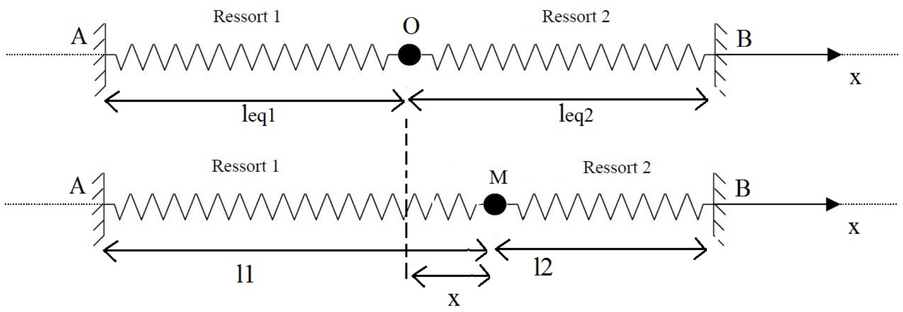
Physique - Devoir Surveillé 03

Le 16/11/2024

I Analogies électromécaniques

I.A Oscillateur mécanique

Considérons un mobile supposé ponctuel M de masse m astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox. Ce mobile est maintenu par deux ressorts à réponse linéaire dont les extrémités sont fixées en deux points A et B séparés d'une distance L.



Les deux ressorts sont identiques, ont même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq}. Soit O le point où se trouve le mobile lorsqu'il est à l'équilibre. O constitue l'origine de l'axe des x.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

L'étude est menée dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. A $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

1. *Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve à un point d'abscisse x quelconque. Montrer ensuite que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Indication : On fera un schéma sur lequel on placera les distances ℓ_{eq}, L et x ainsi que les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des 2 ressorts. On écrira de plus l'équation à l'équilibre.

Réponse :
Bilan des forces :

- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est la verticale ascendante
- La réaction du support $\vec{R} = R\vec{u_z}$ puisqu'il n'y a pas de frottements avec le support
- La force de rappel élastique exercée par le ressort 1 : $\vec{F_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}_x$
  et la force de rappel exercée par le second ressort : $\vec{F_2} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}_x$

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

Or, on a $\overrightarrow{OM} = x\vec{u_x}$, d'où $\vec{v} = \dot{x}\vec{u_x}$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u_x}$.

Ainsi, en projection sur $\vec{u_x}$, il vient $m\ddot{x} = k(\ell_2-\ell_0)-k(\ell_1-\ell_0)$. Or, à l'équilibre, on a $0 = k(\ell_{2_{eq}}-\ell_0)-k(\ell_{1_{eq}}-\ell_0)$ d'où en soustrayant ces 2 équations :

$$m\ddot{x} = k(\ell_2 - \ell_{2_{eq}}) - k(\ell_1 - \ell_{1_{eq}})$$

Or, on voit sur le schéma que $\ell_1 - \ell_{1_{eq}} = x$ et $\ell_2 - \ell_{2_{eq}} = -x$. On a donc finalement :

$$m\ddot{x} = -2kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Pour aller plus loin :
Autre possibilité : Identifier sur le schéma que $L = 2\ell_{eq}$ par symétrie et directement exprimer les forces de rappel élastique : $\vec{F}_1 = -k(x + l_{eq} - l - 0)\vec{e}_x$ et $\vec{F}_2 = k(l_{eq} - x - l - 0)\vec{e}_x$.

Dans tous les cas, vu que le résultat est donné, il ne faut surtout pas bluffer et trafiquer vos calculs pour que ça marche !

