

Physique - Devoir Surveillé 5

Le 18/01/2025

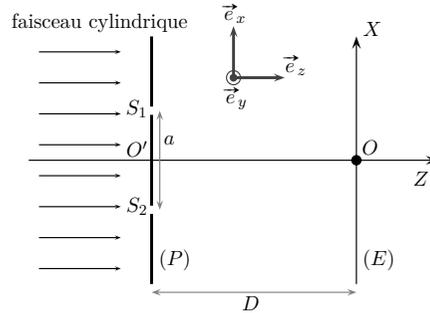
I Trous d'Young

On réalise, dans l'air (d'indice optique $n_{air} \approx 1$), l'expérience des trous d'Young à l'aide du dispositif ci-dessous.

Un laser de longueur d'onde dans le vide λ , émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe OZ . On suppose que le faisceau éclaire entièrement et de manière uniforme les ouvertures disposées sur son passage.

Une plaque opaque (P), percée de deux trous S_1 et S_2 de même taille et de faibles dimensions, est placée perpendiculairement à l'axe OZ . La distance entre les centres des deux trous S_1 et S_2 est notée a .

On note O' le milieu du segment $[S_1; S_2]$. Le point O' appartient à l'axe OZ . Un écran (E) est placé perpendiculairement à l'axe OZ . La distance entre la plaque (P) et l'écran (E) est égale à D . Soit O le point de l'écran (E) appartenant à l'axe OZ : $D = O'O$.



Les trous S_1 et S_2 sont de très petite taille (diamètres $e = 0,070 \text{ mm}$), la distance a entre les trous est $a = 0,40 \text{ mm}$. La distance D vaut $D = 1,5 \text{ m}$ et la longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$.

I.A Description qualitative du problème

Sur l'écran, on observe une succession de franges rectilignes, équidistantes, parallèles à l'axe OY , sombres et claires en alternance.

- En se référant uniquement aux lois de l'optique géométrique, quelle devrait être l'allure de la figure observée sur l'écran (E) ?
Pour quelle raison l'optique géométrique ne permet-elle pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences dans le cas du dispositif des trous d'Young ?

Réponse :

En se référant uniquement aux lois de l'optique géométrique, la figure observée sur l'écran serait simplement deux petites tâches rouges en face des trous. Il ne peut donc pas y avoir d'interférence puisqu'il n'y a pas superposition d'onde.

De plus, l'optique géométrique ne permet pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences de façon générale car elle postule l'indépendance des rayons lumineux.

- On obture l'un des trous. Calculer l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire du faisceau provenant de l'autre trou. Rappelons que dû au phénomène de diffraction, l'ouverture angulaire 2θ d'un faisceau en sortie d'un trou de taille e s'exprime $\sin(2\theta) \approx \frac{\lambda}{e}$. Faire un schéma.

Réponse :

Lorsqu'on obture l'un des trous, on observe la diffraction par ce trou. Le faisceau s'élargit avec un angle θ défini comme sur le schéma suivant (demi angle) et relié à la taille du trou e et à la longueur d'onde λ par :

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{e}$$

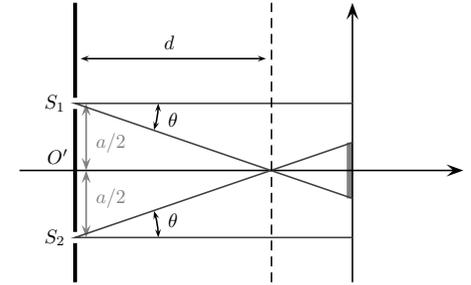
$$\text{A.N. } \theta = \arcsin\left(\frac{633 \cdot 10^{-9}}{0,070 \cdot 10^{-3}}\right) = 9,0 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

- En déduire à quelle distance minimale il faut placer l'écran pour observer le phénomène d'interférences. Faire un schéma et l'application numérique.

Réponse :

La distance minimale d à laquelle il faut placer l'écran pour observer le phénomène d'interférences est celle à partir de laquelle les rayons issus des deux trous se superposent. Elle est définie par : $\tan(\theta) = \frac{a}{2d} \simeq \theta$ A.N. $d \simeq 22 \text{ mm}$.

Pour un écran à 1,5 m, on pourra bien observer des interférences.

I.B Expression de $S_2M - S_1M = \delta(M)$

Soit un point M de l'écran (E) de coordonnées $(x, 0)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$.

- Exprimer les coordonnées des trous S_1 et S_2 dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$. Exprimer ensuite les distances S_1M et S_2M , respectivement entre les trous S_1 et S_2 et le point M . On exprimera S_1M et S_2M en fonction de a , D et x .

Réponse :

Coordonnées des trous S_1 et S_2 : $S_1(a/2; -D)$ et $S_2(-a/2; -D)$

D'où les distances S_1M et S_2M à l'aide du théorème de Pythagore :

$$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2}$$

- En déduire l'expression de $S_2M^2 - S_1M^2$ en fonction de a et x . Le calcul sera mené sans aucune approximation mais l'expression obtenue sera simplifiée au maximum.

