Physique - Devoir Surveillé 4

Le 07/12/2024

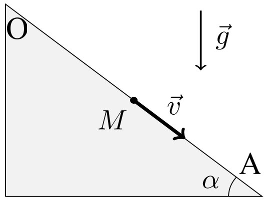
I La luge : un sport olympique *(ATS 2013)*

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur, allongé sur le dos sur la luge et les pieds en avant, descend une piste de glace. Pour freiner, ce dernier ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

On assimile l'ensemble { luge + lugeur } (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

I.A Descente rectiligne

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10 % (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m).



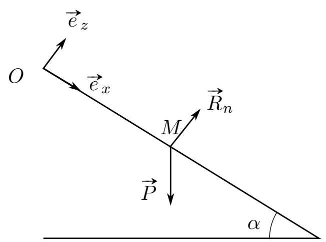
On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

1. *Après avoir clairement défini le repère choisi, appliquer la relation fondamentale de la dynamique pour exprimer puis calculer numériquement la norme de l'accélération a de la luge en fonction de g et de l'angle α.*

Réponse :

— Système : M de masse m ; Référentiel galiléen lié à la piste

— repère cartésien (mouvement rectiligne) O, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_x$ colinéaire à la piste , dans le sens du mouvement et $\vec{e}_z$ vers le haut.



— Bilan des forces :

— Le poids $\vec{P} = mg(\sin(\alpha)\vec{e}_x + -\cos(\alpha)\vec{e}_z)$

— La réaction normale du support $\vec{R}_n = R_n\vec{e}_z$ avec $R_n \geq 0$ en cas de contact.

On applique le PFD à M dans le référentiel galiléen en projection selon l'axe O, $\vec{e}_x$ et on obtient

$$ma = mg\sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{a = g\sin(\alpha)}$$

De plus, on a $\tan(\alpha) = 10/100 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}1\,\mathrm{rad}$ On en déduit que $\boxed{a \approx 1\,\mathrm{m/s^2}}$

Pour aller plus loin :

On peut aussi choisir un repère horizontal/vertical, mais les calculs vont y être beaucoup plus difficiles. En effet, l'accélération n'est pas simple à y exprimer, et il va falloir "se débarrasser" de R_n, qui apparaît selon les deux directions.

2. *L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $V_a = 25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Donner l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.*

Réponse :

On intègre le résultat précédent en prenant en compte la condition initiale $v(0) = V_0$

$$\boxed{v(t) = g\sin(\alpha)t + V_0}$$

On a ensuite simplement

$$v(t_a) = V_a = V_0 + g\sin(\alpha)t_a \Rightarrow \boxed{t_a = \frac{V_a - V_0}{g\sin(\alpha)} \approx 20{,}1\,\mathrm{s}}$$

3. *Quelle est la distance parcourue D_a lorsque la luge atteint la vitesse V_a ? Donner l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.*

Réponse :

On considère alors $x(t_a) = V_0 t_a + g\sin(\alpha)\frac{t_a^2}{2} + x(0)$. La distance parcourrue vaut alors

$$D_a = x(t_a) - x(0) = V_0\frac{V_a - V_0}{g\sin(\alpha)} + \frac{(V_a - V_0)^2}{2g\sin(\alpha)} = \frac{V_a - V_0}{2g\sin(\alpha)}(2V_0 + V_a - V_0) \quad \text{(I.1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_a = \frac{V_a^2 - V_0^2}{2g\sin(\alpha)} \approx 301{,}5\,\mathrm{m}} \quad \text{(I.2)}$$

4. *Retrouver l'expression de D_a en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.*

Réponse :

La description du système a déjà été effectuée. On observe de plus que la reaction normale du support ne travaille pas (perpendiculaire au déplacement) que $\delta W_P = \vec{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = mg\sin(\alpha)\mathrm{d}x$ On suppose que M est initialement en O et qu'il sera en A lorsque $t = t_a$ On applique alors le TEC à M dans R galiléen entre O et A

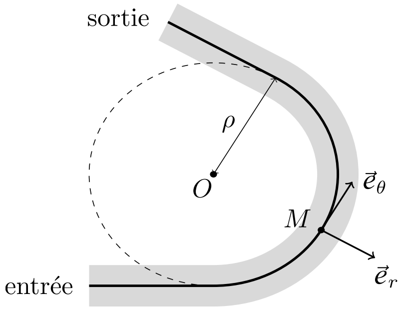
$$\Delta E_c = W_{OA}(\vec{P}) = \int_{x=0}^{D_a} mg\sin(\alpha)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}m(V_a^2 - V_0^2) = mg\sin(\alpha)D_a \quad \text{(I.3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_a = \frac{V_a^2 - V_0^2}{2g\sin(\alpha)}} \quad \text{(I.4)}$$

