Physique - Devoir Maison d'entrainement

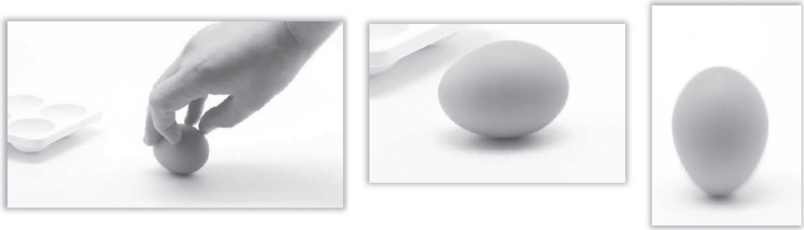
17/03/2023

Corrigé

I Oeuf dur

Le document ci-dessous décrit un phénomène qu'on observe lorsqu'on met en rotation un oeuf dur.

Document A
Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un oeuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'oeuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a **b** **c**

Évolution d'un oeuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'oeuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure I.1 ci-dessous :

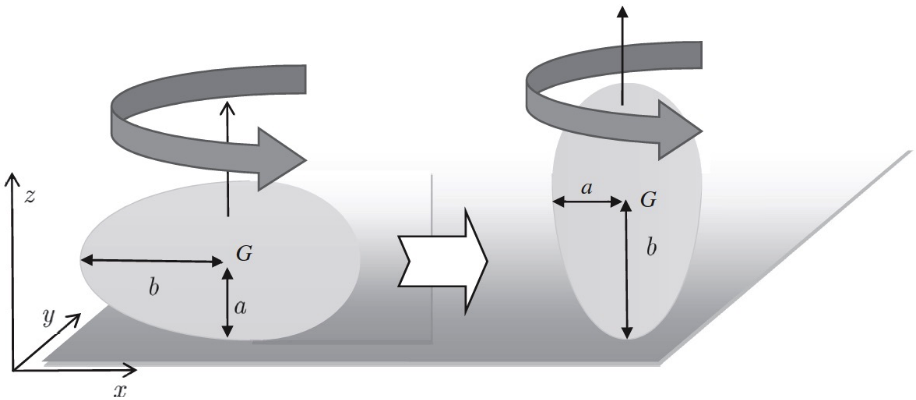


Figure I.1 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'oeuf. On modélise l'oeuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m, de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'oeuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

— $J_H = \frac{1}{5}m(a^2+b^2)$ lorsque l'oeuf tourne à l'horizontal,
— $J_V = \frac{2}{5}ma^2$ lorsque l'oeuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'oeuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

1. *Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et commenter physiquement.*

   Réponse :
   Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. En effet, la masse est globalement "répartie plus loin de l'axe de rotation", donc le moment d'inertie est plus grand.

---

2. *Exprimer l'énergie mécanique totale de l'oeuf dans les deux positions E_{m_H} et E_{m_V} en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.*

   Réponse :
   Dans les deux cas, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, on a donc

$$\boxed{E_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb}$$

---

3. *Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a, b, et g.*

   Réponse :
   On cherche la condition sur Ω pour avoir $E_{m_V} < E_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb < \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Rightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2 \Rightarrow 2mg(b-a) < \frac{m}{5}\underbrace{(b^2-a^2)}_{(a-b)(a+b)}\Omega^2 \Rightarrow \Omega > \sqrt{\frac{10g}{a+b}}$$

   On a donc $\Omega > \Omega_c$ avec $\boxed{\Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}}}$

---

4. *Calculer Ω_c pour $a = 2{,}0\,\text{cm}$ $b = 3{,}0\,\text{cm}$ et $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.*

   Réponse :
   L'application numérique donne $\Omega_c = 45\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ 7 tours/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde.