Réponse :

On en déduit : $S_2M^2 - S_1M^2 = 2ax$ après développement des identités remarquables.

- La distance a entre les trous étant petite par rapport à la distance D , et le point M étant proche du point O , on peut considérer que a et x sont très petits devant D . En supposant que les distances S_1M et S_2M sont très proches, montrer que $S_2M^2 - S_1M^2 \approx 2\delta(M)D$, avec $\delta(M) = S_2M - S_1M$, la différence marche.

Réponse :

Factorisons la différence des carrés : $S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M)$.

Les hypothèses nous permettent d'écrire $S_1M \simeq S_2M \simeq D$, donc on peut faire l'approximation : $S_2M + S_1M \simeq 2D$. D'où :

$$S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M)2D = 2\delta D$$

avec $\delta(M) = S_2M - S_1M$, la différence de marche.

7. Montrer finalement que l'on obtient $\delta \approx \frac{ax}{D}$

Réponse :

En combinant les deux réponses précédentes, on peut écrire : $\delta = \frac{2ax}{2D} = \frac{ax}{D}$

I.C Intensité lumineuse de l'onde résultante

On représente par :

$$s_1(t) = s_2(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi ct}{\lambda}\right)$$

l'expression des ondes respectivement aux points S_1 et S_2 . s_0 représente l'amplitude de l'onde considérée, c représente la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.

On néglige l'atténuation de l'onde entre les trous et le point M .

8. Exprimer $s_{1M}(t)$, l'expression de l'onde issue du trou S_1 lorsqu'elle arrive au point M . On exprimera $s_{1M}(t)$ en fonction de s_0 , S_1M , c , λ et t . Déterminer de même l'expression $s_{2M}(t)$ de l'onde issue du trou S_2 lorsqu'elle arrive au point M en fonction de s_0 , S_2M , c , λ et t .

Réponse :

On obtient $s_{1M}(t) = s_0 \cos(\omega t - kS_1M) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t - \frac{2\pi}{\lambda}S_1M\right)$ puis de même pour S_{2M} :

$$s_{2M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t - \frac{2\pi}{\lambda}S_2M\right)$$

9. En déduire l'expression $s_M(t)$ de l'onde qui résulte de la superposition des deux ondes $s_{1M}(t)$ et $s_{2M}(t)$ au point M .

On mettra l'expression sous la forme $s_M(t) = f(r) \times g(t, r')$, où f et g deux fonctions, et r et r' des variables à exprimer en fonction de S_1M et S_2M .

On pourra utiliser la formule : $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Réponse :

$$s_M(t) = s_{1M}(t) + s_{2M}(t) = s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_1M}{c}\right)\right) + s_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\left(t - \frac{S_2M}{c}\right)\right)$$

En utilisant : $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ on obtient :

$$s_M(t) = 2s_0 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi c}{\lambda}\left(2t - \frac{S_1M}{c} - \frac{S_2M}{c}\right)\right)}_{g(t, r')} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M)\right)}_{f(r)}$$

10. Sachant que l'intensité lumineuse I_M (appelée aussi éclairement) qui résulte, au point M , de l'onde $s_M(t)$ est proportionnelle au carré de $f(r)$ avec K la constante de proportionnalité, exprimer I_M au point M en fonction de s_0 , K , δ et λ et montrer que l'on retrouve alors la formule de Fresnel :

$$I_M = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

où I_0 un paramètre que l'on peut exprimer en fonction de s_0 et K . En déduire une expression de I_M en fonction de I_0 , a , x , λ et D .

Réponse :

$$I_M = K \langle s_M^2(t) \rangle = 2K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M)\right) = 2K s_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi \delta}{\lambda}\right) = K s_0^2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda}\right)\right)$$

(Le facteur est 2 car $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, mais ce n'est pas un point important et les réponses avec $4K s_0^2$ ou K simplement sont comptés justes.)

On retrouve bien la formule de Fresnel (en posant $I_0 = \frac{K s_0^2}{2}$). En utilisant l'expression de δ trouvée auparavant,

on obtient : $I_M = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right)$

11. L'interfrange i est définie comme la distance entre deux maxima de I_M . Exprimer i en fonction de a , λ et D .

Réponse :

On un maximum d'intensité lorsque $\cos(\theta) = 1$. On en déduit que les maxima sont obtenus lorsque :

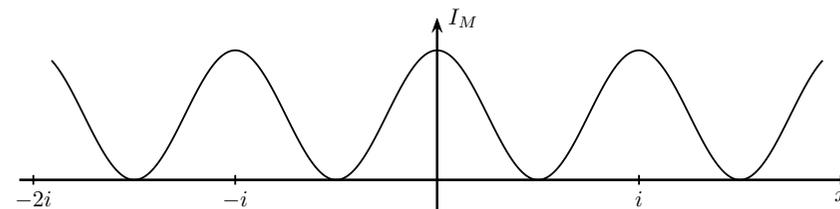
$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{2\pi ax}{\lambda D} = 2n\pi \Rightarrow x = x_n = n \frac{\lambda D}{a}$$

On en déduit pour l'interfrange $i = x_{n+1} - x_n$ soit $i = \frac{\lambda D}{a}$.

