

Physique - Devoir Maison Entrainement
05/01/2026

Corrigé

I Microscope électronique à balayage (D’après Banque PT 2017 et capes 2008)

La microscopie optique classique est limitée par la diffraction. Pour améliorer la résolution, on remplace les photons par des électrons de charge $q = -e$ et de masse m .

1. Définir la diffraction. Donner, en argumentant, un ordre de grandeur de la résolution d’un microscope optique fonctionnant dans le visible.

Réponse :

La diffraction est un phénomène ondulatoire se produisant lors de l’interaction d’une onde de longueur d’onde λ avec un objet de dimension comparable à λ . La diffraction d’une onde engendre un éparpillement spatial de l’onde.

La résolution d’un microscope optique est donc de l’ordre de la longueur d’onde du visible, soit $400 - 800 \text{ nm}$.

I.A Aspect énergétique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (figure ??) constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de $d = 1 \text{ cm}$ et séparées par du vide quasi-parfait.

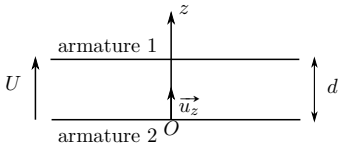


FIGURE I.1 – Schéma du canon à électrons.

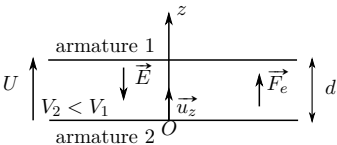
On applique entre les armatures une tension positive $U = V_1 - V_2$. On suppose que le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures est uniforme.

2. Représenter le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle ? Exprimer la force électrique exercée sur l’électron en fonction de $E_0 = ||\vec{E}||$, e et $\vec{u}_z$.

Réponse :

Le champ électrique est orienté selon les potentiels décroissants, donc $\vec{E} = -E_0\vec{u}_z$.

La force électrique s’exerçant sur l’électron s’écrit $\vec{F}_e = -e\vec{E} = eE_0\vec{u}_z$. Cette force est orientée selon $+\vec{u}_z$, donc les électrons doivent être émis depuis l’armature 2.



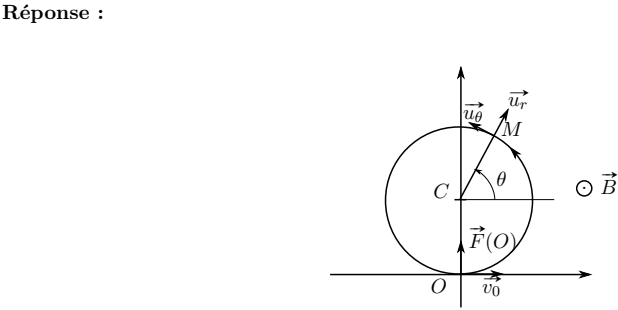
I.B Déflecteur magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.
On suppose qu'un électron de vitesse $\vec{v}_0$ arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au vecteur vitesse. Il n'y a plus de champ électrique.

6. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

Réponse :
L'électron est soumis uniquement à la partie magnétique de la force de Lorentz $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$.
D'après le théorème de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$.
Par propriété du produit vectoriel $\vec{F}_m \perp \vec{v}$, donc $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$.
On en déduit que $E_c = cste$, soit $v = ||\vec{v}|| = cste$. Le mouvement est uniforme.

7. On admet que la trajectoire est circulaire. Tracer cette trajectoire, en faisant clairement apparaitre les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$. Placer le centre C de la trajectoire circulaire, ainsi que la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de centre C . L'axe de référence pour l'angle θ sera pris parallèle à $\vec{v}_0$ et passant par C .



8. Déterminer l'expression du rayon R du cercle décrit en fonction de m , $v_0 = ||\vec{v}_0||$, e et B .

Réponse :
On applique la loi de la quantité de mouvement avec $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$ pour un mouvement circulaire uniforme :
 $-m\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r = -ev_0\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_z = -ev_0B\vec{u}_r$
On projette sur $\vec{u}_r$: $\boxed{R = \frac{mv_0}{eB}}$.

I.C Lentille magnétique

Le contrôle de la focalisation du faisceau électronique dans le microscope électronique est possible en utilisant des lentilles magnétiques. On s'intéresse ici à une lentille magnétique, modélisée par une bobine de N tours confondus, circulaires de rayon a , de centre O , d'axe Oz et parcourue par un courant permanent I . Cette bobine est obtenue par l'enroulement d'un fil électrique.
Un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz et de centre O .

