

## Physique - Devoir Surveillé 01

Le 28/09/2024

## I Frottements en milieu aquatique

Quelle que soit leur taille, les êtres vivant en milieu aquatique sont soumis à des forces de frottement lorsqu'ils se déplacent. Ces forces s'opposent à leur mouvement. Cependant, en fonction de la taille de l'animal considéré, la force de frottement n'a pas la même origine physique. Ce court problème s'intéresse à deux forces différentes afin d'en déduire certaines propriétés à l'aide de l'analyse dimensionnelle. Aucune connaissance préalable en mécanique des fluides n'est nécessaire.

## I.A Cas de êtres microscopiques

Les êtres microscopiques (plancton, bactéries,...) sont soumis à un type de frottement qui met en jeu la viscosité du fluide. L'intensité de cette force  $F_{visc}$ , pour un objet sphérique de rayon  $r$  et de vitesse  $v$ , est de la forme

$$F_{visc} = k \eta r^\alpha v^\beta \quad (I.1)$$

où  $k$  est une constante sans dimension et  $\eta$  est la grandeur appelée viscosité, qui ne dépend que du fluide considéré. Nous avons mesuré expérimentalement cette force pour des billes de différents rayons, à des vitesses différentes dans un liquide visqueux. Les résultats sont récapitulés dans le tableau suivant. Ces mesures sont toutes effectuées dans le même fluide, de la glycérine, la valeur de la viscosité  $\eta$  ne change donc pas d'une mesure à l'autre dans le tableau. Les forces sont mesurées avec une incertitude-type  $\delta F = 0,02$  mN.

	$v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$	$v = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$
$r = 1 \text{ cm}$	2,81 mN	28,08 mN
$r = 2 \text{ cm}$	5,62 mN	56,17 mN

1. À l'aide des résultats du tableau, déterminer les valeurs des exposants  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Réponse :**

On constate que  $F_{visc}$  est proportionnel à  $r$  et à  $v$ . En effet, un rayon multiplié par 2 conduit à une force également multipliée par deux, et une vitesse multipliée par 10 conduit à une force multipliée par 10. Ainsi :

$$\alpha = 1 \text{ et } \beta = 1$$

2. Déterminer la dimension de  $\eta$  et donner son unité S.I.

**Réponse :**

$$[F_{visc}] = M.L.T^{-2}, \text{ d'où } [\eta] = \frac{[F_{visc}]}{[r][v]} = \frac{MLT^{-2}}{L \times L.T^{-1}}$$

$$[\eta] = ML^{-1}T^{-1} \quad (I.2)$$

L'unité SI de  $\eta$  est donc le  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , aussi nommé poiseuille (Pl).

3. D'après les données suivantes, estimer la valeur numérique de  $F_{visc}$  pour une bactérie dans l'eau.

**Réponse :**

$$\text{Application numérique } F_{visc} = 2 \times 10^1 \cdot 1 \times 10^{-3} \cdot 1 \times 10^{-6} \cdot 1 \times 10^{-6} \text{ N, soit } F_{visc} \sim 2 \times 10^{-14} \text{ N}$$

**Données :**

- rayon typique d'une bactérie :  $1 \mu\text{m}$  ;
- viscosité de l'eau :  $1,0 \times 10^{-3}$  USI ;
- vitesse typique d'une bactérie :  $1 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- $k \simeq 20$ .

## I.B Cas des grands animaux

Nous nous intéressons maintenant aux grands animaux marins. Ils ne sont plus soumis à la force précédente mais à un autre type de force de frottement due à la formation de turbulences dans leur sillage. Nous modélisons un tel animal par un cylindre de rayon  $r$ . L'intensité de la force, appelée  $F_{turb}$ , dépend de la vitesse  $v$  de l'animal, de son rayon  $r$  et de la masse volumique  $\rho$  de l'eau dans lequel il se déplace.

4. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression du module  $F_{turb}$  de la force en fonction des grandeurs pertinentes du problème.