12. Tracer l'allure du graphe I_M en fonction de x .

Réponse :

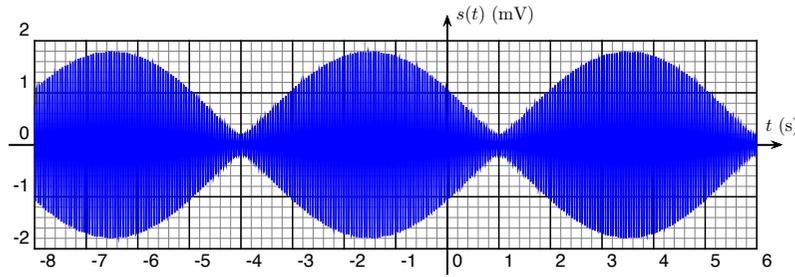
On obtient la courbe suivante :



I.D Expérience de Gaston

Gaston a l'idée de reproduire la même expérience mais avec des diapasons. Il en trouve deux dans son grenier un peu abimés avec une étiquette 440 Hz mais décide de faire quand même l'expérience. Il installe un microphone relié à un oscilloscope et tape en même temps sur les deux diapasons.

Il obtient l'enregistrement suivant au point M :



13. Pourquoi n'obtient-il pas un signal sinusoïdal comme dans l'expérience précédente ? Comment s'appelle ce phénomène ?

Réponse :

On peut supposer que comme les diapasons semblent abîmés, ils ne sont plus exactement à la même fréquence. On obtient alors un phénomène de battements.

14. On suppose la fréquence moyenne égale à 440 Hz. Retrouver les caractéristiques des deux signaux sources (amplitude en mV et fréquence).

Réponse :

On lit sur le graphique $S_{max} = 1,8 \text{ mV}$ et $S_{min} = 0,2 \text{ mV}$. On les identifie à $S_{max} = S_1 + S_2$ (deux signaux en phase) et à $S_{min} = S_1 - S_2$ (opposition de phase). On obtient :

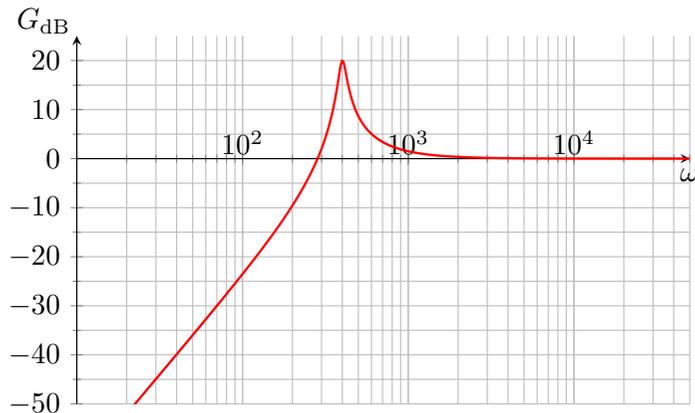
$$S_1 = 1,0 \text{ mV} \text{ et } S_2 = 0,8 \text{ mV}$$

On lit la période des battements sur le graphique : $T_{batt} = 5 \text{ s}$. D'où $f_{batt} = f_2 - f_1 = 0,2 \text{ Hz}$. En utilisant $\frac{f_1 + f_2}{2} = 440 \text{ Hz}$, on obtient :

$$f_1 = 339,9 \text{ Hz} \text{ et } f_2 = 440,1 \text{ Hz}$$

II Analyse d'un diagramme de Bode

On considère le diagrammes de Bode en gain suivant (pulsations en rad/s) :



et on rappelle les formes canoniques des filtres passe bas, passe bande et passe haut :

$$H_{\text{PBas}} = \frac{G_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}, \quad H_{\text{PBande}} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \quad H_{\text{PHaut}} = \frac{-G_0x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

1. Quel est le type de filtre associé au diagramme de Bode en gain proposé ? Une réponse justifiée est attendue.

Réponse :

2. Déterminez les valeurs numériques des constantes Q , ω_0 et G_0 de ce filtre.

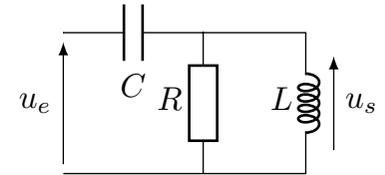
Réponse :

On observe que les asymptotes BF ($G_{dB,BF} = 20 \log(G_0) + 40 \log(x)$) et HF ($G_{dB,HF} = 20 \log(G_0)$) se croisent lorsque $x = 1$ soit lorsque $\omega = \omega_0 \approx 400 \text{ rad.s}^{-1}$. Le gain HF étant nul, on en déduit que $G_0 = 1$.

Pour finir, on sait que $G_{db}(x = 1) = 20 \log(G_0Q) \approx 20 \text{ dB}$ par lecture graphique, on en déduit que $Q = 10/G_0 \approx 10$.

On pose $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ et on considère le filtre ci contre.

