Physique - Devoir Surveillé 02

Le 19/10/20204

I Profondeur de champ d'un viseur

Un viseur à frontale fixe est un instrument qui permet de déterminer simplement la position d'une objet (ou une image), réel ou virtuel. Le principe en est le suivant :

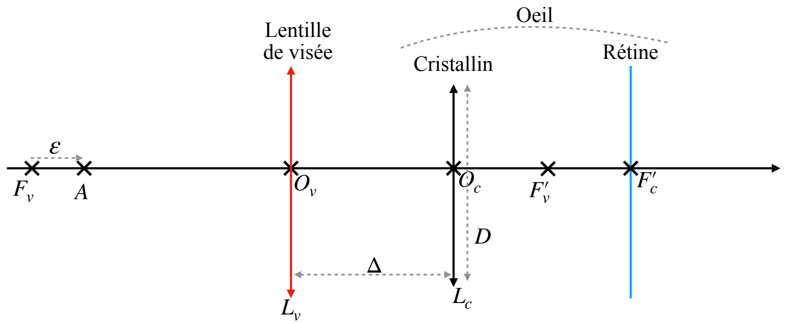
— On observe l'objet étudié à travers le viseur.

— Dès que ce dernier apparaît de manière nette, on sait qu'il se situe dans le plan focal objet de la lentille de visée. On en déduit sa position.

— La notion de profondeur de champ est primordiale lors de la conception d'un viseur. Si cette dernière est élevée, la mesure sera peu précise car une large plage de position de l'objet donneront une image quasiment nette. Il convient donc d'obtenir une profondeur de champ petite par rapport à la distance focale de la lentille de visée pour réaliser un viseur performant.

I.A Réalisation d'un viseur élémentaire

On souhaite observer, à l'œil, l'image d'un objet A au travers d'une lentille de visée L_v. On considère dans toute la suite du problème que l'œil peut être modélisé par un écran (la rétine), placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (le cristallin, noté L_c et de diamètre D). Les deux lentilles sont séparées d'une distance Δ.



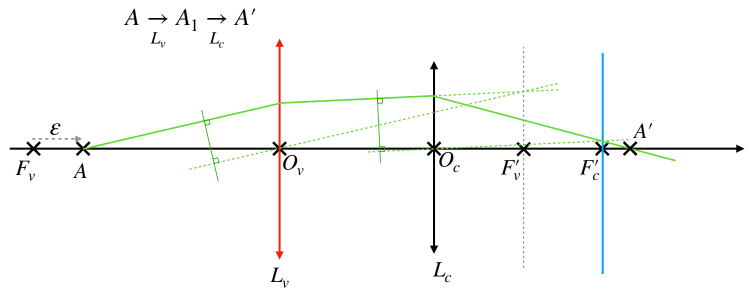
On note A_1 l'image de A par la première lentille L_v puis A', l'image de A_1 par la deuxième lentille L_c.

On rappelle les relations de conjugaison de Descartes et de Newton pour une lentille L de distance focale image $\overline{OF'} = f'$, un objet A et une image A' :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

1. *Reproduire le schéma de l'énoncé (en y conservant les proportions), puis à l'aide d'une construction géométrique, placer l'image finale A'. Il n'est pas nécessaire de placer l'image intermédiaire A_1.*
   Où serait situé A' si l'objet A était confondu avec le foyer objet F_v ? Justifier brièvement.

   Réponse :



Si l'objet est confondu avec le foyer objet de la lentille de visée, alors l'image intermédiaire A_1 est à l'infini et l'image finale A se trouve dans le plan focal du cristallin, c'est à dire au niveau de la rétine.

---

2. *Exprimer les distance algébriques $\overline{F'_vA_1}$ puis $\overline{F_cA_1}$ et enfin, exprimer la distance δ entre l'image finale A' et l'écran en fonction de $\varepsilon, \Delta, f'_c$ et f'_v.*

   Réponse :

   Les distances demandées sont exprimées par rapport aux foyers, on peut alors utiliser la relation de conjugaison de Newton, que l'on va appliquer aux deux lentilles. On obtient pour la première :

$$\overline{F_vA} \times \overline{F'_vA_1} = -f'^2_v \Rightarrow \boxed{\overline{F'_vA_1} = -\frac{f'^2_v}{\varepsilon}}$$

   La deuxième distance est obtenue à l'aide de la relation de Chasles :

$$\overline{F_cA_1} = \overline{F_cO_C} + \overline{O_cO_v} + \overline{O_vF'_v} + \overline{F'_vA_1} \Rightarrow \boxed{\overline{F_cA_1} = f'_c - \Delta + f'_v - \frac{f'^2_v}{\varepsilon}}$$