**Réponse :**

Cherchons  $F_{turb}$  sous la forme d'une loi de puissance des grandeurs pertinentes du problème :  $F_{turb} = K r^\alpha v^\beta \rho^\gamma$  avec  $K$  constante sans dimension.

La formule doit être homogène. Ainsi :  $MLT^{-2} = 1.L^\alpha.(LT^{-1})^\beta.(ML^{-3})^\gamma$

Ceci implique immédiatement  $\gamma = 1$  (pour les masses) et  $\beta = 2$  (pour le temps). Pour la longueur, on a alors :  $1 = \alpha + \beta - 3\gamma = \alpha + 2 - 3$ , soit  $\alpha = 2$ .

Ainsi, la force peut s'écrire  $F_{turb} = K r^2 v^2 \rho$ .

5. Tous les autres paramètres restant constants, que devient la force propulsive si le rayon de l'animal est divisé par 3 ?

**Réponse :**

Si le rayon de l'animal est divisé par 3, la force propulsive est divisée par  $3^2 = 9$ , car  $F_{turb}$  est proportionnelle à  $r^2$ .

6. Calculer un ordre de grandeur crédible pour  $F_{turb}$  dans le cas d'un dauphin.

**Réponse :**

Pour un dauphin, prenons  $r = 0,3 \text{ m}$ ,  $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On obtient alors, en supposant  $K = 1$  (l'énoncé ne précisant rien à ce sujet) :  $F_{turb} = 0,3^2 \times 5^2 \times 10^3 \approx 0,09 \times 25 \times 10^3 \text{ N}$ , soit  $F_{turb} \approx 2 \times 10^3 \text{ N}$

## II Mesure du taux de sucre dans le jus de raisin

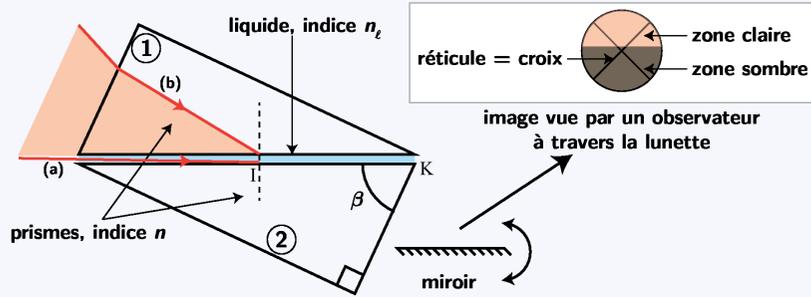
Afin de contrôler la maturité des raisins dans les vignes, les viticulteurs ont besoin de connaître la teneur en sucre dans le jus des raisins avant la récolte.

Une méthode consiste à utiliser un appareil appelé réfractomètre permettant de mesurer l'indice de réfraction du jus. L'indice varie avec la concentration en sucre : des courbes permettent alors d'en déduire la quantité de sucre et le degré d'alcool espéré du futur vin.

Les documents 1 et 2 apportent des informations sur le réfractomètre et la source de lumière utilisée.

**Document 1**

Le schéma d'un réfractomètre d'Abbe est représenté ci-dessous :

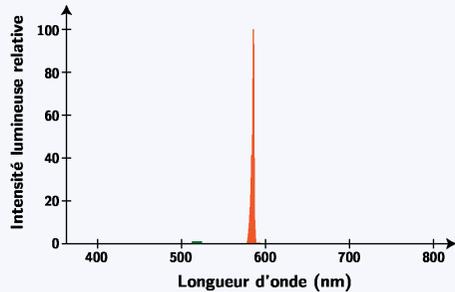


Il est constitué de deux prismes en verre d'indice  $n$  entre lesquels est positionné un mince film de liquide issu du raisin dont on veut mesurer l'indice de réfraction  $n_l$ .

