

Physique - Devoir Surveillé 6

Le 07/02/2026

Sujet bleu

I Quantique ou classique ?

Il s'agit d'établir dans les deux cas suivants si la mécanique quantique est nécessaire pour décrire les phénomènes observés. Dans toute la suite, on considère que les lois de la mécanique quantique doivent être prises en compte dès lors que la longueur d'ondes de de Broglie devient comparable à la distance moyenne entre deux atomes.

I.A Tas de sable

1. On considère un petit tas de sable au repos de volume $V = 1\text{ dm}^3$. Sachant que le diamètre moyen d'un grain de sable est d'environ 0,2 mm, pouvez vous estimer le nombre de grains de sable présents dans le tas ?

Réponse :

Il s'agit ici de réaliser une estimation plausible : on suppose que les grains de sables occupent tout le volume disponible donc :

$$n_{gs} = \frac{V}{V_{gs}} \Rightarrow n_{gs} = \frac{3V}{4\pi(d/2)^3}$$

On obtient finalement $n_{gs} \approx 2 \times 10^8$.

Remarques :

- On retrouve le même ODG en supposant que les grains de sables n'occupent qu'une portion de l'espace disponible (cf cours de cristallographie).
- En cas d'oublis de la formule du volume d'une sphère, on obtient le même odg avec $V_{gs} = d^3$.
- On ne retient qu'un chiffre significatif car on travail en ordre de grandeur. En garder plus donnerait l'illusion d'avoir un résultat précis.

2. On place le tas de sable sur une balance de précision et l'on mesure sa masse : $m = 1,54\text{ kg}$. En déduire la masse d'un grain de sable.

Réponse :

$m_{gs} = \frac{m}{n_{gs}}$ D'où (A.N.) $m_{gs} \approx 5\text{ }\mu\text{g}$.

On considère maintenant que les grains de sables se déplacent à quelques mètres par secondes (chute le long d'une dune par exemple).

3. Évaluez la longueur d'onde de de Broglie associée au grains de sable. La mécanique quantique est elle nécessaire pour décrire un tas de sable ?

Réponse :

On utilise la relation $\lambda = h/p$. Il faut donc évaluer l'impulsion d'un grain de sable d'une vitesse d'environ $1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 1 \times 10^{-25}\text{ m}$$

Cette longueur d'onde est bien plus petite que la taille de l'atome donc que la distance moyenne entre deux grains de sables. La mécanique quantique n'est donc pas à considérer pour étudier un tas de sable.

I.B Gaz d'Hélium

On étudie maintenant le cas d'un gaz d'hélium 4 (deux protons et deux neutrons).

4. On admet que l'énergie cinétique d'un atome est reliée à la température par la relation suivante : $E_c = \frac{3}{2}k_B T$ (On donne $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ la constante de Boltzmann et la masse d'un nucléon : $1,67 \times 10^{-27}\text{ kg}$). Exprimez la relation liant la longueur d'onde de de Broglie à la température.

Réponse :

On cherche premièrement à exprimer la longueur d'onde on fonction de l'énergie cinétique $E_c = p^2/(2m)$:

$$p = \sqrt{2mE_c} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

Soit en utilisant l'expression pour l'énergie cinétique d'un atome :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

5. Quel est la longueur d'onde de de Broglie correspondante pour une température ambiante ($T \approx 20^\circ\text{C}$) ?

Réponse :

La masse de l'atome d'hélium vaut $m_h = 4m_{\text{nucléon}}$ (deux protons et deux neutrons). De plus, il faut bien penser à convertir la température en Kelvin.

On obtient finalement le résultat suivant : $\lambda = 7,3 \times 10^{-11}\text{ m} = 0,073\text{ nm}$.

On se propose maintenant de trouver un ordre de grandeur de la température limite T_s au-delà de laquelle les effets quantiques ne jouent pas.