En considérant les symétries et les invariances du bobinage, on peut justifier que le champ magnétique est indépendant de θ et ne possède pas de composante orthoradiale. On peut alors écrire :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$$

En pratique, le faisceau électronique passe dans le domaine $r \ll a$. Dans ce cas, on peut se contenter d'une expression approchée du champ $\vec{B}$ au voisinage de l'axe Oz :

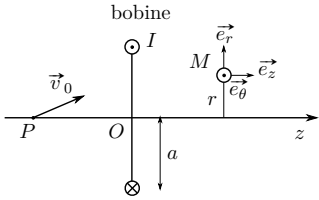
$$\vec{B}(M) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \vec{e}_r + B_z(0, z)\vec{e}_z$$

avec $B_z(0, z) = \frac{B_0}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2}}$ le champ magnétique sur l'axe Oz et $B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2a}$ le champ magnétique en O .

On place en un point P de l'axe Oz , en amont de la lentille magnétique, une source ponctuelle d'électrons. On considère un électron émis depuis le point P avec une vitesse $\vec{v}_0$.
On ajoute les hypothèses simplificatrices suivantes à l'étude :

- L'électron est supposé non relativiste.
 - L'électron ne subit que la force magnétique due à la lentille.
 - Le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ en P est dans le plan méridien $\theta = 0$ et forme un angle α avec l'axe Oz .
 - L'angle α est faible ($\alpha \ll 1$) et la trajectoire ultérieure de l'électron reste dans le domaine $r \ll a$.
9. Produire un schéma paramétré dans un plan contenant l'axe Oz , et comportant la bobine, la définition des coordonnées cylindriques de M et la base locale associée, ainsi que le vecteur $\vec{v}_0$.

Réponse :



10. A quelle approximation d'optique une de ces hypothèses fait-elle penser ? On définira cette approximation et on précisera les conséquences.

Réponse :
La dernière hypothèse fait penser aux conditions de Gauss consistant à ne considérer que des rayons paraxiaux (proches de l'axe optique et faiblement inclinés par rapport à celui-ci).
Dans ces conditions, il y a stigmatisme et aplanétisme approchés.

11. Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur de champ magnétique à partir de laquelle on peut ne pas tenir compte du poids de l'électron dans l'étude de son mouvement. On supposera que l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron est $1 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Conclure.

Réponse :

L'ordre de grandeur de la force magnétique est $F_m = evB$. Le poids s'exprime $P = mg$. On veut que $P/F_m \ll 1$:

$$\frac{mg}{evB} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad B \gg \frac{mg}{ev} \approx \frac{10}{2 \times 10^{11} \times 10^8} = 5 \times 10^{-19} \text{ T}$$

Il faut donc que B soit supérieur à $5 \times 10^{-19} \text{ T}$, ce qui est une valeur extrêmement faible. Donc il est raisonnable de négliger le poids.

12. Exprimer l'accélération de M en coordonnées cylindriques, puis montrer que sa composante orthoradiale peut être mise sous la forme $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} [r^2 \dot{\theta}]$.

Réponse :

On donne la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

On remarque que l'accélération orthoradiale peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} [r^2 \frac{d\theta}{dt}] = \frac{1}{r} (2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}) = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$$

13. En déduire les trois équations différentielles du mouvement, que l'on notera (1), (2) et (3) et qui correspondent respectivement à la projection du principe fondamental de la dynamique sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$.

Réponse :

On exprime la force de Lorentz dans la base cylindrique :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(0, z) \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} r \dot{\theta} B_z(0, z) \\ -\dot{r} B_z(0, z) \\ -r \dot{\theta} \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \right) \end{pmatrix}$$

En projetant la loi de la quantité de mouvement dans la base cylindrique, on obtient les équations :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_z(0, z) \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0, z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \right] \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{2m} r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \quad (\text{I.3})$$

14. Démontrer, à l'aide de l'équation (2), la relation $\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$.

Réponse :

Le second membre de l'équation (2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{e}{2m} \frac{d}{dt} [r^2 B_z(0, z)] &= \frac{e}{2m} \left[2r \dot{r} B_z(0, z) + r^2 \frac{dB_z(0, z)}{dz} \frac{dz}{dt} \right] \\ &= \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0, z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

Par intégration de l'équation 2, $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} r^2 B_z(0, z) + \text{cste}$.

Or à $t = 0$, $r = 0$, donc la constante est nulle. On en déduit $\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$.

