Physique - Devoir Surveillé 04 - parcours bleu

Le 06/12/2025

Barème approximatif :

- Exercice I : 6 points
- Exercice II : 10 points
- Exercice III : 11 points
- Exercice IV : 5 points
- Soin, rédaction et rigueur : 3 points

I Questions de cours

1. *Retrouvez l'équation du mouvement pour le pendule simple avec frottement fluide en utilisant le théorème énergétique de votre choix. (un schéma détaillé est attendu avant de commencer la résolution du problème).*

   Réponse :

---

2. *Dans le cas d'un mouvement à un degré de liberté, expliquez à l'aide d'un schéma la notion d'état d'équilibre. Rappelez ensuite les conditions d'équilibre et de stabilité associées aux dérivées de l'énergie potentielle.*

   Réponse :

---

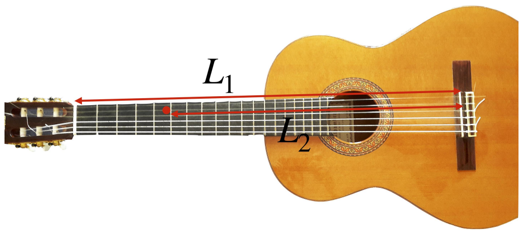
3. *Obtention de la trajectoire d'un projectile de masse m lancé au niveau du sol avec une vitesse initiale de norme v_0 faisant un angle $\theta_0 > 0$ avec l'axe horizontal. Les frottements fluides sont négligés.*

   Réponse :

II Analyse du son produit par deux instruments

II.A Accordage d'une guitare

Soit une corde initialement au repos et confondue avec l'axe Ox, inélastique, de masse linéique μ (masse par unité de longueur en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1}$), tendue par une tension pratiquement uniforme et constante T (en N).



La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L_1$.

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, autour de la position d'équilibre. L'élongation transversale à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y(x, t)$.

On rappelle l'expression de la célérité des ondes se propageant le long de la corde en fonction de μ et T :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

1. *Proposer une expression pour la résultante des ondes se propageant le long de la corde en faisant apparaître notamment deux amplitudes a_+ et a_-.*

   Réponse :
   Comme dans le cours, on obtient la somme de deux ondes se propageant en sens contraires :

   $$\boxed{s(x,t) = a_+ \cos(\omega t - kx) + a_+ \cos(\omega t + kx + \phi)}$$

   Le premier terme étant associé à une onde se déplaçant selon les x croissants.

---

2. *En appliquant la première condition limite en $x = 0$, justifier que l'on obtient des ondes stationnaires.*

   Réponse :
   La corde est fixée en $x = 0$ soit $s(0, t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Cela implique

   $$a_+ \cos(\omega t) + a_+ \cos(\omega t + \phi) = 0\ \forall t \Rightarrow$$

   Cette relation est vérifiée en choisissant $a_- = a_+$ et $\phi = 0$ soit :

   $$s(x,t) = a_+ \left(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)\right) = \boxed{2a_+ \sin(\omega t)\sin(kx) \quad \text{du type} \quad f(t) \cdot g(x)}$$

   On est donc bien en présence d'une onde stationnaire.

---

3. *En appliquant la deuxième condition limite, montrer que seuls certains vecteurs d'onde (notés k_n) sont observables.*
   Démontrer ensuite que les fréquences correspondantes s'expriment selon :

   $$f = \frac{nc}{2L_1} = f_n \qquad \textit{avec } n \textit{ un entier} > 0$$

   Réponse :
   L'application de la deuxième condition limite donne :

   $$s(L_1, t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2a_+ \sin(\omega t)\sin(kL_1) = 0,\ \forall t$$

   Il suffit de se placer à $t = t_0$ tel que $\sin(\omega t_0) \neq 0$ et on en déduit $a_+ = 0$ (solution triviale) ou bien $\sin(kL_1) = 0$. La solution triviale étant mise de côté (absence complète d'onde dans ce cas), on en déduit :

