

Réponse :

La fonction de transfert d'un intégrateur est de la forme $\underline{H} = \frac{G_0}{jx}$. C'est exactement la forme obtenue pour la fonction de transfert étudiée dans le domaine où $x \gg 1$. En effet, on avait obtenu : $H \sim -j\frac{H_0}{Qx} = \frac{H_0}{jQx}$ et on reconnaît un intégrateur avec $G_0 = \frac{H_0}{Q}$.

La filtre se comporte en intégrateur à condition que l'intégralité du spectre du signal d'entrée soit compris dans le domaine tel que $x \gg 1$. Autrement dit, la fréquence fondamentale du signal doit être très grande devant $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

La fonction de transfert d'un dérivateur est de la forme $\underline{H} = jxG_0$. C'est exactement la forme obtenue pour la fonction de transfert étudiée dans le domaine où $x \ll 1$. En effet, on avait obtenu : $H \sim j\frac{H_0x}{Q}$ et on reconnaît un dérivateur avec $G_0 = \frac{H_0}{Q}$.

La filtre se comporte en dérivateur à condition que l'intégralité du spectre du signal d'entrée soit compris dans le domaine tel que $x \ll 1$. Autrement dit, la fréquence fondamentale du signal et les fréquences de l'ensemble des harmoniques d'amplitude non nulles doivent être très petites devant $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

L'inconvénient de ce filtre (en tant que montage intégrateur ou dérivateur) réside dans son gain (très faible). Les signaux seront donc fortement atténués en sortie de filtre.

On observe toutefois ici que le diagramme de Bode en gain est assez "vite" confondu avec ces asymptotes (pour $\omega < \omega_0/3$ et pour $\omega > 3\omega_0$).

III.B Filtrage de divers signaux

III.B.1 Signal triangulaire

On considère un signal triangulaire $e_1(t)$ de pulsation $\omega_1 = \frac{\omega_0}{3}$ et d'amplitude $E_1 = 1$ V dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e_1(t) = \frac{4E_1}{\pi^2} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_1 t) - \frac{1}{7^2} \sin(7\omega_1 t) \dots \right]$$

8. Tracer l'allure du spectre d'amplitude de $e_1(t)$. Préciser les valeurs numériques des pulsations des trois premiers harmoniques d'amplitude non nulle.

Réponse :
Voir réponse suivante

9. En déduire l'expression approchée du signal $s_1(t)$ en sortie de filtre.

Réponse :

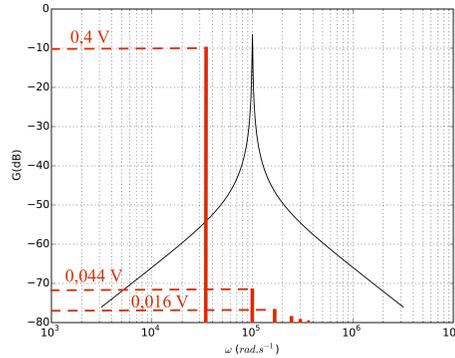
Il convient de superposer le spectre du signal d'entrée sur le diagramme de Bode.

On constate que seul le deuxième pic se trouve dans la bande passante du filtre. On obtiendra ainsi en sortie un signal "quasi" harmonique de pulsation ω_0 et d'amplitude $\frac{4E_1}{\pi^2} \times \frac{|H(3\omega_1)|}{9}$ avec $|H(3\omega_1)| = H_0 = 1/2$.

En effet, tous les autres termes vont être très fortement atténués (au moins $-40dB$ soit une division d'amplitude d'un facteur $1/10^{-40/20} = 100$).

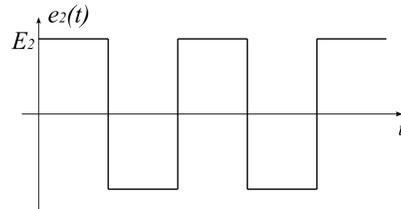
Ainsi

$$s_1(t) \approx -\frac{2E_1}{9\pi^2} \sin(3\omega_1 t)$$



III.B.2 Signal créneau

On applique maintenant un signal créneau $e_2(t)$ de valeur moyenne nulle, de pulsation $\omega_2 = 3\omega_0$ et ayant pour valeur maximale $E_2 = 1$ V (figure ci-contre).