- Le prisme d'entrée (1) est accolé à une lampe à vapeur de sodium et permet d'éclairer le liquide en incidence rasante (rayon (a)).
- Les rayons traversant le prisme (2) sont envoyés sur un miroir dont on peut contrôler l'inclinaison.
- Après réflexion, ces rayons sont alors observés par l'utilisateur à l'aide d'une lunette; l'observateur règle la position du miroir de sorte à placer la limite de séparation entre la zone claire et la zone sombre au centre du réticule (croix).

**Document 2**

Spectre d'une lampe à vapeur de sodium basse pression :



On travaillera avec des angles orientés dans ce problème.

1. Pour quelle raison a-t-il été choisi d'éclairer le dispositif à l'aide d'une lampe à vapeur de sodium ? Justifier.

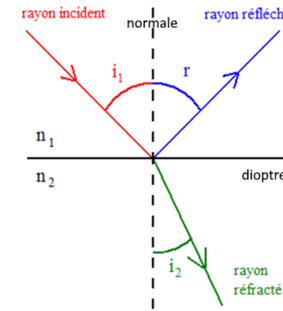
**Réponse :**

La lumière émise par la lampe à vapeur de sodium est quasiment monochromatique : on évite ainsi le phénomène de dispersion.

2. Rappeler les lois de Snell-Descartes pour le passage d'un rayon lumineux au travers d'un dioptre séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Définir les angles sur un schéma et les nommer.

**Réponse :**

On note  $i_1$  l'angle d'incidence,  $i_2$  l'angle de réfraction et  $r$  l'angle de réflexion.



**Lois de la réflexion :**

- Première loi : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence
- Deuxième loi : Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux :  $i_1 = r$

**Lois de la réfraction :**

- Première loi : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence
- Deuxième loi : Les angles d'incidence et de réfraction sont liés par la relation :  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$  ( $n_1$  et  $n_2$  les indices de réfraction des milieux 1 et 2).

3. On considère que  $n_1 > n_2$ . Définir le phénomène de réflexion totale, et préciser à quelle condition sur l'angle d'incidence le phénomène de réflexion totale se produit.

**Réponse :**

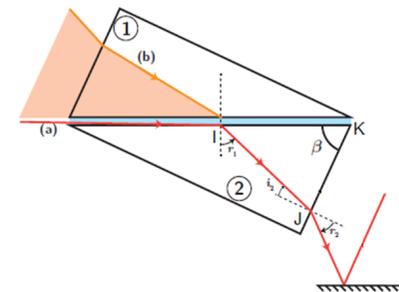
Au passage de la lumière d'un milieu 1 vers un milieu 2 moins réfringent, on observe une disparition du rayon réfracté lorsque l'angle d'incidence dépasse une certaine valeur, appelée angle de réflexion totale (notée  $i_{lim}$ , qui correspond à  $i_2 = \pi/2$ ). La lumière est alors totalement réfléchi : c'est le phénomène de réflexion totale. On en déduit que  $n_1 \sin(i_{lim}) = n_2 \sin(\pi/2)$  soit au final,

Pour  $i > i_{lim}$  avec  $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ , il y a réflexion totale.

4. Reproduire et compléter le schéma du document 1 en indiquant le chemin parcouru par le rayon (a) en incidence rasante et traversant le dioptre liquide/prisme en I. On suppose que  $n > n_l$ , et on note  $r_1$  l'angle de réfraction à l'interface liquide-verre,  $i_2$  et  $r_2$  respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction sur la face de sortie du prisme. L'indice de l'air sera quant à lui pris égal à 1,00.

**Réponse :**

On reprend le schéma du document, en orientant les angles :



5. Démontrer que  $\beta + i_2 = r_1$

**Réponse :**

On obtient dans le triangle  $IJK$

$$\begin{aligned} \pi &= \beta + (\pi/2 - r_1) + (\pi/2 + i_2) \\ \Rightarrow \boxed{\beta + i_2 = r_1} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

En effet, il faut bien faire attention aux signes des angles. En effet, sur le schéma du corrigé, on a  $i_2 < 0$ .