3. Exprimer la fonction de transfert $H = u_s/u_e$ de ce filtre ; la comparer à la forme canonique associée puis relier ω_0 , G_0 et Q à R , L et C .



Réponse :

TODO

4. En déduire l'équation différentielle qui relie la sortie u_s à l'entrée u_e ; on supposera de plus, et uniquement pour cette question, que $u_e = E$ (constante).

Réponse :

TODO

5. Donner l'allure du signal recueilli en sortie du filtre pour un signal d'entrée de type créneau de moyenne nulle et de pulsation $\omega = 133 \text{ rad/s}$.

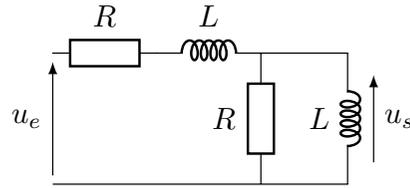
Réponse :

Seul le premier harmonique (pulsation $3\omega \approx 400 \text{ rad/s}$) se trouve dans la bande passante donc on obtiendra un signal quasi harmonique de pulsation $3\omega = \omega_0$.

III Diagramme de Bode

On considère le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé. Ce dernier est constitué de deux bobines identiques d'impédance L et de deux résistors identiques de résistance R .

L'objectif de cet exercice est de réaliser le diagramme de BODE associé à ce filtre.



1. Sans calcul, prédire le comportement du filtre à basses fréquences et à hautes fréquences.

Réponse :

À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils : u_s est alors la tension aux bornes d'un fil, donc $u_s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts : aucun courant ne traverse les deux résistors, donc $u_s = 0$.

On s'attend donc à un filtre de type passe-bande.

2. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ en fonction de ω , R et L .

Réponse :

On reconnaît un pont diviseur de tension entre les dipôles :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_s}{Z_s + Z_p} = \frac{1}{1 + \frac{Z_s}{Z_p}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \quad \text{et} \quad Z_s = R + jL\omega \quad (\text{III.1})$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} \right)} = \frac{1}{3 + R/(jL\omega) + jL\omega/R} \quad (\text{III.2})$$

3. Montrer que l'on peut mettre $\underline{H}(\omega)$ sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

En déduire les expressions de G_0 , Q et ω_0 en fonction de R et L .

Réponse :

Il convient de diviser en haut et en bas par 3 pour obtenir un dénominateur de la forme $1 + j \dots$, on obtient alors :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1/3}{1 + j \frac{1}{3} \left(\frac{L\omega}{R} - R/(L\omega) \right)}$$

Cette expression est du même type que celle proposée dans l'énoncé. On peut ensuite poser par identification $G_0 = 1/3 = Q$ puis $L\omega/R = \omega/\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = R/L$. Cette définition étant compatible avec le dernier terme, en effet, $-R/(L\omega) = -\omega_0/\omega$ d'où le résultat.

4. Exprimer les équivalents de \underline{H} en basses fréquences (\underline{H}_{BF}) et en hautes fréquences (\underline{H}_{HF}) en fonction de ω et ω_0 .

Réponse :

En BF, on a $H(\omega) \simeq H_{BF} = \frac{G_0}{jQ(-\omega_0/\omega)} = j \frac{G_0}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$.

On trouve de même en HF $H(\omega) \simeq H_{HF} \simeq -j \frac{G_0}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$.

De plus, on a $G_0 = Q = 1/3$ soit au final :

$$H_{BF} = j \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad H_{HF} = -j \frac{\omega_0}{\omega}$$

5. En déduire le diagramme de BODE asymptotique du filtre en gain et en phase en fonction de la pulsation ω (à reproduire sur le papier semi-log fourni en annexe). On prendra pour les applications numériques $R = 1,0 \times 10^3 \Omega$ et $L = 0,1 \text{ H}$.

On attendra pour cela :

— l'expression des asymptotes à BF et à HF du gain en décibel en fonction de ω , dont on donnera la valeur des pentes.

— les coordonnées du point où se croisent les asymptotes.

— la valeur de la phase à BF et à HF.

Réponse :

Avec les valeurs fournies, on trouve $\omega_0 = R/L = 1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

— **Diagramme en gain :**

On a par définition $G_{dB} = 20 \log(|H|)$, or on peut prendre le log et le module d'un équivalent donc on en déduit

$$G_{dB, BF} = 20 \log(|H_{BF}|) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (\text{III.3})$$

$$G_{dB, HF} = 20 \log(|H_{HF}|) = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad (\text{III.4})$$

$$(\text{III.5})$$

Ces deux asymptotes se croisent lorsque $20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \Rightarrow \omega = \omega_0$ pour une ordonnée de $y = 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = 0$. Les tracés correspondant sont donc des droites de pentes $\pm 20 \text{ dB}$ par décade se croisant au point de coordonnée $(\omega_0, 0)$ et sont représentées sur la diagramme de la question suivante.

On retrouve bien une différence de 40 dB par décade entre le comportement BF et HF du filtre.