6. On pose a, la distance moyenne entre deux atomes d'hélium. En supposant que les particules sont réparties uniformément sur un réseau tri-dimensionnel, faites le schéma correspondant puis montrez que le nombre d'atome N_H contenu dans un volume V vaut :

$$N_H = \frac{V}{a^3}$$

Réponse :

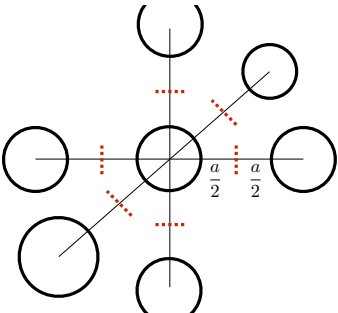
Deux démonstrations sont possibles :

- La boîte délimitée par les traits en pointillés représente le plus petit motif périodique du réseau tri-dimensionnel. Cette boîte à un volume :

$$V_b = (2\frac{a}{2})^3 = a^3$$

et contient un unique atome. On obtient donc pour une boîte de volume V :

$$n_H = \frac{V}{V_b} = \frac{V}{a^3}$$



- La boîte qui apparait sur l'image un volume $v_c = (2a)^3$ et contient $1 + 6/2 = 4$ atomes (l'atome central et une moitié de chaque atomes sur les six faces. De plus, cette boîte représente un motif périodique du réseau. On obtient donc :

$$n_H = \frac{1}{4} \frac{V}{V_c} = \frac{V}{a^3}$$

Dans les deux cas, on obtient bien le même résultat.

7. *Le nombre d'atome d'hélium intervient aussi dans l'équation d'état d'un gaz parfait*

$$PV = N_H k_B T$$

où P représente la pression et T la température. En identifiant les deux expressions, exprimez la relation entre a, P , et la température T .

Réponse :

On remarque que le nombre d'atome d'hélium apparait dans ces deux relations. On peut donc le substituer dans l'une ou l'autre $\boxed{Pa^3 = k_B T}$

8. *À partir des questions précédentes, trouvez la température en deçà de laquelle il faut prendre en compte les effets quantiques. (Expression littérale uniquement)*

Réponse :

D'après l'énoncé, les effets quantiques doivent être considérés lorsque la longueur d'onde λ devient égale à la distance inter-atomique a . On note alors la température seuil T_s :

$$a = \lambda$$

On remarque ici que λ dépend de la température. On ne peut donc pas reprendre la valeur numérique obtenue à 20°C. Il faut donc remplacer cette grandeur par son expression, comme pour la distance interatomique a :

$$\left(\frac{k_B T_s}{P}\right)^{1/3} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T_s}} \Rightarrow (k_B T_s)^{1/3+1/2} = \frac{hP^{1/3}}{(3m)^{1/2}}$$

et $1/3 + 1/2 = 5/6$ donc :

$$T_s = \frac{1}{k_B} \left(\frac{hP^{1/3}}{(3m)^{1/2}} \right)^{6/5} = \frac{1}{k_B} \frac{h^{6/5} P^{2/5}}{(3m)^{3/5}}$$

Vous constaterez au passage que vérifier l'homogénéité de cette équation n'est pas évident mais tout de même possible.

9. *Réalisez l'application numérique dans des conditions de pression atmosphérique ($P = 1,0 \times 10^5$ Pa). A-t-on besoin de la mécanique quantique pour décrire un gaz mono-atomique à température ambiante ?*

Réponse :

A.N. : $T_s = 2,9$ K. Il s'agit donc d'une température "assez" basse. Pour des températures plus élevées, la distance entre atomes augmente tandis que la longueur d'onde diminue : La mécanique quantique n'est donc pas nécessaire pour décrire un gaz parfait mono-atomique à température ambiante.

Pour aller plus loin :

Il est aussi possible de prendre un autre critère pour la prise en compte de la mécanique quantique. Par exemple, $a = 10\lambda$, afin de prendre plus de marge. On obtient dans ce cas une ténarérature proche d'une cinquantaine de Kelvin, ce qui ne change pas la conclusion de l'exercice.

II Accélérateur de particule et cavité résonnante

II.A Accélérateur de Wideröe

Un moyen d'arriver à avoir une accélération avec une tension élevée à l'aide de plusieurs tubes est d'utiliser un accélérateur de Wideröe. Les protons produits au niveau de la source (avec une vitesse quasi-nulle), traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur représenté sur la figure II.1.