On suppose que le contact entre l'oeuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'oeuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'oeuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'oeuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

5. *Exprimer les énergies mécaniques initiale E_{m_H} et finale E_{m_V} au premier ordre en ε.*

Réponse :
À l'état initial, on a

$$E_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega_0^2 + mga = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$\boxed{E_{m_H} = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{m_V} = \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb}$$

---

6. *En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b. L'oeuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.*

Réponse :
On a supposé que l'énergie mécanique se conservait, on a donc

$$E_{m_H} = E_{m_V} \Rightarrow \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga$$

Or, on a vu dans la question 3 que

$$\frac{m}{5}a^2\Omega_c^2 + mgb = \frac{m}{10}(a^2+b^2)\Omega_c^2 + mga$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient :

$$\frac{m}{10}(a^2+b^2)2\Omega_c\varepsilon = \frac{m}{5}a^2 2\Omega_c r\varepsilon$$

Il vient donc $\boxed{r = \frac{a^2+b^2}{2a^2}}$

$b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente. Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas.

---

7. *Exprimer les moments cinétiques L_H et L_V de l'oeuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_V - L_H$ en fonction de Ω_c, m, a et b. L'oeuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?*

Réponse :
On a $\boxed{L_H = J_H\Omega_0 = \frac{m}{5}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)}$ et $\boxed{L_V = J_V\Omega_f = \frac{2m}{5}a^2(\Omega_c+r\varepsilon)}$

On en déduit $\Delta L = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c + \frac{m}{5}(2a^2r - a^2 - b^2)\varepsilon$

En injectant l'expression de r obtenue précédemment, le second terme est nul, d'où $\boxed{\Delta L = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c < 0}$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement.

---

8. *Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'oeuf a subi un couple $\vec{C}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :*

$$C_z \approx \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}$$

Réponse :
D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = C_z$. En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$ par $\frac{\Delta L}{\Delta t}$, on a donc

$$C_z = \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c}{\Delta t} = \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c^2}{\Omega_c\Delta t}$$

On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question 3 :

$$\boxed{C_z = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\frac{10g}{(a+b)\Omega_c\Delta t} = \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}}$$

Ce couple est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement.

---

9. *Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Si non, d'où peut provenir ce couple ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?*

Réponse :
Le poids et la réaction normale ne peuvent pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul. Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante.

II Quantification de l'énergie en mécanique quantique

On considère dans ce problème le cas de plusieurs électrons.

- Un électron en interaction électrostatique avec un proton pour former un atome d'hydrogène.
- Un électron piégé dans une boite dont la longueur l est choisie proche du diamètre de l'atome d'hydrogène dans son niveau fondamental .
- Un électron associé à un ressort pour former un oscillateur harmonique dont l'amplitude crête à crête des oscillations sera prise égale à l.

L'objectif étant de montrer que les énergies associées aux niveaux fondamentaux des trois systèmes sont proches les unes des autres. On notera dans toute la suite m_e la masse de l'électron et $-e$ sa charge électrique.
Les parties de ce problème sont largement indépendantes et les données nécessaires aux applications numériques sont récapitulées dans le tableau ci dessous.

$\hbar = 1{,}054 \times 10^{-34}$ Js	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg	$l = 0{,}1$ nm

II.A Étude de l'atome d'hydrogène

II.A.1 Modèle classique

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\vec{L}$.

1. *Rappeler l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron.*

   Réponse :
   On a d'après le cours, et en repère sphérique centré sur le proton

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{e}_r}$$

---

2. *En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_P de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.*

   Réponse :
   On a $\vec{F} = F\vec{e}_r = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{e}_r$ d'où l'on déduit que

$$\frac{\partial E_p}{\partial r} = -F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} + C$$

   avec C, une constante à déterminer. De plus, l'énoncé indique que $E_p \to 0$ lorsque $r \to +\infty$ d'où $C = 0$ et au final $\boxed{E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}}$

---

3. *Montrer que le mouvement de l'électron est plan.*

   Réponse :
   Le moment de $\vec{F}$ par rapport à O s'exprime selon $\vec{M}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. En effet, ces deux vecteurs sont colinéaires. Le TMC appliqué à M, par rapport à O et dans un référentiel galiléen indique alors que $\vec{L} = \vec{C}ste$.
   De plus, on a $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}$. On en déduit que $\overrightarrow{OM}$ est constamment perpendiculaire à $\vec{L}$ et donc que le mouvement est plan. Dans toute la suite, on se place dans le repaire polaire tel que $\vec{L} = L\vec{e}_z$.