— **Diagramme en Phase :**

De même, on a

$$\varphi_{BF} = \arg(j\omega/\omega_0) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.6})$$

$$\varphi_{HF} = \arg(-j\omega_0/\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{III.7})$$

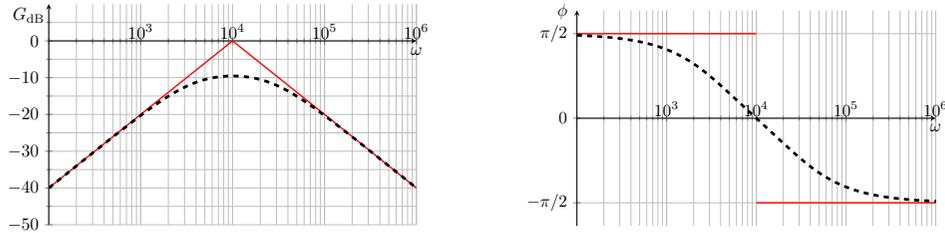
Les asymptotes sont donc des droites horizontales d'ordonnées $+\pi/2$ et $-\pi/2$, on trouve bien une différence de π entre le régime BF et le régime HF.

6. Tracer ensuite l'allure du diagramme de BODE réel en gain et en phase toujours sur la même feuille. On calculera pour cela l'expression du gain et de la phase à $\omega = \omega_0$.

Réponse :

Pour cela, il faut au minimum déterminer où passe la courbe lorsque $\omega = \omega_0$. A cette pulsation, on

trouve que $G_{dB,\omega_0} = 20 \log(G_0) \approx -9,5 \text{ dB}$ puis $\varphi(\omega_0) = \arg(1/3) = 0$. On obtient ainsi le tracé suivant :



7. On considère un signal d'entrée de la forme : $u_e = U_e \cos(\omega t)$ où $\omega = 300 \text{ rad/s}$ et $U_e = 1 \text{ V}$. Quelle serait l'amplitude du signal u_s en sortie du filtre (on pourra se limiter à 1 chiffre significatif) ?

Réponse :

Si l'on note U_s l'amplitude de u_s , alors on a : $\frac{U_s}{U_e} = |\underline{H}(\omega)|$, où ω est la pulsation du signal d'entrée.

Comme $|\underline{H}(\omega)| = \frac{G_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$, on peut alors calculer la valeur pour $\omega = 300 \text{ rad/s}$, ce qui donne

$$|\underline{H}| \approx 3 \times 10^{-2}, \text{ soit } \boxed{U_s = |\underline{H}| \times U_e = 3 \times 10^{-2} \text{ V}}.$$

On aurait pu sinon utiliser, par lecture graphique, que $G_{dB}(\omega = 300 \text{ rad/s}) \approx -30 \text{ dB}$. Or comme $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$, on trouve que $|\underline{H}| = 10^{G_{dB}/20} \approx 3 \times 10^{-2}$.

IV Analyse de la vibration d'une poutre

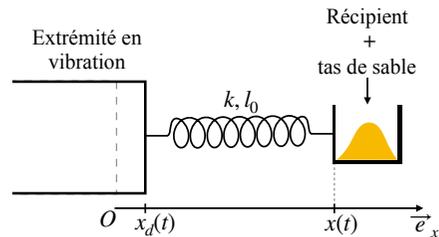
L'objectif de ce problème concerne l'étude approfondie des vibrations d'une poutre lors de son usinage. On souhaite ainsi caractériser d'une part l'amplitude des vibrations et d'autre part, leurs fréquences.

Dans toute la suite, on considère que la poutre est assimilable à un pavé de section carré d'arête $l = 50 \text{ cm}$ et de longueur $L = 2 \text{ m}$.

Un petit récipient de masse $m_r = 20 \text{ g}$ contenant une masse m_s de sable est fixé à l'extrémité droite d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée à la face de droite de la poutre. Afin de simplifier les notations, on posera $m = m_s + m_r$.

On note $x_d(t)$, l'abscisse de la face droite de la poutre

De même, on note $x(t)$ l'abscisse du récipient. On considère de plus que ce dernier est soumis à une force de frottement fluide d'expression $\vec{f} = -\lambda \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$.



Dispositif attaché à l'extrémité droite de la poutre.

IV.A Détermination des caractéristiques du système

On considère dans un premier temps que la poutre est au repos ($x_d(t) = 0$). On décale alors légèrement le récipient de sa position d'équilibre d'une distance $d = 2,0 \text{ cm}$ et on le lâche sans vitesse à l'instant initial $t = 0$.

1. Obtenir l'équation différentielle dont x est solution et la mettre sous forme canonique en faisant apparaître une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q .

Réponse :

On considère le système {récipient + tas de sable} de masse $m = m_s + m_r$, dans le ref. galiléen lié à la poutre (cette dernière étant alors au repos). Le bilan des forces indique

- La force de rappel élastique $\vec{F} = -k(x - l_0) \vec{e}_x$
- La force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$

On peut alors appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au système dans un référentiel galiléen selon le vecteur \vec{e}_x :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + kl_0 - \lambda \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} l_0}$$

Par identification avec la forme canonique de l'équation de l'oscillateur harmonique, on trouve $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ puis $Q = \sqrt{km}/\lambda$

2. Exprimer alors la position d'équilibre du système x_{eq} en fonction des données du problème puis montrer que l'on obtient alors

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\epsilon}{dt} + \omega_0^2 \epsilon = 0 \quad (\text{IV.1})$$

en considérant $\epsilon = x - x_{eq}$, l'écart à la position d'équilibre pour le récipient.