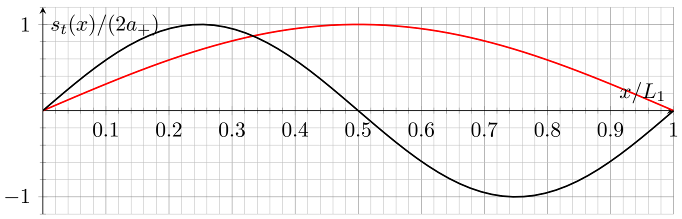
   $$\exists n \in \mathbb{N} | kL_1 = n\pi \Rightarrow k = \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L_1}}$$

   De plus, on sait que $f = \frac{kc}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = \frac{nc}{2L_1}}$

---

4. *Tracer les deux premiers modes obtenus à un instant fixé et en fonction de x.*

Réponse :
L'indice n du mode correspond au nombre de fuseaux qui peuvent être observés. On trace ensuite les modes à l'instant t tel que $\sin(\omega t) = 1$ et on obtient :



II.B Étude d'une flute à bec et analyse de spectre

La flûte à bec peut se modéliser au premier ordre comme un résonateur de longueur L avec des conditions aux limites asymétriques : un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre. Dans ce cas, à l'extrémité fermée la vitesse s'annule (les molécules ne peuvent pas bouger).
Cela se traduit par la présence d'un nœud en $x = 0$ et d'un ventre en $x = L$ pour la vitesse acoustique. Dans toute la suite, on notera c' la célérité du son dans l'air.

5. *Reprendre l'étude réalisée dans la partie précédente et l'adapter aux nouvelles conditions limites. Il s'agira en particulier d'établir que les fréquences propres f' associées aux modes acoustiques observés dans la flute à bec s'expriment selon :*

$$f' = \frac{c'}{4L} + \frac{nc'}{2L} = f'_{n'} \quad \textit{avec } n' \textit{ un entier} \geq 0$$

Réponse :
La première CL est identique à celle rencontrée pour la corde de la guitare, on peut donc écrire :

$$s(x,t) = 2a_+ \sin(\omega t)\sin(kx)$$

car cette expression vérifie bien $s(0,t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. On observe ensuite un ventre en $x = L$ soit :

$$\frac{\partial s}{\partial x}(L,t) = 0 \Rightarrow 2ka_+ \sin(\omega t)\cos(kL)$$

Soit $ka_+ = 0$ (solution triviale car absence d'onde) ou bien $\cos(kL) = 0$. La deuxième solution donne :

$$\exists n \in \mathbb{N} | kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow k = k_n = \frac{\pi}{2L} + \frac{n\pi}{L}$$

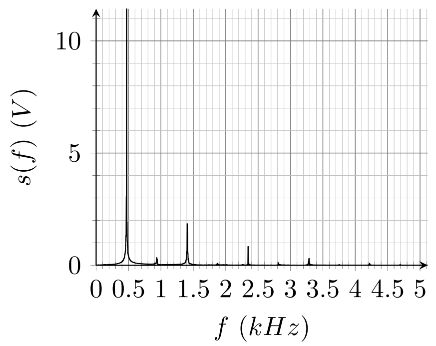
On en déduit $\boxed{f = \frac{c'}{4L} + \frac{nc'}{2L}}$

---

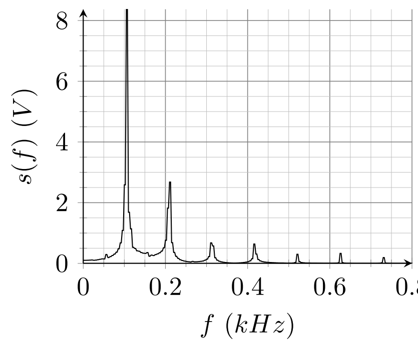
6. *Pour une longueur $L = 17{,}5\,\text{cm}$ (correspondant aux deux premiers trous bouchés), on obtient une fréquence fondamentale de $f_{\text{obs}} = 490\,\text{Hz}$. En déduire la valeur de la célérité du son dans l'air.*

Réponse :
Le fondamental est obtenu pour $n = 1$ soit $f_{\text{obs}} = \frac{c'}{4L} \Rightarrow \boxed{c' = 4Lf_{\text{obs}} \approx 343\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.
Ce résultat est cohérent avec nos connaissances sur la vitesse du son dans l'air.