---

4. *Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme*

$$E = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{P\,\mathrm{eff}}(r)$$

   où $E_{P\,\mathrm{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et de la norme du moment cinétique orbital $L = ||\vec{L}||$ de l'électron.

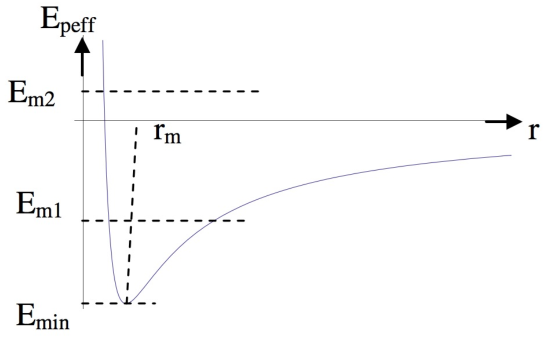
   Réponse :
   On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ puis $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On en déduit que $L = \overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v} \cdot \vec{e}_z = m_e r^2\dot{\theta}$.
   De plus, on a $E = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$. On obtient finalement en combinant ces résultats

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}}_{E_{P\,\mathrm{eff}}(r)}}$$

---

5. *Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\,\mathrm{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique $\vec{L}$.*

   Réponse :
   Voici la courbe dans le cas où $L \neq 0$.



   On peut observer, suivant le signe de E, des états de diffusion ($E \geq 0$) ou bien liés ($E < 0$). De plus, si le moment cinétique L est nul, seuls les états liés deviennent observables (dans ce cas, l'électron va rentrer en collision avec le proton).

---

6. *À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Montrer que le rayon r_{oc} de l'orbite circulaire s'exprime selon*

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$$

   puis exprimer l'énergie mécanique E_{oc} de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ϵ_0.

   Réponse :
   On obtient une orbite circulaire dès lors que L'énergie E_{oc} est égale au minimum local de l'énergie potentielle. Or ce minimum local existe uniquement si $L \neq 0$. On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}E_{P\,\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}(r_{oc}) = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{m_e r_{oc}^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_{oc}^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}}$$

   De plus, on a $E_{oc} = E_{P\,\mathrm{eff}}(r_{oc}) = \frac{L^2}{2m_e\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\left(\frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}\right)} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2 L^2}$

II.A.2 Modèle de Bohr

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle "semi-classique" de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

7. *Montrer que les rayons des orbites circulaires sont quantifiés. Déterminer la valeur numérique du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.*

Réponse :
On reprend le résultat de la question précédente en remplaçant L par $n\hbar$ d'où

$$r_{oc} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2n^2}{m_e e^2} = \frac{a_0}{n^2}$$

Ces rayons dépendent d'un entier n et sont donc bien quantifiés. On obtient de plus par identification que

$$\boxed{a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0{,}053\,\mathrm{nm}}$$

---

8. *En déduire que les niveaux d'énergie E_n sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.*

Réponse :
De même, on obtient ici que

$$\boxed{E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2n^2} = E_n \quad \text{et} \quad E_1 \approx -13{,}6\,\mathrm{eV}}$$

II.B Étude d'un électron piégé

On considère ici le cas d'un électron de masse, piégé dans une boite quantique, unidimensionnelle, de longueur l. Ce dernier, ne peut donc pas quitter cette boite et la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ de ce dernier peut être modélisé par la superposition de deux ondes progressives

$$\Psi(x,t) = a_+\cos(\omega t - kx) + a_-\cos(\omega t + kx + \varphi)$$

9. *Justifier brièvement pourquoi on a $\Psi(0,t) = 0$ et $\Psi(l,t) = 0$.*

Réponse :
La probabilité $dP = |\Psi^2|dx$ d'observer l'électron est nulle pour $x < 0$ et $x > l$ or la fonction d'onde Ψ est continue. On en déduit alors les résultats proposés.