---

2. *Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre et la période propre T_0 en fonction de k et m.*

Réponse :
On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et donc de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

---

3. *Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.*

Réponse :
Les solutions de cette équation différentielles sans second membre sont $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
Or, à $t = 0$, on a $x(0) = x_0$ d'un part et $x(0) = A$ d'autre part. On en déduit $A = x_0$. De plus, $\dot{x}(0) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ d'où $\dot{x}(0) = B\omega_0$ d'un part, et d'après la condition initiale, $\dot{x}(0) = 0$. Il vient donc $B = 0$ et finalement :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$$

---

4. *Donner les expressions des énergies potentielles élastiques $E_{p1}(t)$ et $E_{p2}(t)$ de chacun des deux ressorts, de l'énergie cinétique $E_c(t)$ du mobile et de l'énergie mécanique totale $E(t)$ du système en fonction de k, x_0, ω_0 et t, et éventuellement de ℓ_0 et ℓ_{eq}.*

Réponse :

On a $E_{p1} = \frac{1}{2}k(x + \ell_{eq} - \ell_0)^2$ et $E_{p2} = \frac{1}{2}k(L - \ell_{eq} - x - \ell_0)^2$.
De plus : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Il suffit ensuite de remplacer x et $\dot{x}$ par leurs expressions respectives. On remarque au passage que l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_{p1} + E_{p2} + E_c = \frac{1}{2}k[(x+\Delta)^2 + (x-\Delta)^2] + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{(I.1)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}k\Delta^2}_{constant} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2}\right) \quad \text{(I.2)}$$

$$= \frac{1}{2}k\Delta^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_0^2\left(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)}_{=1}\right) \quad \text{(I.3)}$$

$$= Cste \quad \text{(I.4)}$$

avec $\Delta = \ell_{eq} - \ell_0$, l'écart entre longueur à vide et longueur à l'équilibre pour les deux ressorts. On retrouve ainsi une énergie mécanique constante pour l'évolution de ce système, en accord avec l'absence de forces non conservatives.

Les questions qui suivent prennent en compte l'existence de frottements lors du déplacement du mobile sur son support.

En fait, il existe entre le mobile et la tige horizontale un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme $\vec{f} = -\mu \vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du mobile.

Les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions précédentes.

5. *Établir la nouvelle équation différentielle dont $x(t)$ est solution. On posera $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $h = \mu/m$.*

Réponse :
On ajoute au bilan la force $\vec{f} = -\mu\vec{v} = -\mu\dot{x}$. Ainsi, il vient :

$$m\ddot{x} = k(\ell_2 - \ell_0) - k(\ell_1 - \ell_0) - \mu\dot{x}$$

Or, à l'équilibre, on a toujours $0 = k(\ell_{2_{eq}} - \ell_0) - k(\ell_{1_{eq}} - \ell_0)$. Après soustraction et remise en forme, on a donc :

$$m\ddot{x} = -2kx - \mu\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \qquad \text{(I.5)}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{(I.6)}$$

---

6. *Montrer que lorsque $\mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$ le mouvement est oscillatoire amorti.*

Réponse :
Pour que le mouvement soit oscillatoire amorti, il faut que l'on soit en régime pseudo-périodique, il faut donc que les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle soient complexes. Or, ce polynôme s'écrit : $r^2 + hr + \omega_0^2 = 0$
On doit donc avoir : $\Delta = h^2 - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow h^2 < 4\omega_0^2 \Rightarrow h < 2\omega_0$
En réinjectant les expressions de h et ω_0, cela donne :

$$\frac{\mu}{m} < 2\sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow \mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

---

7. *Donner l'expression générale de $x(t)$ dans ce cas, sans chercher à calculer les constantes d'intégration.*

Réponse :
On calcule les racines complexes :

$$r = -\frac{h}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - h^2} = -\frac{h}{2} \pm j\ \frac{1}{2}\ 2\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}$$

On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}$, d'où $r = -2h \pm j\Omega$ et $x(t)$ s'écrit alors :

$$x(t) = e^{-\frac{h}{2}t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

---

8. *Exprimer la pseudo-période associée à ce mouvement en fonction de ω_0 et h.*

Réponse :
La pseudo-période T est :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\omega_0}\right)^2}}$$

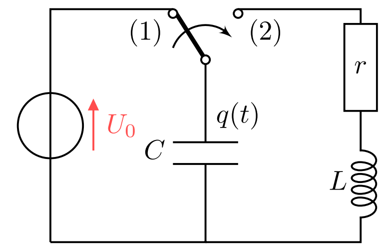
---

9. *Expliquer, qualitativement mais précisément, ce qu'il se passe au niveau énergétique lors de ce mouvement oscillatoire amorti.*