On a ensuite enregistré deux notes jouées par une guitare et par une flute (les notes jouées sont différentes sur les deux instruments). Les spectres associés à ces notes sont reproduits dans les deux figures ci-dessous :



spectre a



spectre b

7. *Associer les spectres a et b à leurs instruments respectifs. Toute réponse non soigneusement justifiée ne sera pas prise en compte.*

Réponse :
Pour la guitare, on a $f = f_n = \frac{nc}{2L} = nf_1$. On va donc observer des harmoniques à f_1, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, ...
Pour la flute, on a $f' = f'_n = \frac{c'}{4L}(1+2n) = (1+2n)\,f_0$ donc on va observer des harmoniques à f_0, $f_1 = 3f_0$, $f_2 = 5f_0$, ...
En en déduit que le spectre a correspond à la flute car **le deuxième pic est à une fréquence trois fois plus élevée que le premier**. Il existe bien un pic à $2f_0$ mais ce dernier est d'amplitude négligeable. A l'inverse, le spectre b correspond à la guitare car **le deuxième pic est à une fréquence deux fois plus élevée que le premier**

III Métro gravitationnel

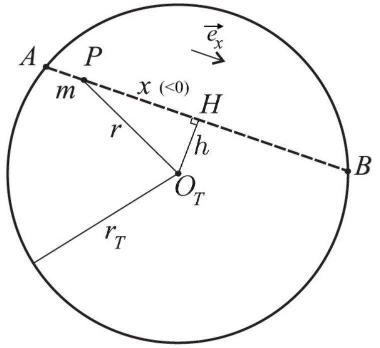
On peut montrer que, pour tout point M de masse m, situé à l'intérieur de la Terre à la distance r du centre O de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la terre et de valeur :

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R_T} \vec{e}_r$$

où g_0 est la norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre, supposé uniforme, R_T est le rayon de la terre, $r = OM$ est la distance du point M au centre et $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ est le vecteur unitaire radial.

On considère un tunnel imaginaire rectiligne AB, d'axe Hx (on prendra H l'origine de l'axe et $\vec{e}_x$ le vecteur directeur unitaire dirigé de A vers B) ne passant pas par O et traversant la Terre. On note h la distance OH du tunnel au centre.

Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Des parois magnétiques évitent même que le véhicule ne soit en contact avec les parois. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre sans vitesse initiale.



1. *Montrer que la force $\vec{F}$ est conservative et qu'elle dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{mg_0}{R_T}\frac{r^2}{2} + K$.*

Réponse :
Calculons le travail élémentaire de la force $\vec{F}$:

$$\delta W = \vec{F}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -mg_0 \frac{r}{R_T}\vec{e}_r.\mathrm{d}(r\vec{e}_r) = -mg_0\frac{r}{R_T}\vec{e}_r.(\mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta)$$

On en déduit, entre deux points A et B :

$$\delta W = -mg_0\frac{r}{R_T}\mathrm{d}r \Rightarrow W_{A\to B} = \int -mg_0\frac{r}{R_T}\mathrm{d}r = \left[-\frac{mg_0r^2}{2R_T} + K\right]_{r_A}^{r_B},\ K \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $W_{A\to B}$ ne dépend pas du chemin suivi, donc la force est conservative et on obtient par identification avec $W = -\Delta E_p$: $\boxed{E_p = \frac{mg_0r^2}{2R_T} + K}$

Pour aller plus loin :
Attention a ne pas introduire la constante K n'importe comment ! On ne peut pas dire "$E_p = mg_0r^2(2R_T)$ or blablabla donc $E_p = mg_0r^2(2R_T) + K$" ; peu importe le blablabla, c'est faux, sauf pour $K = 0$. La constante vient du calcul de primitive...