---

10. *Montrer que l'on obtient une onde stationnaire en appliquant la première condition limite en $x = 0$.*

Réponse :
On a ici d'après la première CL :

$$\Psi(0,t) = 0 \Rightarrow a_+\cos(\omega t) + a_-\cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$$

et on observe que $\{a_+ = -a_-; \varphi = 0\}$ convient. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= a_+\cos(\omega t - kx) - a_+\cos(\omega t + kx)\\ &= 2a_+\sin(\omega t)\sin(kx)\end{aligned}$$

de la forme $\boxed{Psi(x,t) = f(x)\times g(t)}$ ce qui correspond bien à une onde stationnaire.

---

11. *Justifier rigoureusement pourquoi on ne peut avoir simultanément $a_+ = a_- = 0$ dans le cas d'une fonction d'onde Ψ.*

Réponse :
On obtient dans ce cas $\Psi(x,t) = 0, \forall x$ et donc on en déduit que $\int_0^l |\Psi|^2 dx = 0 \neq 1$ ce qui est impossible !

---

12. *Montrer alors que les longueurs d'ondes associées à l'électron peuvent s'exprimer en fonction de l et d'un entier n.*

Réponse :
On applique alors la deuxième CL :

$$\Psi(l,t) = 0, \forall t \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^\star, kl = n\pi$$

d'où l'on déduit que $\boxed{\lambda = \frac{2l}{n}}$

---

13. *Montrer alors que les différents niveaux d'énergie de l'électron s'écrivent selon :*

$$E'_n = \frac{h^2n^2}{8m_e l^2}$$

Réponse :
On peut appliquer la relation de de Broglie à l'électron pour obtenir sa quantité de mouvement $p = h/\lambda = hn/(2l)$ puis en déduire son énergie cinétique $E_c = p^2/(2m_e)$. De plus, l'électron piégé ne possède pas d'énergie potentielle d'où :

$$\boxed{E'_n = E_c = \frac{h^2n^2}{8m_e l^2}}$$

---

14. *Effectuer l'application numérique pour E'_1. L'ordre de grandeur obtenu est-il comparable au niveau d'énergie fondamental $|E_1|$ de l'atome d'hydrogène ? De même, pourquoi a-t-on utilisé cette valeur pour l à votre avis ?*

Réponse :
On obtient $\boxed{E'_1 \approx 38eV}$ soit une énergie du même ODG que celle du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène (13,7 eV). La longueur l à été choisi de manière à s'approcher justement de la taille de l'atome d'hydrogène. L4énergie obtenue est tout de même différente car dans l'atome d'hydrogène, il y a une interaction électrostatique entre le proton et l'électron, ce qui modifie les équations à résoudre.

II.C Oscillateur harmonique

On s'intéresse finalement d'un électron fixé à l'extrémité d'un ressort avec une constante de raideur k et la pulsation propre associée $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$. On considère de plus que la longueur à vide du ressort est nulle.

On se place en base cartésienne et on note $x(t)$ l'abscisse de l'électron.