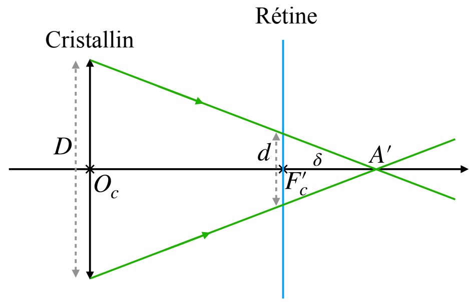
   Finalement, la relation de conjugaison appliquée à la deuxième lentille indique

$$\overline{F_cA_1} \times \overline{F'_cA'} = -f'^2_c \Rightarrow \delta = -\frac{f'^2_c}{\overline{F_cA_1}} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\left(\frac{f'_c}{f'_v}\right)^2 \varepsilon}{1 - \frac{f'_v + f'_c - \Delta}{f'^2_v}\varepsilon}}$$

   Pour aller plus loin :
   On peut aussi obtenir le même résultat en utilisant la relation de conjugaison de Descartes. Cependant, celle de Newton donne directement les distances par rapport aux foyers, ce qui est demandé ici.
   Il s'agit de la question la plus technique du sujet. Elle est cependant largement abordable en travaillant avec méthode. En effet, $A \underbrace{\rightarrow}_{L_v} A_1 \underbrace{\rightarrow}_{L_c} A'$; on sait qu'il faut alors appliquer deux fois une relation de conjugaison.
   Pour passer de l'une à l'autre, il faudra exprimer de plusieurs manière la position de l'image/objet intermédiaire A_1. D'abord par rapport à la première lentille, puis à la seconde.
   Pour finir, le résultat obtenu doit être homogène, et vérifier la situation étudiée à la question précédente. C'est à dire que pour $\varepsilon = 0$, on doit trouver $\delta = 0$.

On s'intéresse alors à la taille de la tâche formée par les rayons lumineux issus de A, au niveau de la rétine. Cette dernière, de diamètre d, est représentée sur le schéma ci-contre.

Dans toute la suite du problème, on considère que la limite de netteté est atteinte lorsque $d = d_{\max} \approx 5\,\mu$m, qui correspond à la distance moyenne entre deux cônes (cellule photo-sensible au niveau de la rétine).
Au delà, l'image de A cessera d'apparaître ponctuelle.



3. *Exprimer le diamètre d en fonction de δ, f'_c et D.*

Réponse :
Le théorème de Thalès indique dans les deux triangles semblables du schéma :

$$\frac{d}{D} = \frac{\delta}{f'_c + \delta} \Rightarrow \boxed{d = D \times \frac{\delta}{f'_c + \delta}}$$

On considère dans toute la suite que les distances ε et δ sont petites par rapport aux autres distances horizontales en jeu.

4. *Justifier alors que les résultats obtenus aux questions précédentes peuvent se simplifier selon :*

$$\delta \approx \left(\frac{f'_c}{f'_v}\right)^2 \varepsilon \quad \textit{et} \quad d = \frac{D}{f'_c}\delta \tag{I.1}$$

Réponse :
Le premier résultat est obtenu car $(f'_v + f'_c - \Delta)\,\varepsilon \ll (f'_v)^2$ et donc seul le 1 reste au dénominateur. Le deuxième est obtenu car $f'_c + \delta \simeq f'_c$ au dénominateur. Ces deux approximations vont grandement simplifier la suite des calculs.

---

5. *Déduire de ce qui précède l'expression de $\varepsilon_{\max}$, le maximum que peut prendre l'écart entre F_v et A tel que l'image de A semble rester ponctuelle.*

Réponse :
On peut combiner les résultats précédents pour obtenir :

$$\varepsilon = d \times \frac{f'_c}{D} \times \left(\frac{f'_v}{f'_c}\right)^2$$

L'expression attentue est obtenue lorsque $d = d_{\max}$ d'où au final :

$$\boxed{\varepsilon_{\max} \approx d_{\max} \frac{f'_c}{D} \times \left(\frac{f'_v}{f'_c}\right)^2}$$

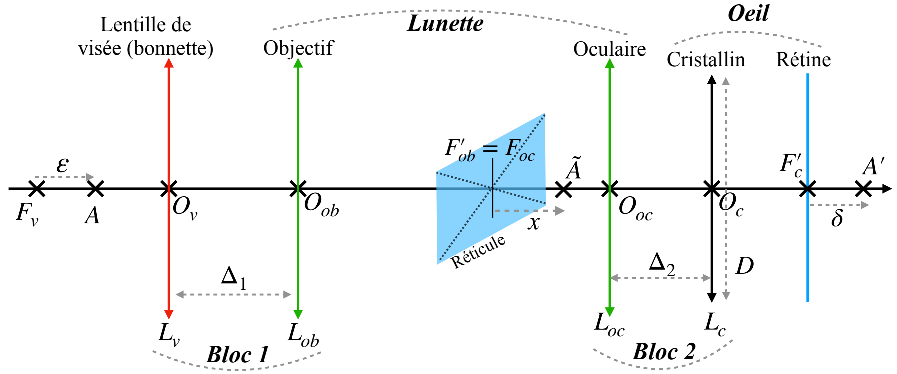
La profondeur du champ du système P, c'est à dire la largeur de la zone où l'on peut placer A, tant que son image reste ponctuelle, est alors, par symétrie, de $P = 2\varepsilon_{\max}$.