15. L'équation (3) présente un second membre en r^2 négligeable dans le cadre de cette étude (car d'ordre 2 en r/a). Que vaut alors $\frac{dz}{dt}$? En déduire, en partant de l'équation (1), que l'évolution radiale $r(z)$ de l'électron vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2(0, z) = 0 \quad (\text{I.4})$$

Réponse :

Par intégration de l'équation 3, $\frac{dz}{dt} = \text{cste} = v_0 \cos(\alpha) \approx v_0$. Par l'équation 1, en remplaçant $\dot{\theta}$ par son expression $\frac{e}{2m} B_z(0, z)$:

$$\ddot{r} - r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0, z) = -\frac{e}{m} r \times \frac{e}{2m} B_z(0, z) \times B_z(0, z) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{r} + r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0, z) = 0$$

Or $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \approx v_0 \frac{dr}{dz}$. On dérive à nouveau, et on obtient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \approx v_0 \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{dz}{dt} \approx v_0^2 \frac{d^2 r}{dz^2}.$$

D'où l'expression donnée dans l'énoncé.

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2(0, z) = 0$$

16. On propose sur les figures ?? et ?? deux familles de tracés de fonctions $r(z)$ partant d'un point d'annulation avec un angle de départ α variable. Quelle figure représente effectivement un champ de solutions possible de l'équation ?? (on justifiera la réponse) ? Le système étudié joue-t-il bien son rôle attendu ?

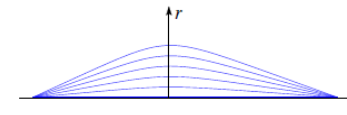


FIGURE I.2

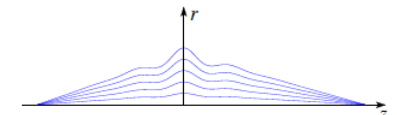
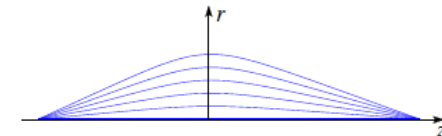


FIGURE I.3

Réponse :

D'après l'équation 4, $\frac{d^2 r}{dz^2} < 0$, donc la courbe $r(z)$ est forcément concave. Cette constatation est en accord avec la figure de gauche :



On constate que les courbes $r(z)$ s'annulent en un point de l'axe Oz , avec $z > 0$. Ce point P' est le conjugué du point P . Donc le système joue bien le rôle d'une lentille.

On ajoute à présent l'hypothèse de lentille mince, c'est-à-dire que le champ magnétique du bobinage n'intervient que sur une zone faible d'épaisseur comprise entre deux plans Π et Π' , de positions $-z_0$ et z_0 avec $z_0 \ll OP$ (figure ??). Dans ces conditions, on peut montrer que la distance focale est approximativement donnée par

$$f' = \frac{32m^2v_0^2}{3\pi a\epsilon^2B_0^2}$$

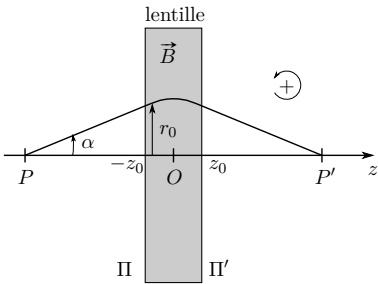


FIGURE I.4

17. Quel est le signe de f' ? Conclure.

Réponse :
 $f' > 0$, donc la lentille est convergente.

18. Sur quels paramètres peut-on jouer pour réduire f' à tension accélératrice U fixée ?

Réponse :
Pour diminuer f' , il faut augmenter $aB_0^2 = \frac{N^2I^2}{a}$. On peut augmenter l'intensité I , ou diminuer le rayon a des spires.

II Filtre pour accéléromètre

On se propose de réaliser un filtre pour accéléromètre. Les accéléromètres sont des composants dont le premier objectif est de mesurer l'accélération. On peut en trouver dans de nombreux appareils tels les téléphones portables ou les manettes de Wii. Un deuxième objectif sera d'étudier un traitement analogique permettant d'obtenir la vitesse et la position à partir de la mesure du signal fourni par l'accéléromètre.

On donne ci-dessous les formes canoniques d'un certain nombre de filtres du premier et du second ordre. $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ représente la pulsation réduite et ω_0 la pulsation propre.

$$\underline{H}_1(jx) = \frac{H_0}{1 + jx} ; \underline{H}_2(jx) = \frac{H_0jx}{1 + jx}$$

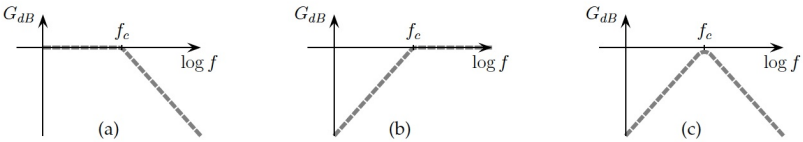
puis

$$\underline{H}_3(jx) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} ; \underline{H}_4(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} ; \underline{H}_5(jx) = \frac{H_0(jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \tag{II.1}$$

II.A Suppression de la composante continue

Les composants électroniques ont un comportement qui varie très légèrement avec la température, ce qui fait que que la plupart des appareils de mesure ont une légère composante continue ou basse fréquence qui ne reflète pas nécessairement le signal que l'on cherche à étudier (l'accélération ici).