Réponse :

À l'équilibre, on trouve $\omega_0^2 x_{eq} = \omega_0^2 l_0 \Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0}$. On en déduit que

$$\frac{d^2 \epsilon + l_0}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\epsilon + l_0}{dt} + \omega_0^2 \epsilon + \omega_0^2 l_0 = \omega_0^2 l_0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\epsilon}{dt} + \omega_0^2 \epsilon = 0}$$

d'où le résultat.

3. En supposant que l'on a $Q \gg 1/2$, montrer que l'on obtient

$$\epsilon(t) = de^{-t/\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right)$$

avec $\tau = 2Q/\omega_0$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$

Réponse :

On obtient alors un régime pseudo périodique

$$\epsilon(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

avec $\tau = 2Q/\omega_0$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$ après résolution de l'équation caractéristique (c.f. cours). La première CI donne $\epsilon(0) = d \Rightarrow A = d$. De plus, la deuxième CI donne

$$\frac{d\epsilon}{dt}(0) = -\frac{1}{\tau} A + \Omega B = 0 \Rightarrow B = \frac{A}{\Omega \tau} = \frac{d}{\Omega \tau}$$

et on obtient au final le résultat attendu

$$\boxed{\epsilon(t) = de^{-t/\tau} \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right)}$$

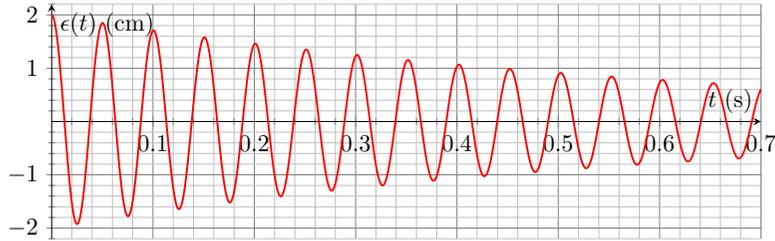
4. Montrer alors que l'on obtient environ n pseudo-périodes entre l'instant initial et l'instant où l'amplitude des oscillations diminue d'un facteur deux, avec $n = \frac{Q}{\pi} \ln(2)$. On supposera toujours que $Q \gg 1/2$.

Réponse :

On note t_2 l'instant où l'amplitude des pseudo-oscillations diminue d'un facteur 10 : $e^{-t_2/\tau} = 0,5 \Rightarrow t_2 = \tau \ln(2) = \frac{2Q}{\omega_0} \ln(2)$. De plus, on a $\Omega \approx \omega_0$ lorsque $Q \gg 1/2$ d'où

$$t_2 \approx \frac{2Q}{\Omega} \ln(2) = \frac{2Q}{2\pi} T \ln(2) \Rightarrow n = \frac{t_2}{T} = \frac{Q}{\pi} \ln(2)$$

5. On réalise alors l'acquisition suivante pour $\epsilon(t)$ sans ajout de sable dans le récipient ($m_s = 0$).



En déduire les valeurs numériques de ω_0 et Q . Justifier ensuite brièvement que lors de l'ajout du sable, la condition $Q \gg 1/2$ sera toujours vérifiée.

Réponse :

Entre l'instant initial et l'instant où l'amplitude est divisée par deux, on observe environ $n = 9$ pseudo-périodes. On en déduit $Q = n\pi/\ln(2) \approx 40,8 \geq 1/2$. De même, pour 10 pseudo-périodes, on mesure $10T \approx 0,50 \text{ s} \Rightarrow T \approx 0,05 \text{ s}$ et $\omega_0 \approx \Omega \approx 126 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit une fréquence d'environ 20 Hz.

On a montré que $Q = \sqrt{m_r k + m_s k}/\lambda$. Ainsi, lorsque m_s augmente, le facteur de qualité va aussi augmenter et donc rester bien plus grand que la valeur critique 1/2.

6. En déduire les valeurs numériques de k , la constante de raideur du ressort et λ , le coefficient de frottement fluide.

Réponse :

$$\text{On a } \omega_0 = \sqrt{k/m} \Rightarrow k = m\omega_0^2 \approx 318 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \text{ puis } \lambda = \frac{\sqrt{m k}}{Q} \approx 6,2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

IV.B Recherche de la fréquence de vibration

La poutre n'est maintenant plus au repos et on suppose que les vibrations sont harmoniques à la pulsation ω , soit $x_d(t) = X_d \cos(\omega t)$. On s'intéresse alors uniquement au régime sinusoïdal forcé.

On posera $\epsilon = \Re(\underline{\epsilon})$ avec $\underline{\epsilon} = \underline{E}e^{j\omega t}$ et \underline{E} , l'amplitude complexe de ϵ puis $x_d = \Re(\underline{x}_d)$ avec $\underline{x}_d = X_d e^{j\omega t}$.