6. *Réaliser l'application numérique pour la profondeur de champ sachant que $D \approx 4\,$mm, $f'_c \approx 20\,$mm et $f'_v \approx 20\,$cm. Conclure quant à la précision de viseur étudié.*

Réponse :
On obtient $P \approx 5\,$mm, pour une distance de visée de $20\,$cm, ce n'est franchement pas très précis !
En effet, cela donne une précision relative de 2,5 % au viseur élémentaire. Ainsi, la précision est correcte, mais il est surement possible de faire mieux !

I.B Réalisation d'un viseur amélioré

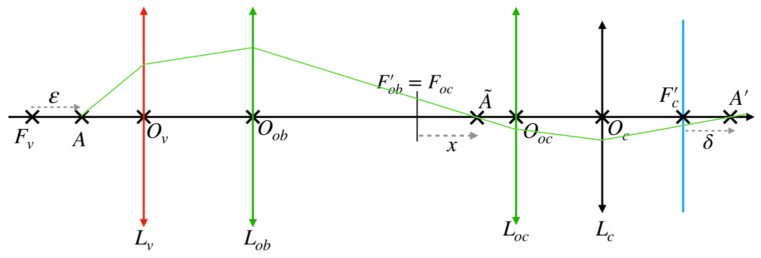
On considère alors un viseur à frontale fixe, constitué d'une lunette, constituée d'un objectif (L_{ob}) et d'un oculaire (L_{oc}), à l'extrémité de laquelle on fixe une lentille de visée (toujours notée L_v) (aussi appelée bonnette). La lunette envoyant l'image de l'objet observé à l'infini, l'observation se fait encore une fois à l'œil (toujours modélisé par une lentille L_c et un écran), sans besoin d'accommoder. L'ensemble est représenté sur le schéma ci-dessous.



On remarque qu'il est possible de regrouper la lentille de visée et l'objectif d'un part, puis l'oculaire et le cristallin d'autre part, afin d'obtenir deux blocs similaires. On note $\tilde{A}$ l'image de A par le premier bloc, puis A', l'image de $\tilde{A}$ par le second.

7. *Reproduire le schéma du viseur amélioré en y plaçant un rayon issu de A, et qui arprès déviations par les lentilles, passe par les points $\tilde{A}$ et A'. En déduire la valeur de δ lorsque $\varepsilon = 0$. Commenter le résultat à la lumière de l'utilisation faite de ce dispositif en TP*

Réponse :
Les points $\tilde{A}$ et A' étant déjà placé, on se contente alors d'un tracé approximatif, qui passe par les points souhaités. On remarque toutefois qu'avant de francher la première lentille des deux blocs, les rayons viennent d'un objet situé après le foyer objet, il vont donc ressortir de manière légèrement divergente, en accord avec ce qui a été observé dans la partie précédente.



---

8. *Sans refaire de longs calculs, et en appliquant judicieusement le résultat de l'équation I.1 (côté gauche), établir la nouvelle relation entre ε et δ.*

Réponse :
Il convient ici d'adapter le résultat proposé, aux deux blocs de lentilles. On obtient alors pour le viseur amélioré :

$$\delta = \left(\frac{f'_c}{f'_{oc}}\right)^2 x \quad \text{et} \quad x = \left(\frac{f'_{ob}}{f'_v}\right)^2 \varepsilon$$

On peut alors combiner ces résultats pour obtenir :

$$\boxed{\delta = \left(\frac{f'_c}{f'_{oc}}\right)^2 \times \left(\frac{f'_{ob}}{f'_v}\right)^2 \varepsilon}$$

---

9. *En déduire la nouvelle expression pour la profondeur de champ $P' = 2\varepsilon_{\max}$, avec $\varepsilon_{\max}$, la valeur de ε telle que la taille de la tâche formée par les rayons issus de A au niveau de la rétine soit égale à $d_{\max}$, la distance entre les cônes.*

Réponse :
On obtient encore une fois la profondeur de champ en prenant $d = d_{\max}$ d'où :

$$\boxed{P' = 2\left(\frac{f'_{oc}}{f'_c}\right)^2 \times \left(\frac{f'_v}{f'_{ob}}\right)^2 \times \frac{f'_c}{D} d_{\max}}$$

---

10. *Démontrer enfin que la nouvelle profondeur de champ P' peut s'écrire en fonction de l'ancienne selon :*

$$P' = P\left(\frac{f'_{oc}}{f'_{ob}}\right)^2$$

Réaliser ensuite l'application numérique. Les lentilles utilisées pour la lunette ont pour distances focales $f'_{oc} \approx 18\,\text{mm}$ et $f'_{ob} \approx 180\,\text{mm}$. Conclure quant à l'intérêt du viseur à frontale fixe.