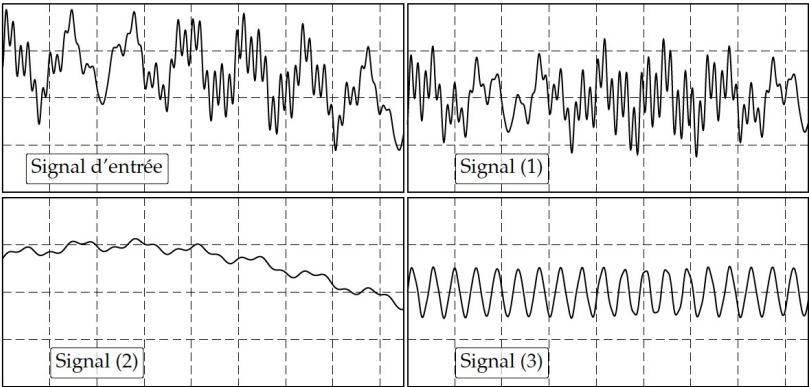
L'échelle de temps typique considérée pour ces variations indésirables est de l'ordre de 50s, au moins, soit des fréquences inférieures à 0,02 Hz. Pour éliminer ce problème, on traite le signal en le faisant passer par un filtre de fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz.



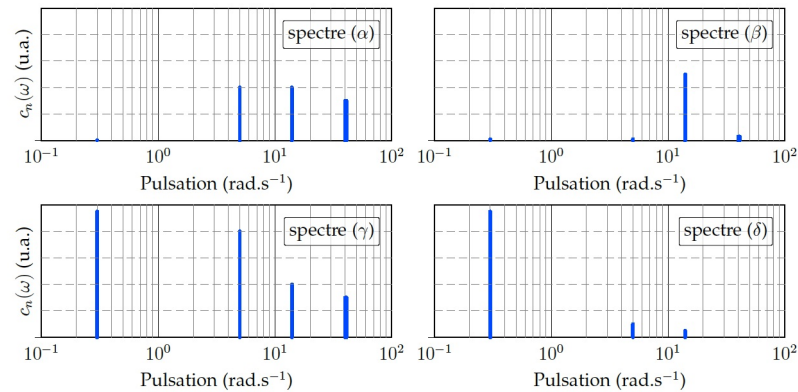
1. Parmi les filtres (a), (b) et (c), dont on propose ci-dessous les diagrammes asymptotiques, lequel correspond le mieux à l'utilisation que l'on veut en faire ? Justifier brièvement.

Réponse :
On souhaite conserver uniquement les hautes fréquences du signal. Il convient alors d'utiliser un filtre de type passe haut dont le diagramme asymptotique est représenté sur le schéma (b).

On considère le signal représenté ci-dessous à gauche (signal d'entrée) en entrée des filtres ainsi que les trois signaux de sorties obtenus dans le désordre.



On donne aussi les 4 spectres correspondants à ces signaux (à nouveau dans le désordre).



2. Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal (entrée, 1, 2 et 3) correspond quel spectre (α , β , γ et δ).

Réponse :

Le spectre γ contient l'intégralité des fréquences présentes dans les autres spectres, mais avec des amplitudes élevées. Il correspond alors à un signal non filtré donc au signal d'entrée.

A l'inverse, le signal δ contient principalement un pic en basse fréquence (variations lentes dans le domaine temporel), il correspond alors au signal 2, pour lequel on peut tout de même observer de légères variations à plus hautes fréquences.

Le spectre β contient principalement un pic à haute fréquence, il correspond alors à un signal quasi harmonique de fréquence élevée donc au signal 3.

Pour conclure, seul le pic de basse fréquence a disparu du spectre α . Ce dernier correspond donc à un signal non harmonique, mais sans variations lentes donc au signal 1.

3. On considère toujours le signal signal d'entrée en entrée des filtres proposés. Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal de sortie (1, 2 et 3) correspond quel filtre (a, b et c).

Réponse :

Le filtre a correspond au signal 2 (il ne reste principalement que les basses fréquences).