La tension délivrée par le générateur est : $V(t) = -V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ avec $V_{\max} = 100$ kV et $0 < \phi < \pi$. On note T la période du signal. Les tubes sont distants de d' . À l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs. On supposera que d' est suffisamment faible, pour que l'on puisse considérer que le proton voit un champ électrique indépendant du temps, entre deux tubes consécutifs.

Le point B_0 est placé à la sortie de la source, les différents points B_i sont placés à la sortie des tubes i pour $i \in \{1..5\}$. On note L_i la longueur du tube i . De même, on note v_i la vitesse au point B_i pour $i \in \{1..5\}$.

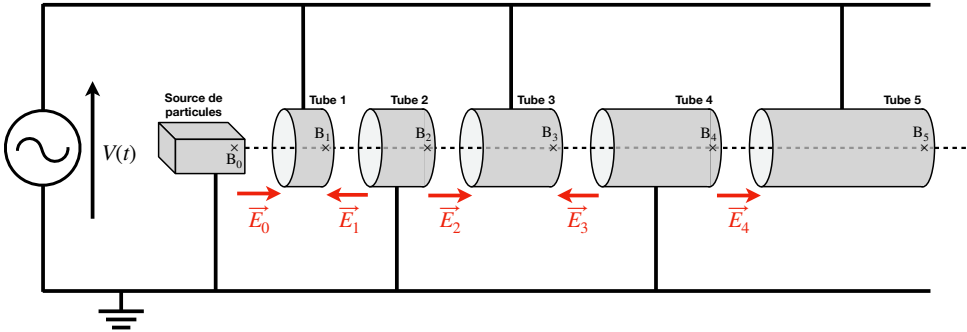


FIGURE II.1 – Accélérateur de WIDERÖE

1. *Quel est le sens du champ électrique entre la source de protons et le premier tube à la date $t = 0$? Représenter alors sur votre copie les vecteurs champs électriques, au même instant, aux points B_0, B_1, B_2, B_3 et B_4 . On supposera que $\phi = \frac{\pi}{2}$. Quelle est la norme des différents champs électriques ?*

Réponse :

On rappelle que le champ électrique descend les potentiels, c'est à dire qu'il est dirigé des zones de potentiels élevés vers les zones de potentiels plus faibles.

Afin d'accélérer les protons de charge positive $q = +e$ entre la source et le tube 1, il faut que la force de Lorentz électrique $\vec{F} = e\vec{E}_0$ soit orienté **de la source vers le tube 1**. Donc le champ $\vec{E}_0$ est nécessairement orienté dans le même sens.

La source de particules et les tubes d'indice pair sont reliés à la Terre, donc sont au potentiel nul, et les tubes d'indice impair sont au potentiel $V(t)$. La différence de potentiels entre le tube 1 et le tube 2 est donc l'opposé de celle entre la source de particule et le tube 1. Le champ $\vec{E}_1$ est de sens opposé au champ $\vec{E}_0$. Par un raisonnement similaire, on détermine le sens des champs suivants.

Les champs électriques ont la même norme $\boxed{||\vec{E}_i|| = \frac{V_{\max}}{d'}}$.

2. *Même question à la date $t = \frac{T}{2}$.*

Réponse :

Au bout d'une demi-période, le signe du potentiel $V(t)$ a changé. En particulier, $V(t + T/2) = -V(t)$. Les champs électriques auront la même norme qu'à l'instant $t = 0$, mais seront de sens opposés.

3. De façon qualitative, quelle relation doivent vérifier la durée τ de parcours d'un tube et la période T pour que les protons soient toujours accélérés au passage d'un tube à l'autre ? Cette relation sera supposée valide dans toute la suite de l'exercice.

Réponse :

Afin qu'un proton soit toujours accéléré entre deux tubes consécutifs, il faut qu'en chaque point B_i le champ électrique $\vec{E}_i$ soit orienté du tube i vers le tube $i+1$. Deux champs $\vec{E}_i$ et $\vec{E}_{i+1}$ étant de sens opposés, il faut que durant le trajet au sein d'un tube, l'orientation des champs se soit inversé, donc que le signe de $V(t)$ se soit inversé. Pour cela, il faut que le temps de parcours soit égale à un demi période de $V(t)$, donc : $\tau = \frac{T}{2}$ (il se trouve que si $\tau = nT + T/2$ avec n entier, cela reste vérifié). Le temps de parcours doit être le même pour tous les tubes.