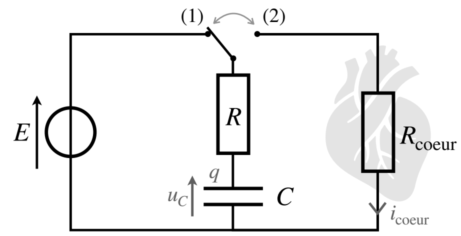
Réponse :
On obtient en réorganisant les termes :

$$P' = \underbrace{2\left(\frac{f'_v}{f'_c}\right)^2 \times \frac{f'_c}{D} d_{\max}}_{=P} \times \left(\frac{f'_{oc}}{f'_{ob}}\right)^2$$

d'où le résultat. L'application numérique indique $P' \approx 0{,}05\,\text{mm}$, ce qui est négligeable par rapport à la distance de visée. L'appareil étudié est alors bien plus précis (facteur 100) que le viseur élémentaire. Cet appareil permet donc d'effectuer des mesures de distances (possiblement avec des objets ou images virtuelles) de manière très précise.

II Stimulateur cardiaque

Un stimulateur cardiaque (ou pacemaker) permet, lorsqu'il est implanté dans la cage thoracique, de forcer le muscle cardiaque à battre régulièrement en lui envoyant de petites impulsions électriques à une fréquence prédéterminée.
Nous adopterons une description très simplifiée du dispositif, en modélisant le stimulateur par un circuit RC représenté ci-dessous. Il comprend un condensateur de capacité $C = 430\,\mu\text{F}$ et un résistor de résistance R. Un interrupteur, contrôlé par une horloge, peut basculer entre une deux positions, numérotées (1) et (2).
En position (1), le stimulateur est chargé à l'aide d'un générateur de tension idéal de force électromotrice E. En position (2), le stimulateur se décharge dans le cœur, modélisé par une résistance $R_{\text{cœur}}$



II.A Charge du condensateur

Étudions tout d'abord la phase de charge du stimulateur. L'interrupteur est alors en position (1). On notera $u_C(t)$ la tension et $q(t)$ la charge dans le condensateur.

1. *Établir l'équation différentielle décrivant l'évolution de la tension $u_C(t)$ lors de la phase de charge. On introduira un temps caractéristique τ_1, dont on vérifiera l'homogénéité de l'expression par analyse dimensionnelle.*

Réponse :
En position (1), le circuit se résume à une maille où la source E, la résistance R et le condensateur sont en série. La loi des mailles donne alors : $E = Ri + u_C$ où i est le courant orienté tel que le condensateur soit étudié en convention récepteur. En utilisant la relation caractéristiques du condensateur, on obtient

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau_1} = \frac{E}{\tau_1}}$$

où $\boxed{\tau_1 = RC}$. Avec la loi d'Ohm, on a $[R] = [U].I^{-1}$ et avec la relation courant tension d'un condensateur, on a $I = [C][U]T^{-1}$. Finalement, on trouve alors que $[RC] = ([U].I^{-1}) \times (I.[U]^{-1}T) = T$. L'expression de τ_1 est bien homogène à un temps.

---

2. *En supposant le condensateur initialement déchargé, et en choisissant la date $t = 0$ comme le début de la charge, établir l'expression de la tension $u_C(t)$ lors de la phase de charge. En déduire l'expression de la charge $q(t)$ du condensateur.*

Réponse :

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $u_C(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E$, où A est la constante d'intégration.
Le condensateur est initialement déchargé, donc $u_C(t=0^-) = 0$. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, $u_C(t=0^+) = u_C(t=0^-) = 0$.
La condition initiale impose alors que $A\mathrm{e}^0 + E = 0 \implies A = -E$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)} \text{ et } \boxed{q(t) = Cu_C(t) = CE\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right)}$$

Supposons que la phase de charge s'étale sur une durée infinie (soit entre $t = 0$ et $t \to \infty$).

3. *Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{cond}$ emmagasinée par le condensateur lors de la charge du condensateur.*

Réponse :
Soit $E_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2$ l'énergie stockée dans le condensateur à un instant t donné. Entre $t = 0$ et $t \to \infty$, le condensateur a emmagasiné :

$$\mathcal{E}_{\text{cond}} = E_C(t \to \infty) - E_C(0) = \frac{1}{2}CE^2 - 0 = \boxed{\frac{1}{2}CE^2}$$

---

4. *Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{géné}$ fournie par le générateur idéal de tension lors de la charge du condensateur. Comparer avec $\mathcal{E}_{cond}$ et commenter.*

Réponse :
La puissance fournie par le générateur s'exprime $\mathcal{P}_{\text{fournie,E}} = E \times i$, où $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Alors :

$$\mathcal{E}_{\text{géné}} = \int_0^\infty E \times i\mathrm{d}t = \int_0^\infty E \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = CE[u_C(t)]_0^\infty = CE[E - 0] = \boxed{CE^2}$$

L'énergie emmagasinée par le condensateur correspond à la moitié de l'énergie fournie par le générateur. Par conservation de l'énergie, l'autre moitié de $\mathcal{E}_{\text{géné}}$ est dissipée dans la résistance par effet Joule. Le rendement de la charge est donc de 50%.

En réalité, la phase de charge s'arrête lorsque la tension aux bornes du condensateur atteint 99% de la tension E imposée par le générateur. L'interrupteur bascule alors en position (2).