Le filtre b correspond au signal 1 (seul les basses fréquences ont été coupées).

Pour finir, le filtre c (passe bande) correspond au signal 3 (quasi harmonique).

II.B Mesure du déplacement effectué

La position $x(t)$ d'un objet est reliée à son accélération $a(t)$ par la relation $a(t) = \ddot{x}(t)$. On peut ainsi remonter à la position de l'objet à partir de l'étude du signal de l'accéléromètre en l'intégrant deux fois.

Dans cette partie, l'objet étudié sera pris initialement au repos en $x = 0$.

4. Si le signal que l'on souhaite mesurer est de la forme $a(t) = a_0 \cos(\omega t) = \ddot{x}$, quelle serait l'expression du signal $x(t)$ correspondant ?

Réponse :

On primitive une première fois pour obtenir la vitesse

$$\dot{x}(t) = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega t) + c$$

or à $t = 0$, on a $\dot{x} = 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$. On primitive une seconde fois pour obtenir la position

$$x(t) = -\frac{a_0}{\omega^2} \cos(\omega t) + d$$

De plus, à $t = 0$, on a $x(0) = 0 = -a_0/\omega^2 + d \Rightarrow d = a_0/\omega^2$ d'où au final

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$$

5. On étudie maintenant le signal mesuré $a_m(t) = \epsilon + a(t)$ où ϵ est une erreur de mesure, **constante**. Quelle serait la forme $x_m(t)$ du signal que l'on déduirait de cette mesure par intégration ? En déduire qu'il est particulièrement important de supprimer la composante continue d'un signal que l'on souhaite intégrer.

Réponse :

On en déduit que

$$x_m(t) = x(t) + \frac{\epsilon^2}{2}$$

Ainsi, l'erreur $x - x_m$ est proportionnelle à t^2 et va donc s'amplifier au cours du temps. On ne pourra donc pas retrouver la position $x(t)$, même par filtrage.

A l'inverse, filtrer le signal dès le départ est beaucoup plus simple. En effet, ϵ étant constant, contrairement à l'accélération, un filtre passe haut de fréquence de coupure assez basse fera très bien l'affaire !

On considère le montage ci contre constitué d'un Amplificateur Linéaire Intégré (ALI), supposé idéal et de deux blocs d'impédances respectives Z_1 et Z_2 .

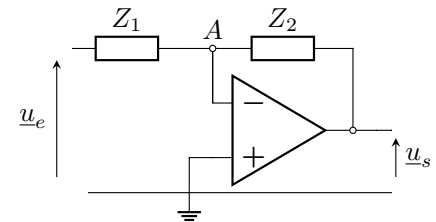
II.B.1 Réalisation de la double intégration

6. Établir l'expression de la fonction de transfert $H = \frac{u_s}{u_e}$.

Réponse :

On obtient après calculs (loi des nœuds en terme de potentiel

en A, mêmes calculs qu'en cours et TD) $H = -\frac{Z_2}{Z_1}$



7. On dispose d'un condensateur (C) et d'une bobine (L). Préciser comment positionner ces derniers pour que le filtre réalise une double intégration du signal d'entrée.

Réponse :

Il convient de placer le condensateur à droite ($Z_2 = 1/(jC\omega)$) et la bobine à droite ($Z_1 = jL\omega$). On en déduit

$$H = -\frac{1}{LC} \times \frac{1}{(j\omega)^2}$$

8. On donne $C = 1\mu F$. Quelle valeur peut-on choisir pour l'inductance L afin que $u_e(t) = -\tau^2 \frac{d^2 u_s}{dt^2}$ avec $\tau = 1$ s. Quel est l'intérêt de ce choix ?

Réponse :

On a $H = \frac{u_s}{u_e} \Rightarrow u_s = H u_e \Rightarrow -LC \frac{d^2 u_s}{dt^2} = u_e(t)$ et on en déduit par identification que $LC = \tau^2 \Rightarrow L = \frac{\tau^2}{C} \approx 1 \times 10^6$ H.

Ce choix permet d'obtenir la double primitive du signal d'entrée avec un préfacteur valant 1 (dans l'unité qui va bien !). Cependant, la valeur obtenue pour l'inductance semble rocambolesque !

II.B.2 Correction du signe

9. *Le montage précédent permet d'obtenir la double primitive du signal d'entrée, au signe près. Proposer un montage simple, à placer en amont du montage précédant et permettant de corriger le signe du signal de sortie.*

Réponse :

Montage amplificateur inverseur avec $R_1 = R_2$ comme dans le cours.