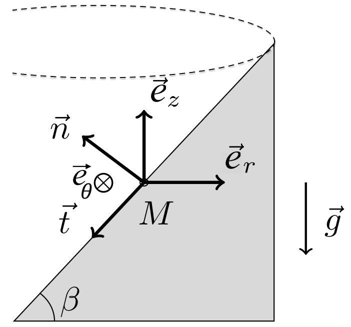
Pour aller plus loin :

On obtient bien la même expression qu'à la question précédente. On aurait aussi pu ré-obtenir ce résultat plus simplement à l'aide d'un TEM car le poids est une force conservative.

I.B Virage circulaire



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

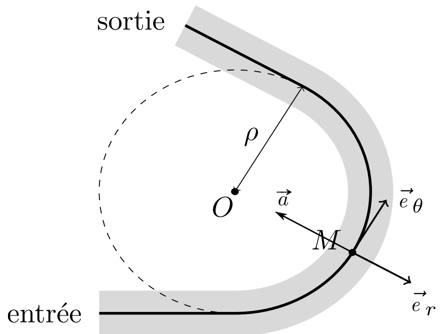
À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon $\rho = 15\,\mathrm{m}$. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. La trajectoire se situe dans un plan horizontal donc la vitesse s'exprime simplement selon $\vec{v} = V\,\vec{e}_\theta$.

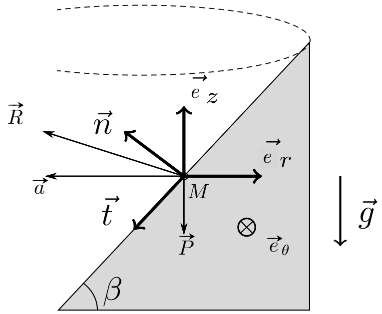
Le trièdre de vecteur unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est orthonormé direct. On désigne par $\vec{R} = R_N\,\vec{n} + R_T\,\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale (présence éventuelle de frottements solide). Les vecteurs unitaires $\vec{n}$ (normal) et $\vec{t}$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessus.

On remarquera que $\overrightarrow{R_T}$ ne désigne pas le frottement solide qui tend à freiner la luge le long de sa trajectoire circulaire (ce frottement-ci est négligé, car on considère que la luge parcourt le virage à vitesse constante), mais le frottement solide qui lui permet au contraire de ne pas déraper et donc de ne pas être éjectée suivant la direction $-\vec{t}$. $\overrightarrow{R_T}$ est donc suivant le vecteur $+\vec{t}$.

5. *Refaire le schéma vue de dessus et représenter la vitesse et l'accélération. Exprimer ensuite l'accélération $\vec{a}$ en fonction de V, ρ et de $\vec{e}_r$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.*

Réponse :
Comme indiqué dans l'énoncé, la vitesse est portée par le vecteur $\vec{e}_\theta$. De plus, l'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme est portée suivant le vecteur radial $-\vec{e}_r$ (on tourne bien à gauche sur le schéma d'où le "-").





On se place alors en repère polaire et on observe que

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_r\ ;\ \vec{v} = \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta = V\,\vec{e}_\theta\ ;\ \vec{a} = -V\dot{\theta}\vec{e}_r = -\frac{V^2}{\rho}\vec{e}_r$$

car $\dot{\theta} = V/\rho$.

6. *La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $\left(\vec{t}, \vec{n}\right)$. On représentera les forces sur un schéma de la vue en coupe de la piste.*

Réponse :
Bilan des forces :
— Le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z = mg(\sin(\beta)\,\vec{t} - \cos(\beta)\vec{n})$
— La réaction du support $\vec{R} = R_N\,\vec{n} + R_T\,\vec{t}$