5. *Montrer que l'instant t_1 où la phase de charge s'arrête s'exprime :*

$$t_1 = \tau_1 \ln(100)$$

Réponse :
L'instant t_1 correspond à l'instant où $u_C(t_1) = \frac{99}{100}E$. Ainsi, à partir de la solution obtenue précédemment :

$$E(1 - \mathrm{e}^{-t_1/\tau_1}) = \frac{99}{100}E \implies E\mathrm{e}^{-t_1/\tau_1} = \frac{E}{100} \implies -\frac{t_1}{\tau_1} = -\ln(100)$$

Finalement on obtient : $\boxed{t_1 = \tau_1\ln(100)}$.

---

6. *On souhaite que la phase de charge ne dure pas plus de 2 µs. Comment choisir la valeur de R pour respecter cette contrainte ?*

Réponse :
Notons $t_{1,\text{max}}$ la durée maximale de la phase de charge. Ainsi, $t_1 < t_{1,\text{max}}$ implique que :

$$\tau_1 \ln(100) < t_{1,\text{max}} \implies R < \frac{t_{1,\text{max}}}{C\ln(100)}$$

L'application numérique donne la condition $\boxed{R < 1,0\,m\Omega}$.

II.B Décharge d'un condensateur

Lorsque la phase de charge décrite dans la partie précédente est terminée, l'interrupteur bascule en position (2). Dans ce cas, le condensateur se décharge dans le cœur.

Pour faciliter les calculs dans cette partie, nous adoptons une nouvelle origine des temps, telle que $t = 0$ corresponde au début de la décharge du condensateur.

7. *Donner les valeurs de u_C et $i_{cœur}$ en $t = 0^-$, puis en $t = 0^+$, correspondant respectivement aux instants juste avant et juste après le basculement de l'interrupteur en position (2).*

Réponse :
D'après ce qui a été décrit dans la partie précédente, l'interrupteur bascule en position 2 lorsque $\boxed{u_C(0^-) = \dfrac{99}{100}E}$.
Avant que l'interrupteur ne bascule en position 2, la branche où se trouve $R_{\text{cœur}}$ est ouverte, donc $\boxed{i_{\text{cœur}}(0^-) = 0}$.
Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on alors $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = \dfrac{99}{100}E}$. Enfin, en appliquant la loi des mailles en $t = 0^+$, alors que l'interrupteur est en position (2), on obtient :

$$u_C - Ri_{\text{cœur}} - R_{\text{cœur}}i_{\text{cœur}} = 0 \implies \boxed{i_{\text{cœur}}(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R + R_{\text{cœur}}} = \frac{99}{100}\frac{E}{R + R_{\text{cœur}}}}$$

---

8. *Établir l'équation différentielle portant sur $u_C(t)$ lors de la phase de décharge. On introduira un temps caractéristique τ_2.*

Réponse :
À partir de la loi des mailles : $u_C - Ri_{\text{cœur}} - R_{\text{cœur}}i_{\text{cœur}} = 0$, et sachant que $i_{\text{cœur}} = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ (convention générateur du condensateur), on obtient :

$$u_C + (R + R_{\text{cœur}})C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau_2} = 0}$$

où on a posé $\boxed{\tau_2 = (R + R_{\text{cœur}})C}$.

Pour aller plus loin :
Il s'agit de la question la plus subtile du sujet, à cause de la convention générateur utilisée pour le condensateur. Deux erreurs sont souvent observées :

— En cas d'oublis du "-" dans la relation constitutive, l'équation différentielle obtenue n'est pas la bonne (mauvais signe entre les deux occurrences de u_C). Cette équation ne peut être obtenu simplement en physique car elle mène à des solutions qui divergent au cours du temps. Il est donc de votre devoir de re-vérifier vos calculs en cas d'obtention d'un signe curieux.

— un oublis du "-" dans la relation constitutive + un "maquillage" du problème en changeant le "-" en "+". Là, c'est vraiment gênant ...

---

9. *Exprimer la tension $u_C(t)$ lors de la phase de décharge, ainsi que le courant $i_{cœur}(t)$.*

Réponse :
La solution s'écrit $u_C(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$, où A constante d'intégration. À partir de la condition initiale $u_C(0) = A = \frac{99}{100}E$. Finalement : $\boxed{u_C(t) = \frac{99}{100}E\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}$.

De plus, à partir de la loi des mailles : $u_C = (R + R_{\text{cœur}})i_{\text{cœur}}$, donc $\boxed{i_{\text{cœur}} = \frac{99}{100}\frac{E}{R + R_{\text{cœur}}}\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}$.

L'ordre de grandeur de la résistance $R_{\text{cœur}}$ du cœur est $1,7\,\text{k}\Omega$. On supposera que $R \ll R_{\text{cœur}}$.

10. *La phase de décharge prend fin lorsque la valeur de u_C descend en dessous de $0,33E$, l'interrupteur repasse alors en position (1). En déduire le temps t_2 de la phase de décharge du condensateur.*

Réponse :
On cherche t_2 tel que :

$$u_C(t_2) = \frac{33}{100}E \implies \frac{99}{100}E\mathrm{e}^{-t_2/\tau_2} = \frac{33}{100}E \implies \boxed{t_2 = \tau_2 \ln(3)}$$

Ainsi, si $R \ll R_{\text{cœur}}$, on a $t_2 \approx R_{\text{cœur}}C\ln(3)$. L'application numérique donne $\boxed{t_2 \approx 0,80\,\text{s}}$.