4. Exprimer la longueur L_i du $i^{\text{ème}}$ tube en fonction de la vitesse v_i du proton à l'entrée de ce dernier et de T . Les tubes auront-ils tous la même longueur ?

Réponse :

La vitesse étant constante au sein d'un tube (pas de champ électrique dans un tube), le temps de parcours s'exprime simplement $\tau = \frac{L_i}{v_i}$. Ainsi : $L_i = v_i \frac{T}{2}$. Les protons étant accélérés, les longueurs des tubes augmentent avec i .

5. Exprimer la vitesse v_{i+1} du proton à l'entrée du tube $i+1$ en fonction de e , $V_{\max}$, m_p la masse du proton et v_i vitesse du proton en sortie du tube i .
Représenter ensuite en fonction du temps l'allure de la vitesse des protons entre les points B_0 et B_5 .

Réponse :

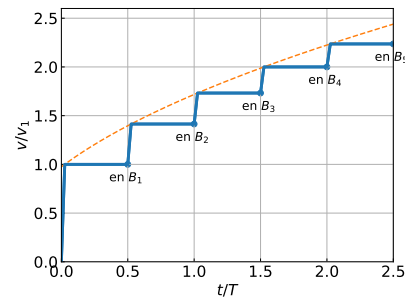
En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à un proton, d'énergie potentielle $E_p = eV$, entre la sortie du tube i et l'entrée du tube $i+1$:

$$\frac{1}{2}m_p v_{i+1}^2 + eV_{i+1} = \frac{1}{2}m_p v_i^2 + eV_i \Rightarrow \frac{1}{2}m_p (v_{i+1}^2 - v_i^2) = eV_{\max}$$

Finalement on obtient : $v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 + \frac{2eV_{\max}}{m_p}}$

Le proton n'est accéléré que lorsqu'il passe d'un tube à un autre, et sa vitesse reste constante au sein d'un tube. On L'évolution de la vitesse v du proton se fait donc par paliers.

Une étude de la suite des (v_i) permet d'obtenir que $v_i = \sqrt{i \times \frac{2eV_{\max}}{m_p}} = \sqrt{i} \times v_1$ car la vitesse initiale est quasi-nulle d'après l'énoncé. La vitesse croît selon une puissance $1/2$.



6. Exprimer la longueur L que doit avoir un tube pour une vitesse proche de c , et une fréquence du générateur de tension égale $f = \omega/(2\pi)$. Réaliser ensuite les applications numériques pour $f_a = 1$ MHz et $f_b = 100$ MHz. On rappelle la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide : $3,0 \times 10^8$ m.s⁻¹. Justifier alors qu'il est préférable pour des raisons pratiques d'utiliser des fréquences élevées.

Réponse :

Si la vitesse du proton entrant dans un tube est égal à c , alors la longueur du tube serait $L = c \frac{T}{2} = \frac{c}{2f}$.

AN : pour $f = f_a$, $L_a = 150$ m ; pour $f = f_b$, $L_b = 1,5$ m.

Comme L évolue comme l'inverse de f , il est préférable de travailler avec des fréquences élevées afin d'éviter l'utilisation de tubes volumineux et donc de limiter la taille de l'installation nécessaire à l'accélérateur.

7. En supposant que les lois de la mécanique newtonienne restent valable lorsque la vitesse des protons approche c la vitesse de la lumière dans le vide, estimer le nombre de tubes nécessaires à accélérer les protons jusqu'à la vitesse de $0,1c$. On rappelle la masse d'un proton : $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Réponse :

Sachant que $v_i^2 = i \times \frac{2eV_{\max}}{m_p}$ d'après 5, alors l'indice n du tube pour lequel on aurait $v_n \approx 0,1c$ s'exprime comme :

$$n = \frac{m_p v_n^2}{2eV_{\max}} \approx 47$$

Avec une vitesse initiale nulle, il faudrait environ 47 tubes afin d'amener le proton à une vitesse de $\frac{1}{10}$ de la vitesse de la lumière.