On a de plus $\vec{a} = -\frac{V^2}{\rho}\vec{e}_r = \frac{V^2}{\rho}(\cos(\beta)\,\vec{t} + \sin(\beta)\vec{n})$. On applique alors le PFD à M dans R galiléen

$$m\frac{V^2}{\rho}(\cos(\beta)\,\vec{t} + \sin(\beta)\vec{n}) = mg(\sin(\beta)\,\vec{t} - \cos(\beta)\vec{n}) + R_N\,\vec{n} + R_T\,\vec{t}$$

soit en décomposant

$$m\frac{V^2}{\rho}\cos(\beta) = mg\sin(\beta) + R_T \tag{I.5}$$

$$m\frac{V^2}{\rho}\sin(\beta) = -mg\cos(\beta) + R_N \tag{I.6}$$

7. *Montrer alors que les composantes de la réaction du support s'expriment selon*

$$R_T = -mg\sin(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\cos(\beta) \tag{I.7}$$

$$R_N = +mg\cos(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\sin(\beta) \tag{I.8}$$

Réponse :
On en déduit simplement des questions précédentes le résultat attendu

$$\boxed{R_T = -mg\sin(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\cos(\beta)} \tag{I.9}$$

$$\boxed{R_n = mg\cos(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\sin(\beta)} \tag{I.10}$$

Pour aller plus loin :
C'est une question type "Montrer que", elle est là pour vous aider à trouver vos erreurs, et s'assurer que vous repartez bien des bons résultats (bouée de sauvetage !). Cependant, ne "truandez" pas pour obtenir ce résultat. Si ça ne marche pas, au niveau des signes par exemple, c'est que vous avez fait des erreurs avant.

8. *Quelle est l'expression de la vitesse V_c pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Effectuer l'application numérique pour un angle $\beta_i = 60\,°$. Écrire ensuite R_T en fonction de m, ρ β et $(V^2 - V_c^2)$.*

Réponse :
On a ici

$$-mg\sin(\beta) + m\frac{V_c^2}{\rho}\cos(\beta) = 0 \Rightarrow \boxed{V_c = \sqrt{\rho g\tan(\beta)} \approx 16{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

On peut donc réécrire l'expression de R_T :

$$R_T = \frac{m}{\rho}\cos(\beta)\left(V^2 - \frac{m\rho g\sin(\beta)}{m\cos(\beta)}\right) \Rightarrow \boxed{R_T = \frac{m}{\rho}\cos(\beta)\left(V^2 - V_c^2\right)}$$

Soit $f_l = 0,4$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| \leq f_l |R_N|$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geq V_c$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

9. *Montrer que V doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :*

$$V^2(\cos\beta - f_l \sin\beta) \leq g\rho(\sin\beta + f_l \cos\beta)$$

Réponse :
Il convient de comparer les expressions obtenues pour R_T et R_N sachant que ces grandeurs sont positives (c.f. question précédente) :

$$|R_T| \leq f_l|R_N| \Rightarrow -mg\sin(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\cos(\beta) \leq f_l\left(mg\cos(\beta) + m\frac{V^2}{\rho}\sin(\beta)\right) \tag{I.11}$$

$$\Rightarrow \boxed{V^2\left(\cos(\beta) - f_l\sin(\beta)\right) \leq \rho g\left(f_l\cos(\beta) + \sin(\beta)\right)} \tag{I.12}$$

d'où le résultat.

---

10. *En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale β_c à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f_l. Faire l'application numérique et convertir le résultat en degrés et commenter le résultat.*

Réponse :
On sait que $\beta \in]0, \pi/2[$. On en déduit que $f_l\cos(\beta) + \sin(\beta) \geq 0$ sur cet intervalle. Ainsi, dans le cas où $\cos(\beta) - f_l\sin(\beta) \leq 0$, l'inégalité précédente sera toujours vérifiée (et donc quelle que soit V). En effet, un réel négatif est toujours inférieur ou égal à un réel positif

$$\cos(\beta) - f_l\sin(\beta) \leq 0 \Rightarrow \cos(\beta) \leq f_l\sin(\beta) \Rightarrow \boxed{\beta \geq \arctan\left(\frac{1}{f_l}\right) = \beta_c \text{ avec } \beta_c \approx 68,2°}$$

Le virage doit donc être proche de la vertical afin de pouvoir être emprunté à n'importe quelle allure sans dérapage.

---

11. *Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse $V_{\max}$ à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g, ρ, β et f_l. Effectuer l'application numérique toujours pour l'angle $\beta_i = 60°$. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?*

Réponse :
Dans cette situation, $\cos(\beta) - f_l\sin(\beta) > 0$ et on obtient :

$$V \leq \sqrt{\frac{\rho g\left(f_l\cos(\beta) + \sin(\beta)\right)}{\cos(\beta) - f_l\sin(\beta)}} = \boxed{\sqrt{\rho g}\sqrt{\frac{f_l + \tan(\beta)}{1 - f_l\tan(\beta)}} = V_{\max}}$$

L'application numérique donne $\boxed{V_{\max} \approx 32{,}3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$. Si la vitesse est trop grande, la condition de non glissement latéral ne sera plus remplie et la luge va être déportée vers l'extérieur du virage.