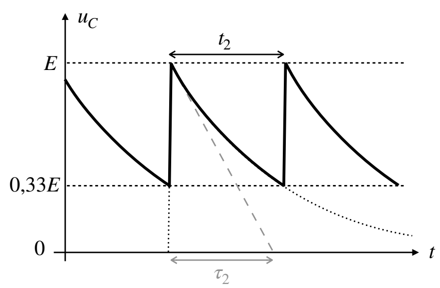
---

11. *Justifier que l'on puisse considérer la phase de charge comme quasi-instantanée. Tracer l'allure de $u_C(t)$ lors d'un cycle de charge et décharge.*

Réponse :
On compare les temps t_1 et t_2, sachant que t_1 est majoré par $2\,\mu$s. On trouve que $\frac{t_1}{t_2} \sim 10^{-6} \ll 1$. La durée de la phase de charge est donc négligeable devant le temps de décharge, on pourra donc considérer la phase de charge comme quasi-instantanée. Cela est lié à la grande différence entre R et $R_{\text{cœur}}$.

Comme la phase de charge est quasi-instantanée comparée à la phase de décharge, la courbe de u_C apparaît verticale lors de la charge.

Remarquons que notre étude de la phase de charge considérait que le condensateur est initialement déchargé. En revanche, lorsque le dispositif est en fonctionnement, la tension en début de charge vaut $0,33E$ (valeur de u_C lorsque l'interrupteur bascule en position 1). Cela ne change pas le fait que la phase de charge est quasi-instantanée.



---

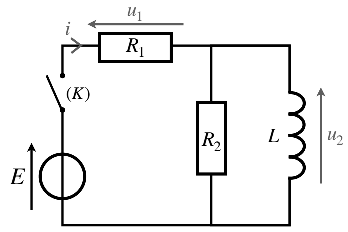
12. *Estimer le nombre de battements par minute du cœur stimulé par le dispositif.*

Réponse :
Si l'on néglige la durée de la phase de charge, la durée d'un cycle est donc donnée par t_2. Ainsi, le dispositif stimule un battement tous les $0,8\,\text{s}$, ce qui correspond à $\frac{1}{0,8} = 1,25$ battements par seconde. Cela correspond à $\boxed{\text{75 battements par seconde}}$.

Ce modèle de fonctionnement est très simplifié. Un modèle plus réaliste prendrait en compte plusieurs étages de dipôles électriques, contrôlés par plusieurs interrupteurs, et suivant une séquence de basculements complexe et asservie au rythme cardiaque du porteur du stimulateur.

III Étude d'un circuit RL parallèle

On considère le circuit représenté ci-dessous, composé d'une source idéale de tension de force électromotrice E, de deux résistances R_1 et R_2, d'une bobine d'inductance L et d'un interrupteur (K). L'interrupteur, ouvert depuis longtemps, est fermé à $t = 0$.



1. *Déterminer les valeurs de u_1 et u_2 lorsque le régime permanent stationnaire est atteint (lorsque $t \to \infty$).*

Réponse :
En régime stationnaire, la bobine se comporte comme un fil. On a par conséquent $\boxed{u_2(t \to \infty) = 0}$. À l'aide d'une loi des mailles, on a : $E = u_1 + u_2$, donc $\boxed{u_1(t \to \infty) = E}$

---

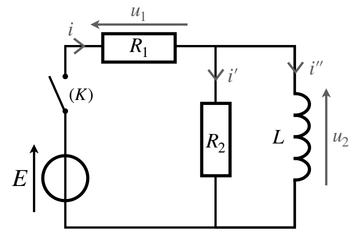
2. *Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_2 pour $t > 0$ se met sous la forme :*

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{\tau} = 0$$

avec $\tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}L$.

Réponse :

Attention, les deux résistors ne sont ni en série, ni en parallèle. Il n'est donc pas possible de simplifier ce montage et il convient d'en réaliser l'étude à l'aide de lois des mailles et d'une loi des nœuds.
La loi des mailles s'écrit : $E = u_1 + u_2 = R_1 i + u_2$. La deuxième loi des mailles indique simplement que u_2 est la tension pour la bobine, mais aussi pour le deuxième résistor.
La loi des nœuds donne : $i = i' + i'' = \frac{u_2}{R_2} + i''$



En dérivant la loi des mailles, on obtient alors $0 = R_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$.
Alors, avec la loi des nœuds :

$$R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i''}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

or $u_2 = L\frac{\mathrm{d}i''}{\mathrm{d}t}$, donc on obtient :

$$R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{L}\right) + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{L} = 0 \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{u_2}{\tau} = 0}$$

en posant $\boxed{\tau = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}L}$.

3. *Déterminer les valeurs à $t = 0^-$ (juste avant la fermeture de (K)) des tensions u_1 et u_2.*

Réponse :
Avant la fermeture de l'interrupteur, on suppose qu'un régime stationnaire est établi. Alors la bobine se comporte comme un fil, et $\boxed{u_2(0^-) = 0}$. Comme le circuit est ouvert, on a $i(0^-) = 0$, et donc $\boxed{u_1(0^-) = Ri(0^-) = 0}$.