Réponse :
Initialement, l'énergie mécanique de l'oscillateur est sous forme potentielle puisqu'il a été écarté de sa position d'équilibre.
Au cours du mouvement, l'énergie mécanique est convertit sous forme cinétique et inversement, ce qui crée le mouvement oscillatoire, mais une partie de cette énergie est dissipée par frottement, ce qui fait que l'amplitude des oscillations diminue au cours du mouvement.

I.B Oscillateur électrique

Soit le circuit schématisé ci-dessous, constitué d'un condensateur parfait de capacité C, d'une inductance L de résistance interne r et d'un générateur de tension continue U_0.
Le commutateur K est initialement en position (1). Le condensateur est donc chargé sous la tension U_0. A l'instant $t = 0$, le commutateur K est basculé dans la position (2).



On note $q(t)$ la charge portée par l'armature du condensateur pointée par $i(t)$ avec $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit.

10. *Exprimer l'énergie électromagnétique $E_m = E_c + E_L$ stockée par la bobine et le condensateur en fonction de $q(t)$, $i(t)$, L et C.*

Réponse :
On a $E_m = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{q(t)^2}{2C} + \frac{Li(t)^2}{2}$ car $q = Cu$

---

11. *Justifier que* $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2$. Indice : il est beaucoup plus rapide pour cela d'effectuer un bilan de puissance !

Réponse :
On peut démontrer la formule du bilan de puissance à partir de la loi des mailles (toutes les tensions sont prises en convention récepteur) : $U_R + U_C + U_L = 0 \Rightarrow U_R i + U_C i + U_L i = 0$ soit au final $P_R + P_L + P_C = 0$ et donc :

$$P_L + P_C = -P_R = -ri^2 \qquad \text{(I.7)}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2 \qquad \text{(I.8)}$$

D'où le résultat. L'énergie magnétique du circuit diminue à cause la la puissance dissipée par effet Joule.

12. ***Déduire de la question précédente l'équation différentielle qui régit la charge*** $q(t)$ ***dans le circuit****.*
On posera $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ *et* $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$ *où* ω_0 *est la pulsation propre du circuit oscillant et* Q_0 *est le facteur de qualité du circuit.*
Ré-exprimer alors cette équation différentielle en utilisant les grandeurs ω_0 *et* Q_0*.*
En cas de problème avec cette question, vous pouvez à la place obtenir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ *de manière plus classique, à l'aide d'une loi des mailles. Cela rapportera cependant moins de points.*

Réponse :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2C}2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}q + \frac{L}{2}2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = i\left(\frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

En injectant dans l'équation précédente, il vient

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2 = i\left(\frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

On peut simplifier cette equation par le courant i en supposant qu'il existe au moins au instant ou il est non nul :

$$-r\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0$$

Avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$, il vient au final :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0$$

13. *Retrouver la condition sur* Q_0 *pour que la solution de l'équation différentielle présente des oscillations amorties. (Démonstration attendue)*

Réponse :
Pour qu'il y ait des oscillations amorties, il faut (cf partie précédente) :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q_0^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2\left(\frac{1}{Q_0^2} - 4\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q_0^2} < 4 \quad \Rightarrow \quad Q_0 > \frac{1}{2}$$

14. *Donner l'expression de la pseudo-période* T *du circuit en fonction de* T_0 *et* Q_0 *dans le cas d'oscillations amorties (où* T_0 *est la période propre du circuit).*
Comparer T *à* T_0 *et commenter.*

Réponse :

Les racines du polynôme caractéristique sont $r = -\frac{\omega_0}{2Q_0} \pm j\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q_0^2}}}{2}$ et on pose :

$$\Omega = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q_0^2}}}{2} = \frac{2\omega_0}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}$$

On a alors $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q_0^2}}}$

Comme $1 - \frac{1}{4Q_0^2} < 1$, on a $T > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Remarque :
Il est malheureusement commun d'oublier que $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Pour rappel, cette relation s'apparente à la formule $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$ pour une vitesse constante : ici, la vitesse de variation de la phase (la pulsation) correspond au parcours d'une phase de $\Delta\varphi = 2\pi$ en un temps T égal à une période. On retrouve donc la formule $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.
Ainsi, on a dans le cas des oscillations amorties $\Omega \neq \omega_0$ donc $T \neq T_0$.