---

12. *Justifier à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.*

Réponse :
En l'absence de frottement latéral, $R_T = 0$. Si $V = V_c$, le modèle étudié n'est plus valable et l'hypothèse de la trajectoire circulaire doit être remise en cause. La luge risque donc de quitter la piste. La prise en compte des frottements latéraux permet donc d'obtenir plus de souplesse lors de la prise du virage car on peut alors utiliser des vitesses comprises entre V_C et $V_{\max}$.

I.C Freinage final

La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $V_f = 30\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Il faut alors envisager un moyen efficace permettant de freiner en toute sécurité. On envisage alors le cas d'une piste de freinage horizontale et rectiligne dont la longueur L sera à déterminer. Sauf mention contraire, la seule source de frottement considérée est la force de frottement solide caractérisé par le coefficient de frottement frontal f_f tel que $||\vec{R}_T|| = f_f||\vec{R}_N||$.

13. *Déterminer l'expression de la réaction tangentielle $\vec{R}_T$ en fonction des données du problème*

Réponse :
On considère la luge dans le référentiel galiléen lié à la piste. On se place dans un repère cartésien dont l'axe Ox est colinéaire à la piste et orienté selon le sens du mouvement. Le bilan des actions extérieures à la luge indique :

— Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
— La réaction normale de la piste $\vec{R}_N = R_N\vec{e}_z$ avec $R_N > 0$ en cas de contact.
— La réaction tangentielle de la piste $\vec{R}_T = -R_T\vec{e}_x$ avec $R_T > 0$ (cette force s'oppose au mouvement).

On applique le PFD à la luge dans le référentiel d'étude galiléen

$$m\vec{a} = -mg\vec{e}_z + R_N\vec{e}_z - R_T\vec{e}_x$$

La projection de cette relation selon $\vec{e}_z$ donne $R_N = mg$. On en déduit finalement que $\vec{R}_t = -f_f mg\vec{e}_x$ en utilisant la relation fournie par l'énoncé en cas de glissement.

---

14. *On considère que la luge s'arrête au bout de la piste de freinage (distance de freinage L). Exprimer alors L en fonction de V_f, f_f et g en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.*

Réponse :
Seule la réaction tangentielle va avoir un travail non nul (les autres forces sont perpendiculaires au mouvement). On en déduit que $W = W(\vec{R}_T) = -mgf_fL$. En effet $\vec{R}_T$ est constant. On applique alors le TEC à la luge dans le référentiel galiléen lié à la piste entre l'instant où la luge franchit la ligne d'arrivée et l'instant où cette dernière s'arrête

$$0 - \frac{1}{2}mV_f^2 = -mgf_rL \Rightarrow \boxed{L = \frac{V_f^2}{2gf_f}}$$

---

15. *Le coefficient de frottement frontal (dans le sens du mouvement) entre la luge et la piste vaut $f_f = 0,01$. Effectuer l'application numérique pour L. Conclusion.*

Réponse :
On obtient ici $L \approx 4{,}5\,\mathrm{km}$. Ainsi, cette méthode de freinage ne semble pas appropriée.

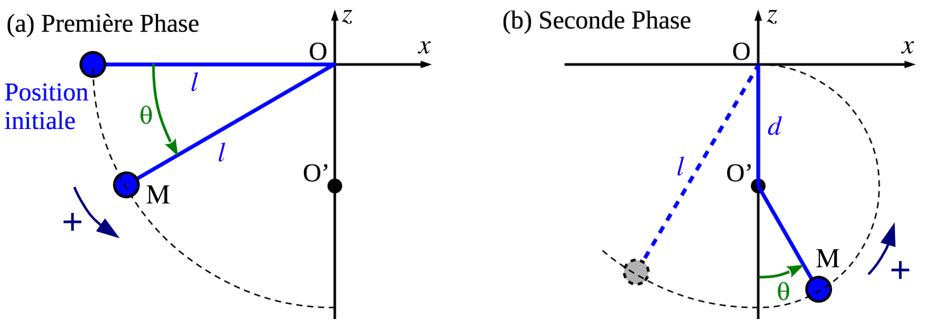
---

16. *En pratique, le lugeur peut aussi utiliser ces pieds pour freiner de manière plus efficace. Le coefficient de frottement vaut alors $f_f' = 0,4$. En déduire la valeur numérique correspondante de L'.*

Réponse :
On a alors $L' = 112{,}5\,\mathrm{m}$ Ce résultat semble beaucoup plus réaliste.