7. Modifier alors en conséquence l'équation (IV.1) pour y faire intervenir x_d puis montrer que l'on obtient

$$\underline{E} = \frac{X_d}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$$

avec $u = \omega/\omega_0$, la pulsation réduite.

Réponse :

La nouvelle elongation du ressort vaut alors $l = x - x_d - l_0 = \epsilon - x_d$. On en déduit

$$\frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\epsilon}{dt} + \omega_0^2 \epsilon = \omega_0^2 x_d$$

On passe alors en RSF

$$\underline{E}e^{j\omega t} \left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 X_d e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{E} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0/Q} X_d \quad (\text{IV.2})$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{X_d}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \quad (\text{IV.3})$$

d'où le résultat.

8. En déduire l'expression de l'amplitude E du signal ϵ . Montrer que le récipient va entrer en résonance pour une pulsation $\omega_r \approx \omega_0$ et ce, quelque soit la masse de sable ajoutée. Rappelons que l'on a précédemment montré que $Q \gg 1/2$.

Réponse :

On obtient l'amplitude par : $E = |\underline{E}| = \frac{X_d}{(1 - u^2)^2 + u^2/Q^2}$.

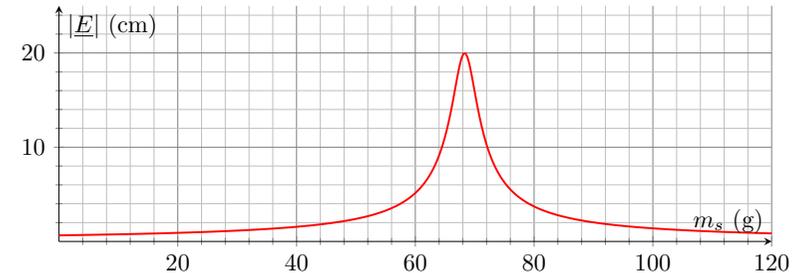
Il va y avoir résonance en elongation si E passe par un maximum sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc si $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$ passe par un minimum. On observe que

$$\frac{df}{du} = -2u \times 2(1 - u^2) + 2u/Q^2 = 0 \Rightarrow -4 + 4u^2 + 2/Q^2 = 0 \Rightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cela est possible uniquement si $Q \gg 1/\sqrt{2}$, ce qui est bien le cas ici car $\forall m_s$, on a montré que $Q > 40,6$ dans la partie précédente.

Le maximum est alors obtenu lorsque $u = u_r = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)} \approx 1$ soit $\omega_r \approx \omega_0$

9. On mesure expérimentalement l'amplitude de l'elongation E en fonction de la masse de sable m_s ajoutée dans le récipient et on obtient le résultat suivant



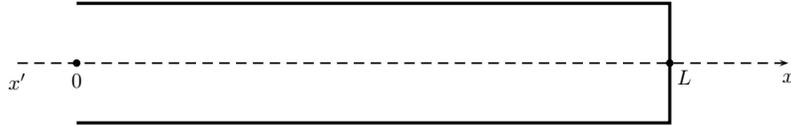
En déduire une valeur approchée de la pulsation ω des vibrations, puis de la fréquence des vibrations.

Réponse :

La résonance est observée pour $m_s \approx 68$ g. D'après la question précédente, on sait qu'à résonance, on a $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/(m_s + m_r)}$. On en déduit que $\omega = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui correspond à une fréquence $f = 9,5$ Hz.

V Flûte de Pan

On dispose d'un tuyau cylindrique de longueur L , fermé à l'une de ses extrémités ($x = L$).



On souffle obliquement sur le bord du tuyau à l'autre extrémité ($x = 0$), provoquant ainsi des vibrations de la colonne d'air.

1. Une onde de pression sinusoïdale $p_i(x, t)$ d'amplitude P_i et de pulsation ω se déplace dans le tube à la célérité c et dans le sens des x croissants. On pose $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde. Préciser l'expression de $p_i(x, t)$.

Réponse :

On a simplement dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants

$$p_i(x, t) = P_i \cos(\omega t - kx)$$

L'onde sonore se réfléchit au fond du tube avant de revenir en sens inverse, c'est à dire dans le sens des x décroissants. On note $p_r(x, t)$ l'onde réfléchi.

La superposition de ces deux ondes progressives entraîne l'apparition d'une onde stationnaire $p(x, t) = p_i(x, t) + p_r(x, t)$ dans le tube.

On admet qu'à l'extrémité ouverte, $p(x = 0, t) = p_i(0, t) + p_r(0, t) = 0$ à tout instant. On parle de nœud de suppression en $x = 0$.