6. Montrer qu'il existe un lien entre  $r_2$  et l'indice  $n_l$  du liquide. Calculer la valeur numérique de  $n_l$  pour  $n = 1,732$ ,  $r_2 = -23,3^\circ$  et  $\beta = 65,0^\circ$ , l'expérience ayant été réalisée à  $20^\circ\text{C}$ .

**Réponse :**

On peut appliquer la loi de Snell Descartes aux points I et J soit :

$$n_l = n \sin(r_1) \quad (\text{II.2})$$

$$n \sin(i_2) = n_{\text{air}} \sin(r_2) \quad (\text{II.3})$$

On peut maintenant combiner ces résultats pour obtenir le résultat attendu. Les équations II.1 et II.2 donne

$$n_l = n \sin(\beta + i_2)$$

On combine ensuite ce résultat avec l'équation II.3 pour obtenir

$$\boxed{n_l = n \sin\left(\beta + \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n} \sin(r_2)\right)\right)}$$

L'application numérique (attention aux signes!) donne  $n_l = 1,361$ .

NB : Le résultat a été fourni avec 4 chiffres significatifs de façon à pouvoir répondre à la question suivante.

7. En déduire un encadrement de la teneur en sucre à l'aide du tableau suivant :

Indice de réfraction à $20^\circ\text{C}$	1,3577	1,3592	1,3607	1,3621	1,3635	1,3650	1,3665	1,3680	1,3694
Teneur en sucre (en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ )	150	160	170	180	190	200	210	220	230

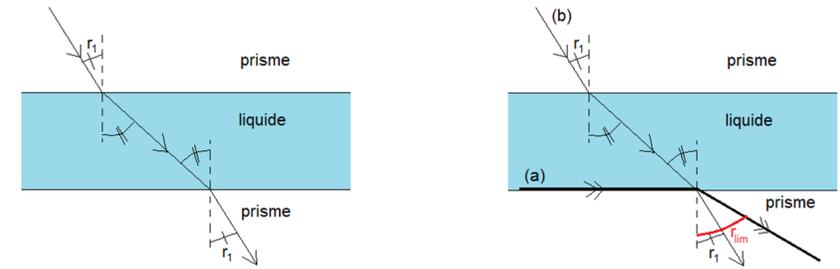
**Réponse :**

D'après le tableau, la teneur en sucre est comprise entre  $170 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  et  $180 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ .

8. Indiquer sur le schéma de la question 4, le chemin parcouru par le rayon (b) et conclure quant au fonctionnement du réfractomètre.

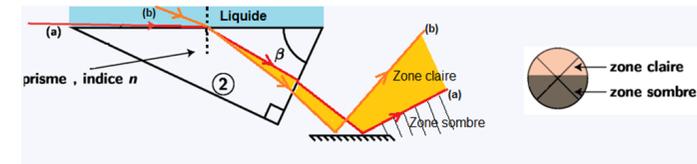
**Réponse :**

Le rayon (b) traverse d'abord le film de liquide situé entre les deux prismes. Ce rayon traverse donc une lame à faces parallèles. En supposant que le rayon (b) présente un angle d'incidence inférieur à l'angle de réflexion totale sur le premier dioptre (verre du prisme-liquide), il émerge donc dans le deuxième prisme en conservant sa direction initiale.



L'angle  $r_1$  de réfraction du rayon (b) à l'interface liquide-verre est bien sûr inférieur à l'angle de réfraction du rayon (a), qui arrive sur la même interface avec une incidence rasante. Le rayon (a) présente un angle de réfraction égal à l'angle de réfraction limite :  $r_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_l}{n}\right)$ .

Représentons la marche des deux rayons à travers le deuxième prisme :



On comprend alors sur le schéma que l'observateur qui vise la limite de séparation entre la zone claire et la zone sombre parvient ainsi à repérer le rayon (a), qui a été réfracté à l'interface liquide-verre avec un angle de réfraction égal à l'angle de réfraction limite.

L'angle de réfraction limite dépendant de l'indice de réfraction  $n_l$  du liquide, on parvient ainsi à déterminer cet indice.