II Pont de Wien

On considère le circuit ci-contre. Au départ, les condensateurs sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On pose $\tau = RC$.

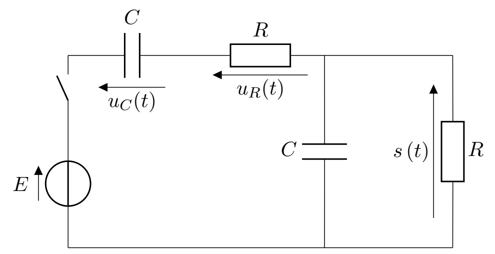


FIGURE II.1 – Schéma électrique

1. *Déterminez* $s(0^+)$*.*

Réponse :
La tension s est continue car il s'agit de la tension aux bornes d'un condensateur. Au départ, les condensateurs sont déchargés donc $0 = s(0^-) = s(0^+)$.

2. *En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds à* $t = 0^+$*, montrer que :*

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau}$$

Réponse :
La loi des nœuds indique $i(0^+) = i_C + i_R = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) + s(0^+)/R$.
De plus, la loi des mailles donne pour $t = 0^+$, $E = \underbrace{u_C}_{=0} + u_R + \underbrace{s}_{=0} \Rightarrow$. On peut alors combiner ces résultats pour obtenir $i(0^+) = E/R$ puis $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC}$ d'où le résultat avec $\tau = RC$.

3. *Que vaut* $s(+\infty)$ *?*

Réponse :
On se place en régime stationnaire et les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. La loi des n œuds indique que le courant dans le résistor de droite est nul, il en va de même pour sa tension donc $s(+\infty) = 0$.

4. *Montrez que l'équation différentielle régissant l'évolution de* s *s'écrit :*

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$$

Que vaut alors le facteur de qualité ?

Réponse :
On se place à $t > 0$. La loi des noeuds indique $i = C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{R}$. De plus, la loi des mailles donne

$$E = Ri + u_C + s$$

On dérive cette dernière :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

et on substitue l'expression de i deux fois :

$$RC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}s + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$$

soit sous la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}s = 0$$

5. *Résolvez l'équation différentielle pour $t > 0$.*

Réponse :
On obtient par identification $\omega_0 = 1/\tau$ et $\omega_0/Q = 3/\tau$ d'où $Q = \frac{1}{3}$. On est donc en présence d'un régime apériodique de solution générale :

$$s(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}\,, t > 0$$

De plus, la résolution de l'équation caractéristique (non détaillée ici) mène à

$$r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

La première condition initiale indique ensuite :

$$s(0^+) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A \quad \text{et} \quad s(t) = A\left(e^{r_+ t} - e^{r_- t}\right)$$

La deuxième condition initiale mène à :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau} = A(r_+ - r_-) = A\frac{\sqrt{5}}{\tau} \Rightarrow A = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

Au final, on peut ré-écrire la tension s, pour $t > 0$:

$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(e^{r_+ t} - e^{r_- t}\right)$$

Pour aller plus loin :
Il est parfois plus simple de garder les grandeurs r_+ et r_-, homogènes à des inverse de temps, pour mener à bout les calculs. Cependant, toute réponse correcte donnée avec les temps τ_+ et τ_- sera aussi compté juste.

Sans l'expression exacte de ces constantes, il n'est pas possible de retrouver le terme $E/\sqrt{5}$, mais ce n'est pas grave !