4. *Déterminer les valeurs à $t = 0^+$ (juste après la fermeture de (K)) des tensions u_1 et u_2.*

Réponse :
Avant la fermeture de l'interrupteur $i''(0^-) = 0$. Or, par continuité du courant parcourant la bobine, on a $i''(0^+) = 0$. La loi des nœuds s'écrit $i = i' + i''$, donc à $t = 0^+$, on a $i(0^+) = i'(0^+)$. Ainsi R_1 et R_2 sont parcourus par le même courant à cet instant. À l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient :

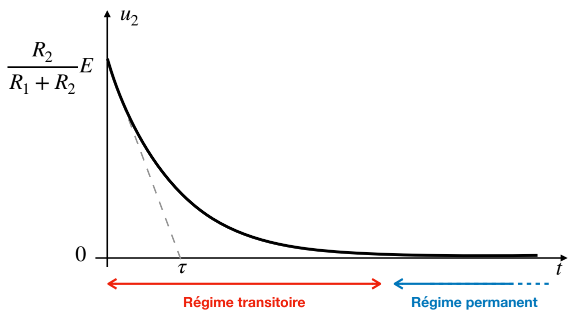
$$\boxed{u_1(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}E} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

5. *Résoudre l'équation différentielle et exprimer u_2 pour $t > 0$.*

Réponse :
La solution de l'équation différentielle est de la forme $u_2 = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ où A est une constante d'intégration. Or à $t = 0$, on a d'après la condition initiale $u_2(0) = A = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$, donc : $\boxed{u_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E\mathrm{e}^{-t/\tau}}$.

6. *Tracer l'allure de $u_2(t)$. Identifier sur la courbe le régime transitoire et le régime permanent.*

Réponse :



7. *À partir de la loi des mailles, multipliée par le courant i, établir un bilan de puissance après la fermeture de l'interrupteur (K).*

Réponse :
La loi des mailles s'écrit : $E = u_1 + u_2$. En multipliant par le courant i, on obtient :

$$Ei = u_1 i + u_2 i \underbrace{=}_{\text{loi des nœuds}} u_1 i + u_2(i' + i'') = u_1 i + u_2 i' + u_2 i''$$

En identifiant chaque terme, on obtient le bilan de puissance suivant :

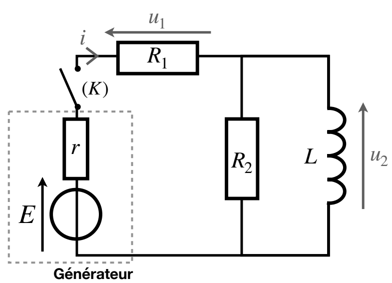
$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{fourni},E} = \mathcal{P}_{\text{reçu},R_1} + \mathcal{P}_{\text{reçu},R_2} + \mathcal{P}_{\text{reçu},L}} = \mathcal{P}_{\text{reçu},R_1} + \mathcal{P}_{\text{reçu},R_2} + \frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}t}$$

où E_L est l'énergie emmagasinée par la bobine.
La puissance fournie par le générateur est divisée en puissance reçue par les résistances (et dissipée par effet Joule) et en puissance reçue par la bobine (qui tend à accroitre l'énergie emmagasinée dans la bobine).

En réalité, le circuit n'est pas alimenté par une source idéale de tension, mais par un générateur réel, que l'on peut modéliser par la mise en série d'une force électromotrice E et d'une résistance interne r.

8. *Représenter le schéma du circuit en prenant en compte l'utilisation d'un générateur réel. Comment est alors modifié le temps caractéristique τ du circuit ? À quelle condition peut-on se ramener au circuit décrit initialement ?*

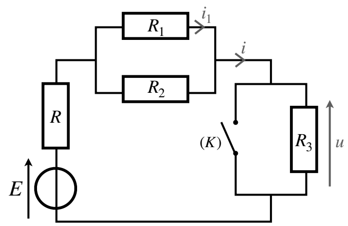
Réponse :



Le circuit correspond au circuit initial dans lequel on ajouté une résistance r en série avec la fem E et la résistance R_1. En associant r et R_1 (en série), on se ramène rigoureusement au circuit initial. On obtient alors la même équation différentielle que celle obtenue précédemment, où dans l'expression de τ, on remplace R_1 par $R_1 + r$. Donc $\boxed{\tau = \frac{R_1 + R_2 + r}{(R_1 + r)R_2}L}$.
Si $r \ll R_1$, on retrouve alors le circuit initial, et l'équation différentielle du circuit initial.

IV Étude d'un circuit en régime stationnaire

Dans le montage représenté ci-dessous, le générateur de tension continue a une force électromotrice E.



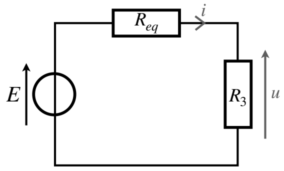
L'interrupteur (K) est initialement ouvert.