### III Focométrie

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance focale d'une lentille convergente  $L$  inconnue de plusieurs manières distinctes.

#### III.A Méthode d'auto-collimation

On considère la situation schématisée ci-contre constituée d'un objet  $AB$ , d'une lentille convergente et d'un miroir plan.

- Sur la reproduction de la figure III.1 en annexe, placer les images successives de  $AB$  :
  - $A_1B_1$ , l'image de  $AB$  à travers la lentille.
  - $A_2B_2$ , l'image de  $A_1B_1$  à travers le miroir.
  - $A_3B_3$ , l'image de  $A_2B_2$  à travers la lentille.

**Réponse :**

On place les images  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  à l'intersection de deux rayons puis les points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  par applanétisme (c.f. figure III.1)

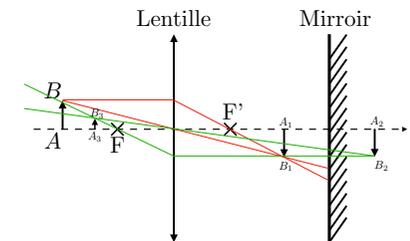


FIGURE III.1

2. Justifier que si l'objet  $AB$  se trouve dans le plan focal objet de la lentille, l'image  $A_3B_3$  à travers le système {lentille | miroir | lentille} se trouvera au même endroit. On pourra, si besoin, réaliser un tracé graphique pour répondre à la question.

**Réponse :**

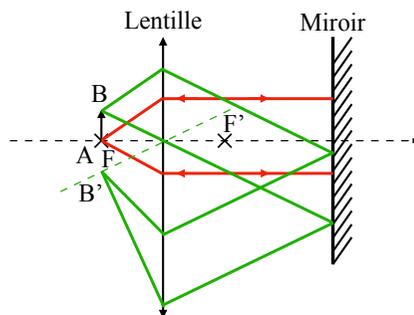
On cherche les images de  $A$  et  $B$  pour ce système optique. Graphiquement, on observe que l'image  $A'B'$  de  $AB$  apparaît de manière renversée dans le plan focal objet de la lentille (donc là où se trouve l'objet  $AB$ )

3. En déduire une méthode expérimentale permettant de déterminer la distance focale d'une lentille convergente.

**Réponse :**

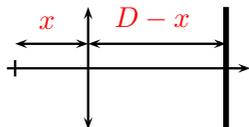
Il suffit de positionner la lentille de sorte que l'image d'un objet se superpose à ce dernier. Dans ce cas, la distance focale image vaudra la distance séparant la lentille de l'objet.

Cette méthode ne fonctionne qu'avec une lentille convergente. De plus, ce résultat ne dépend pas de la position du miroir.

**III.B Méthode de Bessel**

On considère de nouveau une lentille convergente, de distance focale image  $f'$ . On souhaite observer, sur un écran, l'image par cette lentille d'un objet réel éclairé. On note  $D$  la distance entre l'objet et l'écran, tous les deux supposés orthogonaux à l'axe optique. On notera  $f' > 0$  la distance focale image de la lentille.

4. Réaliser un schéma détaillé de la situation.

**Réponse :**

5. Donner la condition que doit vérifier  $D$  pour qu'il soit possible de former une image réelle de l'objet sur l'écran.

**Réponse :**

Il suffit d'appliquer la relation de conjugaison de la lentille :  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$

avec ici  $p = -x$  (attention au signe) et  $p' = D - x$ . On obtient alors une équation dont  $x$  (la position de la lentille) est solution :

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow Df' = x(D-x) \Rightarrow x^2 - Dx + Df' = 0$$

On pourra former une image lorsqu'il existera au moins une solution réelle à cette équation soit lorsque  $D(D-4f') \geq 0$  soit au final  $D > 4f'$ .

6. On se place dans le cas où il existe deux positions distinctes de la lentille pour lesquelles on observe la formation de l'image de l'objet sur l'écran. À l'aide de la relation de conjugaison de Descartes, exprimer la distance entre ces deux positions (notée  $d$ ) en fonction de  $D$  et  $f'$ .