II.B Cavités résonnantes

À haute fréquence, les tubes se comportent comme des antennes dipolaires et peuvent rayonner énormément d'énergie. L'accélérateur de Widerøe, pour les ondes radio-fréquences (RF), peut être modélisé par un circuit électrique simple. L'excitation des particules est modélisée par un générateur idéal de tension. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation $\omega = 2\pi f$ et on adopte la notation complexe :

$$u(t) = \Re(\underline{u}(t)) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t)$$

avec $j^2 = -1$ et $\Re(\underline{u}(t))$ désigne la partie réelle du nombre complexe $\underline{u}(t)$.

II.B.1 Modélisation énergétique de l'accélérateur

On considère dans un premier temps le circuit électrique de la figure II.2. La puissance reçue par le résistor R_f est associée à la puissance utile, fournie au faisceau de particules accélérées. De même, la puissance reçue par le résistor R_r modélise les pertes par rayonnement des antennes dipolaires.

On supposera de plus, dans toute la suite du problème, que les deux conditions suivantes sont réunies :

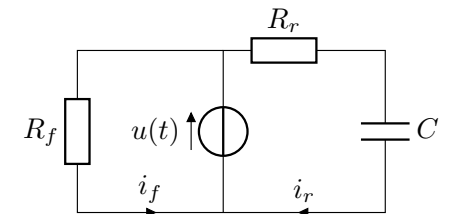


FIGURE II.2 – Circuit électrique modélisant l'accélérateur de Widerøe.

- **C1** : La résistance liée au phénomène de rayonnement R_r est très petite par rapport à celle associée à la puissance utile reçue par le faisceau : $R_r \ll R_f$. Cela traduit le fait que la puissance rayonnée peut être bien plus élevée que la puissance utile.

- **C2** : La résistance R_r est très petite par rapport au module de l'impédance du condensateur $|Z_c| = 1/(C\omega)$. Cela traduit le fait que la puissance rayonnée dépend quasi linéairement de la pulsation.
8. *Quelle est la puissance moyenne P reçue par un résistor R traversé par un courant d'amplitude complexe $\underline{I}$ orienté en convention récepteur ?*

Réponse :
Par définition, la puissance reçue à un instant t est $P(t) = Ri(t)^2$ avec i , le courant "réel" qui circule dans le résistor : $i(t) = \Re(\underline{I}e^{j\omega t}) = |\underline{I}| \cos(\omega t + \psi)$ avec ψ la phase à l'origine du courant. On en déduit que :

$$P = \langle P(t) \rangle = R \langle |\underline{I}|^2 \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = R \frac{|\underline{I}|^2}{2}$$

car la moyenne du carré de la fonction cosinus est 1/2.

9. *Exprimer ensuite l'amplitude complexe du courant i_f , notée $\underline{I}_f$, en fonction de U_m et de R_f puis en déduire que la puissance reçue en moyenne par le faisceau s'exprime selon*

$$P_f = \frac{U_m^2}{2R_f}$$

Réponse :
Par la loi d'Ohm : $\underline{u} = R_f i_f$, où $\underline{u} = U_m \exp(j\omega t)$ et $i_f = \underline{I}_f \exp(j\omega t)$. Donc :

$$\underline{I}_f = \frac{U_m}{R_f}$$

En utilisant la réponse à la question 8, on trouve : $P_f = R_f \frac{|\underline{I}_f|^2}{2} = \frac{U_m^2}{2R_f}$

10. *Exprimer à présent l'amplitude complexe du courant i_r , notée $\underline{I}_r$, en fonction de U_m , R_r , C et ω .*

Réponse :
Comme $\underline{u}$ est la tension aux bornes de l'association en série de R_r et de C , on obtient :

$$\underline{u} = \left(R_r + \frac{1}{jC\omega} \right) i_r \implies \underline{I}_m = \frac{U_m}{R_r + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C U_m}{1 + jR_r C \omega}$$