2. En déduire l'expression de $p_r(x, t)$ en fonction de P_i , ω et k .

Réponse :

L'onde réfléchi se déplace selon les x décroissants, son expression est a priori de la forme générale

$$p_r(x, t) = P_r \cos(\omega t + kx + \phi)$$

On utilise alors la condition limite $x = 0$ pour déterminer P_r et ϕ :

$$\begin{aligned} p(0, t) &= p_i(0, t) + p_r(0, t) = 0 \\ \Rightarrow P_i \cos(\omega t - k \times 0) + P_r \cos(\omega t + k \times 0 + \phi) &= 0 \Rightarrow P_i \cos(\omega t) + P_r \cos(\omega t + \phi) = 0 \end{aligned}$$

Cette expression devant rester valable à tout instant, on observe que $P_r = -P_i$ et $\phi = 0$ conviennent.

On en déduit finalement $p_r(x, t) = -P_i \cos(\omega t + kx)$

3. On donne

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

En déduire que $p(x, t) = 2P_i \sin(\omega t) \cdot \sin(kx)$.

Réponse :

On détermine

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_i(x, t) + p_r(x, t) = P_i \cos(\omega t - kx) - P_i \cos(\omega t + kx) \\ \Rightarrow p(x, t) &= -2P_i \sin \frac{\omega t - kx - \omega t + kx}{2} \cdot \sin \frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2} \\ \Rightarrow p(x, t) &= 2P_i \sin(\omega t) \cdot \sin(kx) \end{aligned}$$

4. On admet qu'en $x = L$, l'amplitude de la suppression est maximale à tout instant d'où

$$\frac{d(\sin kx)}{dx}(L) = 0$$

En déduire que λ est de la forme $\lambda = \frac{4}{2n+1}L$ où n est un entier.

Réponse :

On en déduit que $k \cos(kL) = 0$ donc qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $kL = \pi/2 + n\pi$ soit $k = 2\pi/\lambda = \pi(1/2 + n)/L$ d'où au final

$$\lambda = \frac{4}{1 + 2n}L$$

5. L'entier $n \geq 0$ est le "mode de vibration".

(a) Montrer que la fréquence du mode fondamental est $f_0 = \frac{c}{4L}$.

Réponse :

D'après le cours, on a $f = c/\lambda = c \frac{1+2n}{4L}$. Le mode fondamental correspond à la plus petite fréquence strictement positive. Cette dernière est obtenue pour $n = 0$ soit $f_0 = \frac{c}{4L}$ d'où le résultat.

- (b) Quelle longueur le tuyau doit-il avoir pour que le son émis soit de fréquence fondamentale $f_0 = 264$ Hz (note ut_3) ? On prendra $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponse :

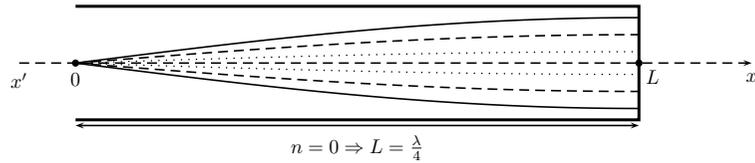
Il s'agit ici de faire une simple application numérique à partir de la relation précédente :

$$f_0 = \frac{c}{4L} \Rightarrow L = \frac{c}{4f_0} \approx 32,2 \text{ cm}$$

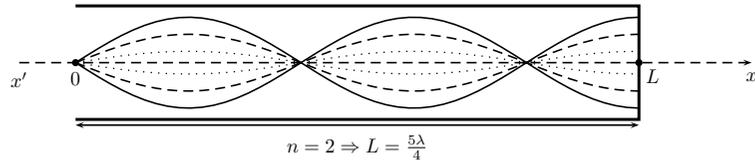
6. Tracer l'allure de $p(x, t)$ à différents instants dans le mode fondamental ($n = 0$) puis pour le mode $n = 2$.

Réponse :

On obtient pour le fondamental :



puis pour le mode associé à $n = 2$:



7. Quelle est la fréquence f_n de l'harmonique n ? On donnera f_n en fonction de L , n et c .

Réponse :

On utilise à nouveau

$$L = \frac{2n+1}{4} \lambda_n = \frac{2n+1}{4} \frac{c}{f_n} \Rightarrow \boxed{f_n = \frac{(2n+1)c}{4L}}$$

8. Les fréquences f correspondant aux notes de la gamme (dite « diatonique majeure de Zarlin ») débutant par la note de fréquence f_0 sont dans les rapports :

f/f_0	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
note	ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut

Quelles longueurs auront les tuyaux juxtaposés d'une flûte de Pan jouant la gamme d'ut₃, c'est-à-dire $f_0 = 264$ Hz ?

Réponse :

Si $\frac{f}{f_0} = \alpha \Rightarrow f = \alpha f_0$ or pour un tuyau de longueur L , la note (fondamentale) émise est $f = \frac{c}{4L}$, il faut donc une longueur $L = \frac{c}{4f} = \frac{c}{4\alpha f_0} = \frac{L_0}{\alpha}$ où L_0 est la longueur du tuyau qui produit la note f_0 . On avait calculé $L_0 = 32,2$ cm. Pour les autres tubes, il suffit de diviser par α , on complète le tableau :

$\alpha = f/f_0$	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
note	ut	ré	mi	fa	sol	la	si	ut
$L = L_0/\alpha$ (cm)	32,2	28,6	25,8	24,1	21,5	19,3	10,7	16,1