2. *Déterminer K en choisissant une énergie potentielle nulle au centre O.*

Réponse :
En C, on a $r = 0$ d'où $E_p(r = 0) = K = 0$. On a donc finalement

$$\boxed{E_p = \frac{mg_0r^2}{2R_T}}$$

3. *Montrer que le système est conservatif et calculer son énergie mécanique.*

Réponse :
Le système est soumis à une force $\vec{F}$ qui est conservative (Q1) ainsi qu'à une force de guidage (l'énoncé mentionne un champ magnétique) qui ne travaille pas (perpendiculaire au mouvement).D'après le théorème de l'énergie mécanique en référentiel galiléen, son énergie mécanique est une constante. On peut la calculer à l'état initial, où M est en A et sans vitesse :

$$E_m = E_{m_A} = E_c + E_{p_A} = 0 + \frac{mg_0R^2}{2R_T} \Rightarrow \boxed{E_m = \frac{mg_0R_T}{2}}$$

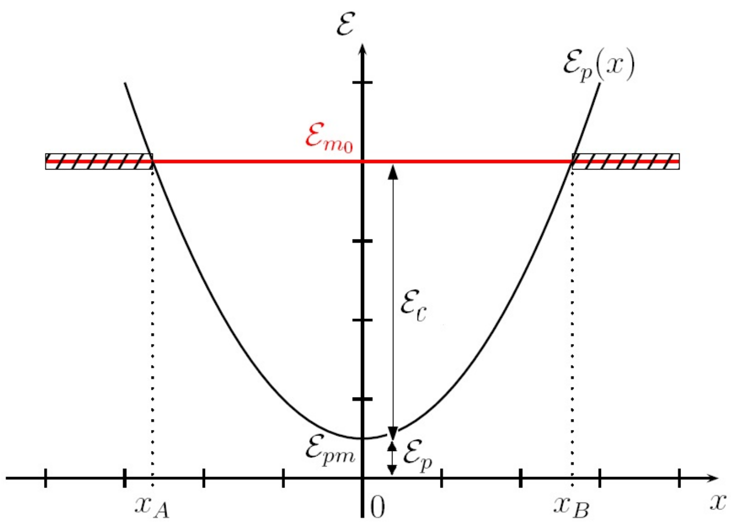
4. *Démontrer alors rigoureusement que :*

$$E_p(x) = \frac{mg_0}{2R_T}(h^2 + x^2)$$

puis tracer la courbe correspondante. On placera au moins un point particulier.

Réponse :
Géométriquement, on voit d'après le théorème de Pythagore que $r^2 = h^2 + x^2$ d'où $\boxed{E_p = \frac{mg_0}{2R_T}(h^2 + x^2)}$

Il s'agit d'une parabole tournée vers le haut. En $x = 0$, on a $E_p(0) = \frac{mg_0h^2}{2R_T}$, c'est par ailleurs le minimum de la fonction, d'où la courbe suivante :



5. *Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et leur(s) stabilité(s).*

Réponse :
On est a l'équilibre lorsque $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = mg_0x/R_T = 0 \Rightarrow x = 0$ De plus, on a $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = mg_0/R_T > 0$ donc la position d'équilibre est stable. Ce résultat est tout à fait conforme à ce qui peut être observé sur la courbe.

6. *Quelle est la nature du mouvement ? Déterminer les positions extrêmes x_{min} et x_{max} (démonstration attendue) atteintes par le point M. Que vaut l'énergie cinétique en ces points ?*

Réponse :
Le système est conservatif donc son énergie mécanique se conserve. On peut donc placer E_m sur le graphe : c'est une droite horizontale. Comme $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$, on a $E_p \leq E_m$, ce qui limite les positions accessibles au point M. Le mouvement est confiné, le point M effectue des oscillations entre x_{min} et x_{max}.

En x_{min} et x_{max}, la vitesse est nulle car $E_p = E_m$ donc $E_c = 0$.
Pour déterminer x_{min} et x_{max} on résout l'équation

$$E_p(x) = E_m \Rightarrow \frac{mg_0}{2R_T}(x^2+h^2) = \frac{mg_0R_T}{2} \Rightarrow x^2+h^2 = R_T^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{R_T^2-h^2}$$

d'où $\boxed{x_{min} = -\sqrt{R_T^2-h^2}}$ et $\boxed{x_{max} = +\sqrt{R_T^2-h^2}}$
Ces deux positions correspondent respectivement aux points A et B.
Pour aller plus loin :
L'idée principale de la réponse est $E_m = E_p$ aux limites du mouvement, c'est cette relation qui permet de définir les bornes. A l'inverse, il ne faut surtout pas commencer par dire que les positions extrêmes sont associées aux points A et B, sinon il n'y a plus de démonstration possible.