II Pendule à clou

Un point matériel M de masse m est relié à un point O fixe par un fil de longueur l et de masse nulle. Le pendule est lâché tendu, sans vitesse initiale depuis l'horizontal. On note g l'accélération de la pesanteur et on néglige tout frottement.



1. *Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Proposer un référentiel galiléen pour l'étude du mouvement du point matériel M.*

Réponse :
Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire dans lequel tout système isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Dans ce problème, on peut choisir le référentiel du laboratoire, dans lequel le support maintenant le pendule est fixe.

---

2. *Énoncer le théorème de l'énergie mécanique. Y a-t-il conservation de l'énergie mécanique dans le problème étudié ?*

Réponse :
Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit : $\Delta E_m = W^{NC}$, où ΔE_m est la variation de l'énergie mécanique entre deux instants du mouvement, et W^{NC} est le travail des forces non conservatives entre ces deux instants. Dans notre cas, comme le poids est une force conservative et la tension du fil ne travaille pas, le travail des forces non conservatives est nul, il y a donc conservation de l'énergie mécanique.

---

3. *Exploiter le théorème de l'énergie mécanique pour exprimer la vitesse v_0 et la vitesse angulaire ω_0 de M lorsque le pendule passe par la verticale.*

Réponse :

— Système : M de masse m ; Référentiel du laboratoire galiléen

— Bilan des forces :
  — Le poids $\vec{P}$, associé à l'énergie potentielle $E_p = mgz$
  — La tension du fil $\vec{T}$ (travail nul)

L'énergie mécanique à l'instant initial s'exprime (vitesse initiale nulle, et $z = 0$) :

$$E_m(\theta = 0) = \frac{1}{2} m \times 0^2 + mg \times 0 = 0$$

L'énergie mécanique lorsque le pendule est la verticale s'exprime :

$$E_m(\theta = \pi/2) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg(-l) = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgl$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on obtient :

$$E_m(\theta = 0) = E_m(\theta = \pi/2) \implies \frac{1}{2} m v_0^2 - mgl = 0 \implies \boxed{v_0 = \sqrt{2gl}}$$

Or le vecteur vitesse s'exprime : $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (si l'on se munit d'une base polaire), soit $v = l\omega$ où v est la norme de la vitesse, et ω la vitesse angulaire. On en déduit alors $\boxed{\omega_0 = \frac{v_0}{l} = \sqrt{\frac{2g}{l}}}$

Lorsque le pendule passe par la verticale, il vient frapper un clou en O', perpendiculaire au plan de la figure, situé à la verticale de O à la distance d (avec $d < l$). Pour étudier cette seconde phase du mouvement, on redéfinit l'angle θ comme l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale de la partie mobile O'M du pendule, comme indiqué sur la figure du problème. On suppose que le choc du pendule sur la tige ne modifie pas l'énergie mécanique du système.

4. *Justifier que la vitesse v_1 et la vitesse angulaire ω_1 de M immédiatement après le choc s'expriment :*

$$v_1 = \sqrt{2gl} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{2gl}}{l-d}$$

Réponse :
Par continuité de la vitesse, $\boxed{v_1 = v_0}$ (on peut également le montrer par conservation de l'énergie mécanique au moment du choc). En revanche, compte tenu de la nouvelle définition de θ (et de la discontinuité du rayon de la trajectoire, qui passe de l et $l-d$), on trouve que $\boxed{\omega_1 = \frac{v_1}{l-d} = \frac{\omega_0}{1-d/l}}$.

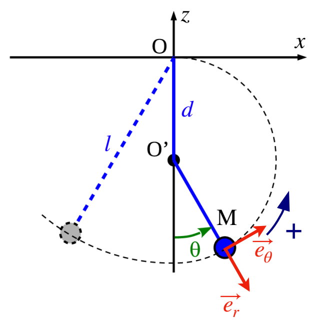
---

5. *Refaire le schéma de la seconde phase en y ajoutant les vecteurs de la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ au niveau du point M. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{O'M}}$, et les vecteurs vitesses et accélération.*

Réponse :

Le vecteur position s'exprime : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = (l-d)\vec{e_r}}$.