15. *Démontrer la formule donnant l'énergie potentielle de l'électron en fonction de x et k . En déduire que pour un mouvement d'amplitude A, on a en ordre de grandeur*

$$\langle E_p \rangle \approx \frac{1}{2}kA^2$$

Réponse :
On a $\vec{F} = -kx\vec{e}_x \Rightarrow \delta W = -kxdx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2 + c\right) = -dE_p$ d'où l'on déduit par identification et en prenant $c = 0$ que $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$.
De plus, on a $\langle x^2 \rangle \approx A^2$ en ordre de grandeur d'où le résultat.
Pour aller plus loin :
Pour $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$, on a $< x^2 >= \frac{A^2}{2}$. Le facteur 1/2 peut être oublié en ordre de grandeur.

---

16. *Démontrer ensuite que l'énergie cinétique moyenne $\langle E_c \rangle$ de l'électron s'exprime selon $\langle E_c \rangle \approx \frac{\hbar^2}{8m_eA^2}$ en utilisant l'inégalité de Heisenberg saturée en fonction de A, m_e et $\hbar$.*

Réponse :
On a $\Delta x \times \Delta p_x \approx \hbar/2$. De plus, dans le cas d'un mouvement oscillant, on a $\Delta x \approx A$ et $\Delta p_x \approx p_x$. On en déduit au final que

$$\boxed{E_c = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8m_eA^2}}$$

On considère que l'énergie fondamentale de l'oscillateur correspond au minimum de l'énergie mécanique $E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$ par rapport à A. On cherche donc a obtenir l'amplitude A_m qui minimise l'énergie mécanique de l'électron et $E_m = E(A_m)$, l'énergie correspondante.

17. *Montrer que l'on obtient $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{km}}$ puis que $E_m = \frac{\hbar\omega_0}{2}$*

Réponse :
On a $E =< E_c > + < E_p >= \frac{\hbar^2}{8m_eA^2} + \frac{1}{2}kA^2$ d'où l'on déduit en dérivant que :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}A}(A_m) = 0 \Rightarrow -2\frac{\hbar^2}{8m_eA_m^3} + kA_m = 0$$
$$\Rightarrow A_m^4 = \frac{\hbar^2}{4m_ek}$$

d'où $\boxed{A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_ek}}}$.On obtient alors ensuite l'énergie minimale :

$$E_m = E(A_m) = \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{k}{m_e}} + \frac{\hbar}{4}\sqrt{\frac{k}{m_e}} = \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

---

18. *Exprimer alors la pulsation ω_0 en fonction de m_e, $\hbar$ et A_m et en déduire une valeur numérique pour E_m en* eV *en considérant par analogie avec les questions précédentes que $A_m = l/2$.*

Réponse :
On a $A_m^2 = \frac{\hbar}{2\sqrt{m_ek}} = \frac{\hbar}{2m_e\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\hbar}{2m_eA_m^2}$. Au final, on obtient :

$$E_m = \frac{\hbar^2}{4m_eA_m^2} = \frac{\hbar^2}{m_el^2} \approx 7{,}7\,\mathrm{eV}$$

Pour aller plus loin :
Encore une fois, pour une même longueur, l'ODG pour l'énergie minimale est le même que dans les autres configurations.

III De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune.

III.A De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

III.A.1 Décollage

1. *Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$. Dans toute la suite,* $\mathcal{R}_G$ sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen. *Justifier ce choix.*

   Réponse :
   Le référentiel géocentrique est le référentiel en translation par rapport au référentiel héliocentrique et ayant pour origine le centre de la Terre. Le référentiel terrestre est le référentiel lié au sol terrestre, c'est à dire en rotation avec la Terre autour du référentiel géocentrique et ayant pour origine le centre de la Terre. On choisit le référentiel $\mathcal{R}_G$ car il est galiléen pour des durées d'expérience très inférieures à une année, ce qui est le cas ici. Ce n'est pas le cas du référentiel terrestre qui n'est galiléen que pour des durées d'expérience faibles devant une journée.