11. *Dans le cadre des conditions données dans l'énoncé, en déduire l'expression du module $|\underline{I}_r|$ uniquement en fonction de U_m , C et ω .*

Réponse :
On a $|\underline{I}_r| = \frac{\omega C U_m}{\sqrt{1 + R_r^2 C^2 \omega^2}}$. Or d'après la condition **C2** : $R_r \ll \frac{1}{C\omega} \iff R_r C \omega \ll 1$. D'où : $|\underline{I}_r| = \omega C U_m$

12. *Démontrer que la puissance moyenne rayonnée devient supérieur à la puissance moyenne utile cédée au faisceau ($P_r \geq P_f$) lorsque :*

$$\omega \geq \omega_{\text{seuil}}$$

où ω_{seuil} est à exprimer en fonction de C , R_f et R_r .

Réponse :
En utilisant l'expression de la question 8, on trouve $P_r = R_r \frac{\omega^2 C^2 U_m^2}{2}$. Ainsi :

$$P_r \geq P_f \iff \frac{R_r}{2} U_m^2 C^2 \omega^2 \geq \frac{U_m^2}{2R_f}$$

D'où : $\omega \geq \frac{1}{C \sqrt{R_r R_f}} = \omega_{\text{seuil}}$.

L'accélérateur de Wideröe fourni une puissance utile moyenne $P_f = 10\text{ kW}$ au faisceau de protons. De plus, les capacité et résistance liées au phénomène de rayonnement valent $C = 1,4 \times 10^{-12}\text{ F}$ et $R_r = 100\ \Omega$.

13. *En déduire la valeur de ω_{seuil} à partir de laquelle la puissance rayonnée devient supérieur à la puissance fournie par le faisceau.*

Réponse :
Sachant que $P_f = \frac{U_m^2}{2R_f} \implies R_f = \frac{U_m^2}{2P_f} = \frac{V_{\text{max}}^2}{2P_f} = 5,0 \times 10^5\ \Omega$.

L'application numérique donne $\omega_{\text{seuil}} \simeq 1,0 \times 10^8\text{ rad.s}^{-1}$.

14. *Vérifier que les conditions **C1** et **C2** sont bien remplies pour la pulsation de travail $\omega = \omega_{\text{seuil}}$. En lien avec la question 6, quel problème technique risque-t-on de rencontrer si l'on choisit d'utiliser un tube de longueur $L = 1,5\text{ m}$ pour des protons de vitesse proche de c ?*

Réponse :
Indépendamment de la pulsation de travail, la calcul de la question précédente montrer que l'on a bien $R_f \gg R_r$. La condition **C1** est donc vérifiée. De plus, si on travail avec $\omega = \omega_{\text{seuil}}$, on obtient notamment :

$$\omega^2 = \frac{1}{C^2 R_f R_r} \implies \frac{1}{C^2 \omega^2} = \underbrace{R_f R_r}_{\text{car } R_f \gg R_r} \gg R_r^2$$

On obtient donc $\frac{1}{C\omega} \gg R_r$. La condition **C2** est bien vérifiée.
Le choix de travailler avec des tubes de plus faible longueur impose d'utiliser une fréquence du générateur élevée. Or la puissance rayonnée évoluant selon ω^2 , travailler avec des fréquences élevées entraîne de plus grandes pertes par rayonnement. En effet, on a ici $f_{\text{seuil}} = \omega_{\text{seuil}}/(2\pi) \approx 16\text{ MHz} < 100\text{ MHz}$ donc la longueur de tube de 1,5 m correspond à une fréquence plus élevée que celle du seuil et la puissance perdue par rayonnement sera plus grande que la puissance utilisée pour accélérer les protons.

La solution pour réduire les pertes par rayonnement à haute fréquence consiste à enfermer les tubes dans une cavité résonnante dont les parois réfléchissent les ondes électromagnétiques.

Cette cavité peut être modélisée par l'ajout d'une bobine d'inductance L et de résistance r , en parallèle du condensateur. Le circuit correspondant à ce nouveau modèle est représenté dans la figure II.3.