III Centrifugeuse de la cité des étoiles

La plus grande centrifugeuse au monde, d'un rayon $R = 60\,\mathrm{m}$, est celle de la cité des étoiles située près de Moscou. Elle soumet les cosmonautes à rude épreuve pour les préparer à encaisser les accélérations de la phase de décollage du vaisseau Soyouz. On utilise les coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ pour décrire le mouvement circulaire de centre O, dans un plan horizontal, du cosmonaute M repéré par $r(t) = OM = R = 60\,\mathrm{m}$ et $\theta(t)$ (dont on donnera les caractéristiques plus loin). Sa trajectoire est représentée sur la figure III.1 qui servira de document réponse à rendre avec votre copie.

1. *Représenter sur le document réponse les vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de la base locale polaire en $M(R, \frac{\pi}{6})$.*

Réponse :
Voir figure III.1

2. *Exprimer les vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne en fonction de $\theta(t)$.*

Réponse :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos(\theta)\ \vec{e}_x + \sin(\theta)\ \vec{e}_y}$$
$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\ \vec{e}_x + \cos(\theta)\ \vec{e}_y}$$

3. *Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec{e}_r$.*

Réponse :
On vérifie que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\sin(\theta)\ \vec{e}_x + \dot\theta\cos(\theta)\ \vec{e}_y = \dot\theta\,\vec{e}_\theta}$$

et

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\cos(\theta)\ \vec{e}_x - \dot\theta\sin(\theta)\ \vec{e}_y = -\dot\theta\,\vec{e}_r}$$

4. *En déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ dans la base polaire en fonction de R, $\dot\theta$ et $\ddot\theta$.*

Réponse :
En utilisant les relations $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec{e}_r$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= R\,\vec{e}_r \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= \boxed{\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e}_\theta} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \boxed{\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta}
\end{aligned}$$

5. *On note $v = R\dot\theta$, montrer que $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta$.*

Réponse :

On note $v = R\dot\theta$, alors $\boxed{\vec{a} = -\dfrac{R^2\dot\theta^2}{R}\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta = -\dfrac{v^2}{R}\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta}$.

Dans un premier temps, on considère un mouvement circulaire uniforme de M à vitesse angulaire $\dot\theta = \omega > 0$.

6. *Exprimer puis calculer la vitesse angulaire ω_5 de rotation de la centrifugeuse lorsque le cosmonaute est soumis à une accélération de norme $5g$. On donne $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.*

Réponse :
La vitesse angulaire ω_5 de rotation de la centrifugeuse lorsque le cosmonaute est soumis à une accélération de norme $5g$ est telle que :

$$R\omega_5^2 = 5g \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_5 = \sqrt{\frac{5g}{R}} = \sqrt{\frac{5\times 9,81}{60}} = 0{,}90\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 8{,}6\,\mathrm{tr\cdot min^{-1}}}$$

---

7. *Tracer sur le document réponse l'allure de $\vec{a}$ en $M'(R, \frac{5\pi}{6})$ dans ce cas de figure. On choisira une échelle arbitraire.*

Réponse :
Voir figure III.1

Dans un second temps, on considère la décélération de M lorsque l'entraînement du cosmonaute est terminé, c'est-à-dire lorsque la vitesse angulaire $\dot{\theta} > 0$ n'est plus constante.

8. *Dans quel sens tourne le point M et quel est le signe de $\ddot{\theta}$?*

Réponse :
Le point M tourne dans le sens trigonométrique et comme il ralentit $\ddot{\theta} < 0$.

---

9. *Représenter l'allure de $\vec{a}$ en $M''(R, \frac{7\pi}{6})$ dans ce cas de figure.*

Réponse :
Voir figure III.1

---

10. *On appelle $t = 0$ l'instant où M a commencé à décélérer. On suppose que cette décélération est telle que $\forall t$, $R\ddot{\theta} = -g$. Exprimer le temps t_F pour lequel le mouvement s'arrête en fonction de g, R et ω_5.*

Réponse :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \quad \text{donc} \quad \dot{\theta} = -\frac{g}{R}t + \text{cste}$$

D'après les conditions initiales, $\dot{\theta}(0) = \omega_5$, donc $\boxed{\dot{\theta}(t) = -\frac{g}{R}t + \omega_5}$.