Par dérivations successives, on obtient : $\boxed{\vec{v} = (l-d)\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$ et $\boxed{\vec{a} = (l-d)\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - (l-d)\dot{\theta}^2\vec{e_r}}$.



6. *Appliquer le principe fondamental de la dynamique et le projeter dans la base polaire.*

Réponse :
Bilan des forces :
- Le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z = mg(\cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta)$
- La tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$

On applique alors le PFD à M dans le référentiel galiléen

$$m((l-d)\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - (l-d)\dot{\theta}^2\vec{e_r}) = mg(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}) - T\,\vec{e_r}$$

soit en décomposant

$$-m(l-d)\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - T \qquad \text{(II.1)}$$
$$m(l-d)\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) \qquad \text{(II.2)}$$

7. *Pour une inclinaison quelconque, montrer que la vitesse v de M s'exprime :*

$$v(\theta) = \sqrt{2g(d + (l-d)\cos(\theta))}.$$

On pourra soit appliquer la théorème de l'énergie mécanique, soit, à partir de la projection du principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e_\theta}$, multiplier par $\dot{\theta}$ et intégrer par rapport au temps.

Réponse :
L'énergie mécanique initiale s'exprime :

$$E_m(\theta = 0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgl$$

À un angle θ quelconque, on a $z = -d - (l-d)\cos(\theta)$. L'énergie mécanique s'exprime donc :

$$E_m(\theta) = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 - mg(d + (l-d)\cos(\theta))$$

La conservation de l'énergie mécanique permet donc d'obtenir :

$$E_m(0) = E_m(\theta) \implies \frac{1}{2}mv_1^2 - mgl = \frac{1}{2}mv(\theta)^2 - mg(d + (l-d)\cos(\theta))$$

En utilisant $v_1 = v_0 = \sqrt{2gl}$, on obtient le résultat attendu.

8. *En déduire que la norme de la tension du fil s'exprime :*

$$T(\theta) = mg\left(3\cos(\theta) + \frac{2d}{l-d}\right)$$

Réponse :
À partir du PDF projeté selon $\vec{e_r}$, on obtient :

$$T(\theta) = mg\cos(\theta) + m(l-d)\dot{\theta}^2$$

Or $\dot{\theta} = \frac{v}{l-d}$, cela donne donc :

$$T(\theta) = mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{l-d} = mg\cos(\theta) + 2mg\left(\frac{d}{l-d} + \cos(\theta)\right) = mg\left(3\cos(\theta) + \frac{2d}{l-d}\right)$$

9. *À quelle condition sur T le pendule fera-t-il un tour complet autour de O' en restant tendu ? Montrer que cela n'est possible que si $d > 3l/5$.*

Réponse :
Le fil reste tendu tant que $T > 0$. Donc le pendule fera un tour complet autour de O' si $\forall\theta \in [0, 2\pi] T(\theta) > 0$. En particulier, comme $T(\theta)$ est minimal pour $\theta = \pi$, il faut que

$$T(\theta = \pi) > 0 \iff mg\left(3\cos(\pi) + \frac{2d}{l-d}\right) > 0$$

Cela mène à $\boxed{d > 3l/5}$.

10. *On suppose que $l = 2d$. Pour quel angle θ_D le pendule se détendra-t-il ? Quelle est alors la vitesse de M ? Que se passera-t-il par la suite ?*

Réponse :
Comme $d = \frac{l}{2} < \frac{3l}{5}$, le pendule ne peut faire un tour complet en restant tendu. En repartant de la condition précédente : le fil reste tendu tant que $T(\theta) > 0$ soit :

$$mg\left(3\cos(\theta) + \frac{2d}{l-d}\right) > 0 \implies \cos(\theta) > -\frac{2d/3}{l-d} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi, le pendule se détend lorsque : $\boxed{\theta = \theta_D = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)}$.

En reprenant l'expression de la vitesse obtenue à la question 7, on trouve :

$$v(\theta_D) = \sqrt{2g(d + (l-d) \times \left(-\frac{2}{3}\right)} \implies \boxed{v(\theta_D) = \sqrt{\frac{gl}{3}}}$$

Par la suite, comme le point matériel M n'est plus soumis qu'à la pesanteur, il suivra une trajectoire de chute libre, avec une vitesse initiale de norme $v(\theta_D)$, et porté par le vecteur $\vec{e_\theta}$ lorsque $\theta = \theta_D$, jusqu'à ce qu'il soit de nouveau rappelé par le fil.