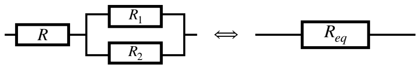
1. *Faire un schéma équivalent au montage étudié en remplaçant les résistances R, R_1 et R_2 par une unique résistance équivalente R_{eq} dont on précisera l'expression.*

Réponse :

Comme l'interrupteur (K) est ouvert, il n'y a pas de courant passant par la branche où il se situe. Le schéma équivalent est donc le suivant, où les résistances R, R_1 et R_2 sont remplacées par une résistance équivalente R_{eq}.
La résistance R est en série avec la mise en parallèle de R_1 et R_2. Donc

$$R_{\text{eq}} = R + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \implies \boxed{R_{\text{eq}} = R + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$





---

2. *Exprimer la tension u et l'intensité du courant i indiqués sur le schéma en fonction de E, R_3 et R_{eq}.*

Réponse :
On reconnait la structure d'un pont diviseur de tension (R_{eq} et R_2 sont en série). Donc $\boxed{u = \dfrac{R_3}{R_3+R_{\text{eq}}}E}$.

D'après la loi d'Ohm, $u = R_3 i$, donc $\boxed{i = \dfrac{u}{R_3} = \dfrac{E}{R_3+R_{\text{eq}}}}$.

---

3. *Exprimer $\mathcal{P}_3$ la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R_3.*

Réponse :
Comme u et i sont orientés en convention récepteur pour la résistance R_3, la puissance reçue par la résistance R_3 est : $\boxed{\mathcal{P}_3 = u \times i = \dfrac{R_3E^2}{(R_3+R_{\text{eq}})^2}}$.

---

4. *Justifier que la puissance $\mathcal{P}_3$ est maximale pour une valeur particulière de R_3, que l'on exprimera en fonction de R_{eq}.*

Réponse :
On étudie la variation de $\mathcal{P}_\ni$ en fonction de R_3. On exprime pour cela la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}P_3}{\mathrm{d}R_3}$.

$$\frac{\mathrm{d}P_3}{\mathrm{d}R_3} = E^2\frac{(R_3+R_{\text{eq}})^2 - R_3\times 2(R_3+R_{\text{eq}})}{(R_3+R_{\text{eq}})^4} = E^2\frac{R_3+R_{\text{eq}}-2R_3}{(R_3+R_{\text{eq}})^3} = E^2\frac{R_{\text{eq}}-R_3}{(R_3+R_{\text{eq}})^3}$$

Pour $R_3 \in \mathbb{R}^+$, une étude de signe du numérateur de $\dfrac{\mathrm{d}P_3}{\mathrm{d}R_3}$ indique de manière immédiate que $\mathcal{P}_3$ atteint un maximum (annulation de la dérivée) lorsque $\boxed{R_3 = R_{\text{eq}}}$.

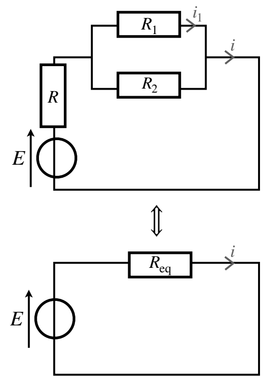
On ferme maintenant l'interrupteur (K).

5. *Exprimer la tension u et l'intensité des courants i et i_1 en fonction de E et des différentes résistances du circuit.*

Réponse :

Comme l'interrupteur est fermé, il se comporte comme un fil. La tension u est donc nulle (tension aux bornes d'un fil) et il n'y a pas de courant qui travers la résistance R_3. Le circuit est donc équivalent à celui ci-dessous.
Pour déterminer i, nous pouvons simplifier de nouveau le circuit en remplaçant les résistances R, R_1 et R_2 par la résistance R_{eq} définie précédemment. Une loi des mailles donne directement : $E = R_{\text{eq}}i$, soit $\boxed{i = \dfrac{E}{R_{\text{eq}}} = \dfrac{E}{R+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}}$.
Connaissant i, on peut déterminer i_1 en appliquant la formule du pont diviseur de courant :

$$i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}i \implies \boxed{i_1 = \frac{R_2E}{RR_1+RR_2+R_1R_2}}$$



---

6. *Supposons que $R \gg R_2 \gg R_1$. Justifier que, dans ce cas, le circuit est équivalent à une simple mise en série de la force électromotrice E et de la résistance R.*

Réponse :
Si $R_2 \gg R_1$, la formule du pont diviseur du courant nous indique que $i_1 \simeq i$, alors le circuit est équivalent à la mise en série de R_1 et R avec la fem E. Si, de plus, on considère que $R \gg R_1$, alors la résistance R_1 est négligeable et le circuit se résume à la mise en série de la fem E et de R.
Sinon, on directement reprendre l'expression de R_{eq} :

$$R_{\text{eq}} = R + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \underbrace{\simeq}_{R_1 \ll R_2} R + \frac{R_1R_2}{R_2} = R + R_1 \underbrace{\simeq}_{R_1 \ll R} R$$

La résistance équivalente se résume à R, on retombe sur la même conclusion.