Le mouvement s'arrête quand $\dot{\theta}(t_F) = 0$, soit $\boxed{t_F = \frac{R\omega_5}{g}}$.

---

11. *Exprimer le nombre de tours N effectués entre $t = 0$ et $t = t_F$ en fonction de g, R, t_F et ω_5, puis en fonction de R, g et ω_5.*

Réponse :
Entre $t = 0$ et t_F, le cosmonaute a tourné d'un angle $\Delta\theta = \int_{\theta(t=0)}^{\theta(t=t_F)} \mathrm{d}\theta$, avec $\mathrm{d}\theta = \dot{\theta}\mathrm{d}t$. On intègre

$$\Delta\theta = \int_0^{t_F} \left(-\frac{g}{R}t + \omega_5\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{g}{2R}t^2 + \omega_5 t\right]_0^{t_F}$$

On en déduit

$$\boxed{\Delta\theta = -\frac{g}{2R}t_F^2 + \omega_5 t_F}$$

On trouve alors le nombre de tours

$$\boxed{N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{g}{2R}t_F^2 + \omega_5 t_F\right]}$$

En utilisant l'expression de t_F, on a

$$N = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{g}{2R}\times\left(\frac{R\omega_5}{g}\right)^2 + \frac{R\omega_5^2}{g}\right] \quad \text{soit} \quad N = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R\omega_5^2}{2g}\right]$$

On a alors $\boxed{N = \frac{R\omega_5^2}{4\pi g}}$.

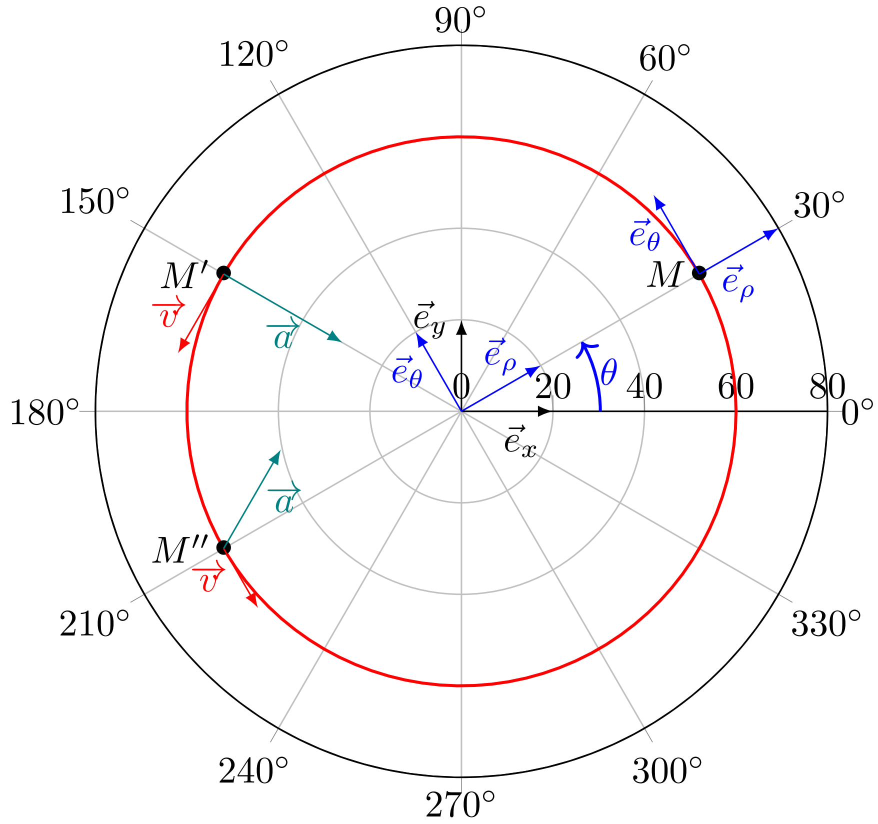


FIGURE III.1 – Trajectoire du cosmonaute