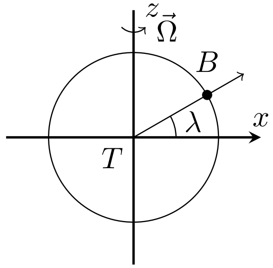


FIGURE III.1 –

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3\,\text{km}$ et de centre T, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (figure III.1) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. *Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ.*

   Réponse :
   Le point B décrit une trajectoire circulaire uniforme autour de l'axe de rotation terrestre sur un parallèle terrestre de rayon $r = R_T\cos(\lambda)$

---

3. *Établir l'expression de la norme v_B de la vitesse de B.*

   Réponse :
   On se place en base polaire $(T, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On a alors $\overrightarrow{TB} = z\vec{e}_z + r\vec{e}_r$ et donc

$$\vec{v}_B = r\Omega\vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \boxed{v_B = R_T\cos(\lambda)\Omega}$$

---

4. *Application numérique : calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5\ °$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2\ °$).*

   Réponse :
   On trouve $v_{B1} = 409\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour Cap Canaveral et $v_{B2} = 463\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ pour Kourou.

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$. On note ΔE_c la variation d'énergie cinétique de la fusée entre le point B et l'orbite parcourue à la vitesse v_0.

5. *Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\epsilon = \dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. Commenter.*

   Réponse :
   On a $\Delta E_c = \frac{1}{2}m_F\left(v_0^2 - v_B^2\right)$ soit finalement

$$\epsilon = \frac{(v_0^2 - v_{B1}^2) - (v_0^2 - v_{B2}^2)}{v_0^2 - v_{B1}^2} = \frac{v_{B2}^2 - v_{B1}^2}{v_0^2 - v_{B1}^2} \approx 7 \times 10^{-4}$$

   Ainsi, on réalise une petite économie en partant plutôt de Kourou (car $E_{c,initiale}$ est plus grande). Notons que l'énergie potentielle initiale est la même de Kourou ou de Cap Canaveral et c'est également la même lorsque la fusée est en orbite quelque soit sa base de lancement. Ainsi l'économie d'énergie totale est identique à l'économie d'énergie cinétique.

III.A.2 Orbite circulaire

6. *Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1, m_2, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et la constante de gravitation $\mathcal{G}$.*

   Réponse :
   On obtient d'après le cours $\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$ qui correspond bien à une force attractive (les masses ainsi que $\mathcal{G}$ étant positives).

---

7. *En déduire l'expression de la norme du champ de pesanteur g_T à la surface de la Terre, avec $\mathcal{G} \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}$. Realiser ensuite l'application numérique.*

   Réponse :
   On considère un objet de masse m placé sur la surface terrestre ($r = R_T$). La Terre exerce sur ce dernier une force de norme $F_G = \mathcal{G}m_Tm/R_T^2 = mg_T$ soit par identification $g_T = \mathcal{G}m_T/R_T^2 \approx 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La fusée de masse $m_F = 100 \times 10^3\,\text{kg}$ est à présent en orbite autour de la Terre.

8. *Montrer que la trajectoire est plane. On admettra par la suite qu'elle est circulaire de rayon r_0.*

   Réponse :
   On se place en base polaire. La seule force à considerer est ici la force de gravitation $\vec{F}_G = -\mathcal{G}m_Tm_F/r^2\vec{e}_r$ dont le moment par rapport à O est $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}_G) = \vec{0}$ (force centrale). On peut alors appliquer le TMC à la fusée dans le référentiel géocentrique galiléen et obtenir que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cste}}$$

   Le moment cinétique étant constant, il est en particulier de direction constante. Or, à tout instant, on a, par définition du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM} \perp \vec{L}_O$ donc le mouvement est plan dans un plan orthogonal à $\vec{L}_O$.