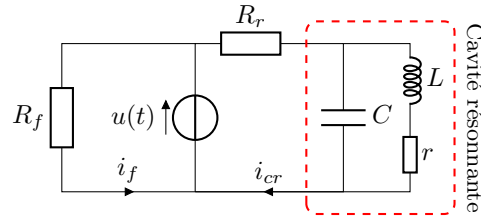


FIGURE II.3 – Prise en compte de la cavité résonnante.

15. Exprimer l'impédance $\underline{Z}$ de la cavité résonnante, c'est à dire de la mise en parallèle du condensateur et de la bobine réelle. Il conviendra de la mettre sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1 + jQx}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \omega/\omega_0$$

puis d'identifier les expressions du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 en fonction de r , L et C .

Réponse :

L'impédance $\underline{Z}$ de la cavité résonnante correspond à l'impédance équivalente de C en parallèle avec une inductance L en série avec r . D'où :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jL\omega + r}$$

D'où : $\underline{Z} = r \frac{1 + jL\omega/r}{1 + jrC\omega - LC\omega^2}$. On introduit $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ afin d'obtenir :

$$\underline{Z} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1 + jQx}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2} \quad \text{où } x = \omega/\omega_0.$$

La forme de la cavité est adaptée afin que les deux nouvelles conditions (en plus des deux premières) soient vérifiées :

- **C3** : l'onde électromagnétique est en résonance à la pulsation de travail ω . Cela revient à fixer la valeur de L de manière à avoir $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$.

- **C4** : La résistance interne r est adaptée afin d'obtenir un facteur de qualité élevé : $Q \gg 1$.

16. Simplifier alors l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ en prenant en compte les conditions **C3** et **C4**. En déduire l'expression de l'amplitude complexe du courant i_{cr} notée $\underline{I}_{cr}$ en fonction de U_m , C , ω et Q .

Réponse :

On a

$$\underline{Z} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1 + jQx}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2} \stackrel{\text{C3}}{=} \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{1 + jQ}{j/Q} \stackrel{\text{C4}}{\approx} \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \frac{jQ}{j/Q} \Rightarrow \underline{Z} = Q \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Or u est la tension aux bornes de R_r en série avec $\underline{Z}$, donc $\underline{u} = (R_r + \underline{Z}) \underline{i}_{cr}$. De plus, comme $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on en déduit :

$$\underline{I}_{cr} = \frac{U_m}{R_r + Q \sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{U_m}{R_r + Q \frac{1}{C\omega}} \approx \frac{U_m C \omega}{Q} \quad \text{car } Q \gg 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{C\omega} \gg R_r \Rightarrow \frac{Q}{C\omega} \gg R_r$$

17. Montrer alors finalement que le rapport $\eta = \frac{P_r}{P_r}$ entre les puissance moyenne rayonnée avec ou sans cavité résonnante s'exprime uniquement selon Q .

Justifier alors que la condition **C4** permet de minimiser les pertes par rayonnement, et donc de pouvoir utiliser des fréquences élevées pour l'accélérateur de Widerøe. Les valeurs de L et C étant fixées, comment peut-on en pratique augmenter au maximum le facteur de qualité ?

Réponse :

Comme $P_r = R_r \frac{\omega^2 C^2 U_m^2}{2}$ et $P_{cr} = R_r \frac{\omega^2 C^2 U_m^2}{2Q^2}$, on obtient :

$$\eta = \frac{P_{cr}}{P_r} = \frac{1}{Q^2}$$

L'ajout d'une cavité permet de diminuer la puissance dissipée par rayonnement. La condition **C4** est bien en accord avec l'expression obtenue : augmenter le facteur qualité Q permet de minimiser les pertes par rayonnement. À L et C fixés, il est nécessaire de minimiser r afin d'augmenter le facteur de qualité. Cela est réalisé en pratique en utilisant une cavité supraconductrice (en plongeant la cavité dans des bains d'hélium liquide).

III Capteur piézoélectrique

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications.

III.A Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

On suppose qu'une force $\vec{F}$ régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force $\vec{F}$ exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force $\vec{F}$.