---

7. *Déterminer la vitesse maximale atteinte par le véhicule au cours de son mouvement puis réaliser l'application numérique pour $h = 3000\,\text{km}$. Faire apparaître sur le graphique l'énergie potentielle et l'énergie cinétique en ce point.*

Réponse :
La vitesse maximale est atteinte lorsque l'énergie cinétique est maximale donc lorsque l'énergie potentielle est minimale, soit en $x = 0$. On a alors

$$E_m = \frac{mg_0R_T}{2} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg_0h^2}{2R_T} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg_0}{2R_T}(R_T^2-h^2) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}(R_T^2-h^2)} \approx 7\,\text{km/s}}$$

---

8. *Par une méthode énergétique, déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit l'abscisse x de M et la mettre sous la forme :*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Exprimer ensuite ω_0 en fonction de g_0 et R.

Réponse :
L'énergie mécanique étant constante, sa dérivée par rapport au temps est nulle. En reprenant la première expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{mg_0}{2}(x^2+h^2)$$

On dérive :

$$\frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg_0}{2R}2x\dot{x}$$

En simplifiant par $\dot{x}$, on en déduit l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0}$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{g_0}{R}$, on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

9. *En déduire l'expression de x en fonction du temps. Quelle est alors la durée T_{as} d'un aller simple ? Réaliser l'application numérique.*

Réponse :
La solution générale de cette équation s'écrit $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales permettent de déterminer A et B.
A $t = 0$, $x = x_A = -\sqrt{R^2-h^2} = A$. De plus, $\dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ d'où à $t = 0$ $\ddot{x}(0) = B\omega_0 = 0$ car le vitesse initiale est nulle. On a donc finalement

$$\boxed{x(t) = -\sqrt{R^2-h^2}\cos(\omega_0 t)}$$

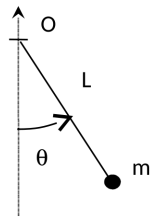
Afin de mettre $x(t)$ sous une forme faisant apparaître une amplitude positive, on peut aussi écrire :

$$x(t) = \sqrt{R^2-h^2}\cos(\omega_0 t + \pi)$$

La durée de l'aller simple est la moitié de la période des oscillations soit

$$\boxed{T_{as} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 2{,}5\times10^3\,\text{s} \approx 40\,\text{minutes}}$$

IV Étude d'un pendule simple



On considère un pendule simple constitué d'une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur L. Tant que le fil est tendu, on repère la position de la masse par l'angle θ représenté sur la figure ci-contre.

On néglige les frottements. À l'instant initial, $\theta(0) = 0°$ et on donne au mobile une vitesse de norme v_0.

1. *Déterminer les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération en fonction des données, tant que le fil est tendu, dans le repère qui vous semble le plus pertinent.*

Réponse :
On se place en coordonnées polaires. On a alors

$$\vec{r} = L\vec{u}_r \quad ; \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

---

2. *Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.*

Réponse :
Bilan des forces qui s'appliquent sur la masse :
— poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z = -mg[-\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta]$
— tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$

On applique la loi de la quantité de mouvement sur la masse m dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

On projette selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ et on divise par m :

$$-T/m + g\cos(\theta) = -L\dot{\theta}^2 \quad ; \quad \boxed{-g\sin(\theta) = L\ddot{\theta}}$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0} \quad ; \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

---

3. *Que devient cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes ? Pour quel autre système avons-nous rencontré la même équation ?*

Réponse :
Pour de faibles oscillations, typiquement $\theta < 20\ °$, alors $\sin(\theta) \approx \theta$ et l'équation différentielle devient celle de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}.$$

---

4. *Résoudre cette équation pour des oscillations de faibles amplitudes.*

Réponse :
Les solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

Les conditions initiales sont :

$$\theta(0) = 0 \quad ; \quad v(0) = v_0 = L\dot{\theta}(0).$$

On trouve alors

$$\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)}.$$