---

9. *A l'aide du principe fondamental de la dynamique, exprimer la norme de la vitesse v_0 de la fusée sur son orbite circulaire, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r_0.*

   Réponse :
   On a en base polaire (en choisissant $\vec{e}_z$ perpendiculaire au plan du mouvement) $\overrightarrow{OM} = r_0\vec{e}_r$ et donc $\vec{v} = r_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ puis $\vec{a} = -r_0(\dot{\theta})^2\vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{r_0}\vec{e}_r$. On applique alors le PFD à la fusée dans le référentiel d'étude galiléen et on obtient

$$-m_F\frac{v_0^2}{r_0}\vec{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_Fm_T}{r_0^2}\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad E_{c0} = \frac{1}{2}m_Fv_0^2 = \mathcal{G}\frac{m_Fm_T}{2r_0} \quad \text{et} \quad v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}$$

   Le mouvement est donc uniforme (à vitesse constante).

10. *Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r_0^3}$, où T_0 représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T. Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r_0 par a, demi-grand axe de l'ellipse.*

Réponse :
On a dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$ soit

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T} r_0^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}$$

On reconnait au passage la troisième loi de Kepler qui indique que le rapport de T^2/a^3 est constant pour tous les astres gravitant autour du même objet (ici la Terre).

11. *Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r_0 \simeq R_T$) .*

Réponse :
On obtient ici $v_0 \approx 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $T_0 \approx 5060\,\mathrm{s}$.

12. *Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, m_F et r_0 puis sa valeur numérique. On supposera pour cela que l'énergie potentielle gravitationelle $E_p(r) \to 0$ lorsque $r \to +\infty$.*

Réponse :
On a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \mathcal{G}\frac{m_F m_T}{2r_0}$ et $E_p = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r_0} + 0$. On en déduit que

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}m_F m_T}{2r_0} \approx 3{,}13 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$$

Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r_0 par a, demi-grand axe de l'ellipse.

III.B ... à la Lune.

III.B.1 Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure III.2).

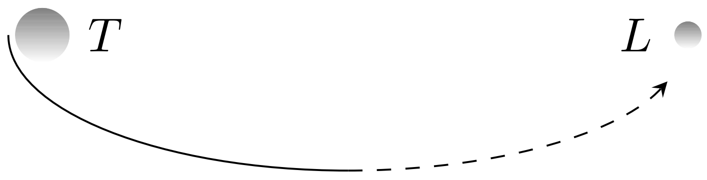


FIGURE III.2 –

13. *Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.*

Réponse :
On a d'après les résultats précédants $E_{m1} = -\frac{\mathcal{G}m_T m_F}{d_{TL}}$

14. *En déduire l'expression de la norme de la vitesse v_1. Faire l'application numérique.*

Réponse :
On sait de plus que $E_{m1} - E_{m0} = E_{c1} - E_{c0}$ (même altitude donc même énergie potentielle). On en déduit que

$$\frac{1}{2}m_F v_1^2 = \frac{1}{2}m_F v_0^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m_F}{d_{TL}} + \frac{\mathcal{G}m_T m_F}{2r_0} = \mathcal{G}m_T m_F\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d_{TL}}\right)$$

On obtient finalement

$$v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d_{TL}}\right)} \approx 11{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$$

15. *Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8\,\mathrm{m}$.*

Réponse :
On peut pour cela utiliser la troisième loi de Kepler toujours valide dans le cas d'une trajectoire elliptique

$$t_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathcal{G}m_T}}\,(d_{TL}/2)^{3/2} \approx 4{,}8\,\mathrm{jours}$$

III.B.2 Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .
L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.
Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

16. *Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.*

Réponse :
Il faut freiner la fusée ; en effet cette dernière disposait d'une énergie lui permettant presque d'échapper à l'attraction terrestre ; l'attraction de la Lune étant plus faible, il faudra nettement réduire la vitesse pour que la fusée reste au voisinage de la Lune. La question suivante nous en donnera numériquement la confirmation.

17. *Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}$ et $R_L = 1{,}74 \times 10^3\,\mathrm{km}$.*

Réponse :
En adaptant les résultats des questions précédantes à la lune, on montre que

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_L}{R_l}} \approx 1{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$$