10. Calculer la valeur efficace $E_{2,eff}$ de $e_2(t)$ (expression littérale et A.N. attendues).

Réponse :
D'après le cours, on a $E_{2,eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e_2^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} E_2^2 dt + \int_{T/2}^T (-E_2)^2 dt \right)} = E_2 = 1$ V

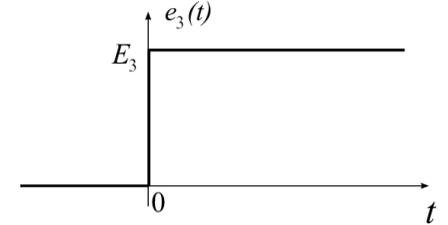
11. Quelle sera l'allure du signal $s_2(t)$ en sortie du filtre ?

Réponse :

Le fondamental, ainsi que les harmoniques de s_2 sont à des pulsations grandes devant ω_0 . (pour ces pulsations, le diagramme de Bode en gain du filtre est très proche de son asymptote en HF). Le signal de sortie est très faible. De plus, le filtre se comporte comme un montage intégrateur et on obtient en sortie un signal triangulaire, de valeur moyenne nulle, de même fréquence que $e_2(t)$ (le filtre est linéaire).

III.B.3 Signal de type échelon

On alimente dorénavant le montage avec un échelon $e_3(t)$ de hauteur $E_3 = 1$ V (figure ci-contre). La sortie correspondante est alors notée $s_3(t)$.



12. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s_3(t)$ pour $t > 0$ à partir de l'expression de la fonction de transfert (avec ω_0 , Q et H_0) obtenue précédemment.

Réponse :

On part de $\underline{s}_3 = \underline{H} \underline{e}_3 = \frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \underline{e}_3$ et en cherche à faire apparaître des multiplications par $(j\omega)$ des grandeurs d'entrée et de sortie du filtre :

$$\underline{s}_3 + jQx\underline{s}_3 - \frac{jQ}{x}\underline{s}_3 = H_0\underline{e}_3$$

On multiplie terme à terme par jx/Q :

$$\frac{j\omega}{\omega_0 Q} \underline{s}_3 + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} \underline{s}_3 + \underline{s}_3 = \frac{j\omega}{\omega_0 Q} H_0 \underline{e}_3 \Rightarrow \frac{d^2 \underline{s}_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds_3}{dt} + \omega_0^2 \underline{s}_3 = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \frac{de_3}{dt}$$

Soit en prenant la partie réelle :

$$\frac{d^2 s_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds_3}{dt} + \omega_0^2 s_3 = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \frac{de_3}{dt} = 0 \quad \forall t > 0$$

13. À partir des valeurs numériques de R , L et C , prévoir le type de régime transitoire pour $s_3(t)$.

Réponse :

On a $Q = R\sqrt{C/(2L)} = 100 > 1/2$ d'après les questions précédentes. On est donc en présence d'un régime pseudo périodique. Le facteur de qualité étant grand, on observera un grand nombre d'oscillations (environ une centaine, la valeur de Q) pendant la durée du régime transitoire.

14. Une étude du circuit en régime transitoire indique que $s_3(t = 0^+) = 0$ et $\frac{ds_3}{dt}(0^+) = \frac{E_3 R}{2L}$.

Compte tenu des résultats précédents, tracer l'allure du graphe de $s_3(t)$. La résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée.

Réponse :

L'équation différentielle est homogène et donc admet une solution particulière nulle.

Ainsi, on dessine une sinusoïde encadrée par des enveloppes exponentielles décroissantes. La fonction doit partir avec une valeur nulle et une pente non nulle. À la fin du régime transitoire, elle converge vers une valeur nulle.