**Réponse :**

On a dans ce cas :

$$x_{\pm} = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2} \text{ soit } d = x_+ - x_- = \sqrt{D(D-4f')}$$

7. En déduire une méthode expérimentale permettant de mesurer la distance focale d'une lentille convergente.

**Réponse :**

Il suffit de trouver, dans cette configuration, la distance  $d$  entre les deux positions de la lentilles qui permettent d'obtenir une image nette de l'objet sur l'écran. On utilise ensuite la formule précédente pour isoler  $f'$  :

$$f' = \frac{D}{4} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right)$$

**III.C Méthode purement graphique**

Ici, on cherche à déterminer les distance focales de lentilles en étudiant le passage de rayons lumineux à travers ces dernières (on peut utiliser un faisceau LASER par exemple).

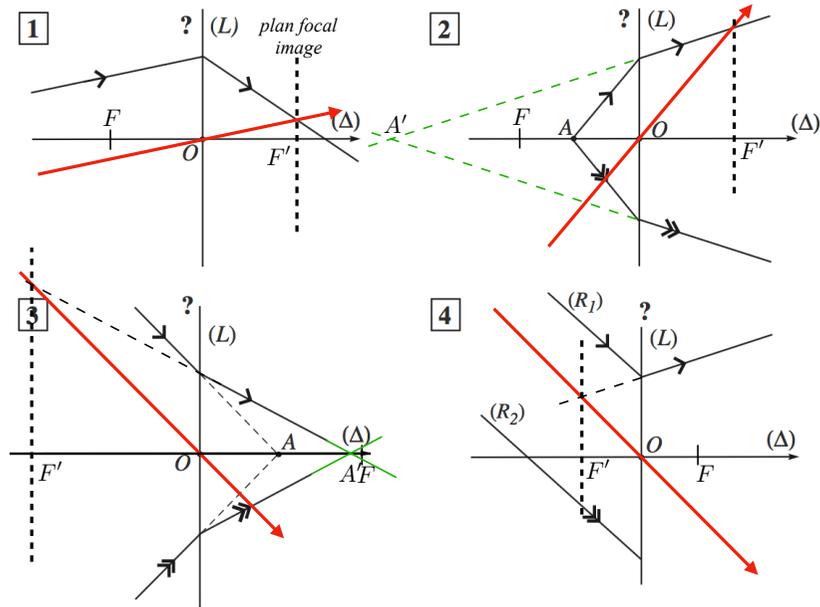


FIGURE III.2

8. Dans les quatre situations représentées sur la figure III.2, déterminer la position du foyer objet  $F$  et du foyer image  $F'$  de chaque lentille à l'aide d'une série de constructions graphiques qu'il faudra réaliser sur le document annexe (à rendre avec votre copie).

Conclure quant à la nature de chaque lentille (et compléter sa représentation graphique).

#### Réponse :

Les traits de construction (rouges) permettant d'obtenir la position des foyers images sont représentés sur la figure précédente. Dans chaque cas, on utilise un rayon parallèle au rayon incident passant par le centre optique (donc non dévié). L'intersection de deux rayons arrivant parallèles se situant dans le plan focal image, on en déduit la position du foyer image, puis du foyer objet par symétrie.

On obtient finalement des lentilles convergentes dans les cas 1 et 2 et des lentilles divergentes dans les cas 3 et 4.

#### Remarque :

On aurait aussi pu déterminer directement la position du foyer objet en considérant un rayon parallèle au rayon émergent.

9. Préciser pour les cas 2 et 3 si les images de  $A$  sont réelles ou virtuelles. De même, poursuivre le tracé pour le rayon  $(R_2)$  du cas 4.

#### Réponse :

On observe que  $A'$  se trouve à l'intersection de rayons prolongés pour la figure III.2.2 : image virtuelle tandis que  $A'$  se trouve à l'intersection de rayons non prolongés pour la figure III.2.3 : image réelle.