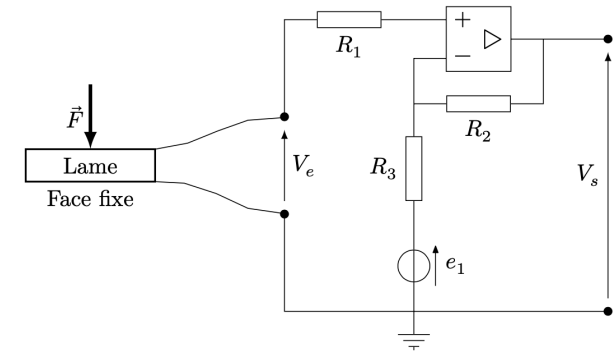


FIGURE III.1

1. Exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances (figure III.1).

Réponse :

On observe que $i_+ = 0$ donc $V_e = V_+$. De même, on peut appliquer un pont diviseur de tension avec les deux résistors R_3 et R_2

$$U_{R3} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}(V_s - e_1)$$

Au final, on a aussi $V_- = 0 + e_1 + U_{R3}$. On obtient alors en combinant ces résultats sachant que $V_+ = V_-$

$$V_e = e_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3}(V_s - e_1) = \frac{R_2 e_1 + R_3 V_s}{R_2 + R_3}$$

Pour aller plus loin :

On peut aussi retrouver ce résultat en appliquant la loi des noeuds en terme de potentiel à la borne inverseuse de l'ALI.

2. On donne : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 6,5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $e_1 = 100 \text{ mV}$. On mesure $V_s = 6,50 \text{ V}$, en déduire V_e .

Réponse :

On trouve $V_e \approx 0,95 \text{ V}$

3. Sachant que $C = 8,0 \times 10^{-13} \text{ F}$ et que $K = 1,0 \times 10^{-12} \text{ CN}^{-1}$, déterminer l'intensité de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur la lame.

Réponse :

L'application numérique donne $F \approx 0,76 \text{ N}$

III.B Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure III.2.

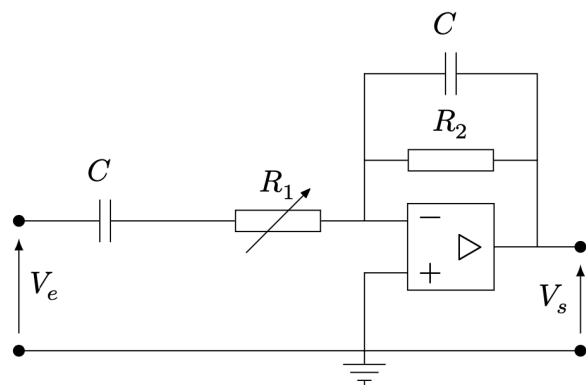


FIGURE III.2

4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure III.2. et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{A}{1 + j(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)}$$

en précisant les expressions de A , ω_1 et ω_2 en fonction de R_1 , R_2 , C .

Réponse :

On nomme $Z_1 = R_1 + jC\omega$ l'impédance du bloc de gauche et $1/Z_2 = 1/R_2 + jC\omega$ l'admittance du bloc de droite. On obtient alors $H = -\frac{Z_2}{Z_1}$ comme dans le cours.

On obtient après calculs

$$H = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + j\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \omega - \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \omega}$$

On en déduit par identification que

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \quad \omega_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}$$

5. Indiquer quelle est la nature de ce filtre.

Réponse :

On a $H \rightarrow 0$ en BF et HF. Il s'agit donc d'un filtre passe bande.

6. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2 .

Réponse :

Le gain (module de la fonction de transfert) passe par un maximum lorsque son dénominateur est minimal soit lorsque $\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

7. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération.

Réponse :

On peut utiliser un oscilloscope double voies en mode XY. Les deux signaux sont en opposition de phase lorsque l'on obtient une droite de pente -1 .

8. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1,0 \times 10^2 \text{ k}\Omega$, $C = 25 \text{ nF}$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10 \text{ k}\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

Réponse :

L'application numérique donne $\omega \approx 1264 \text{ rad/s}$ lorsque les signaux sont en opposition de phase donc $f \approx 200 \text{ Hz}$.